This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

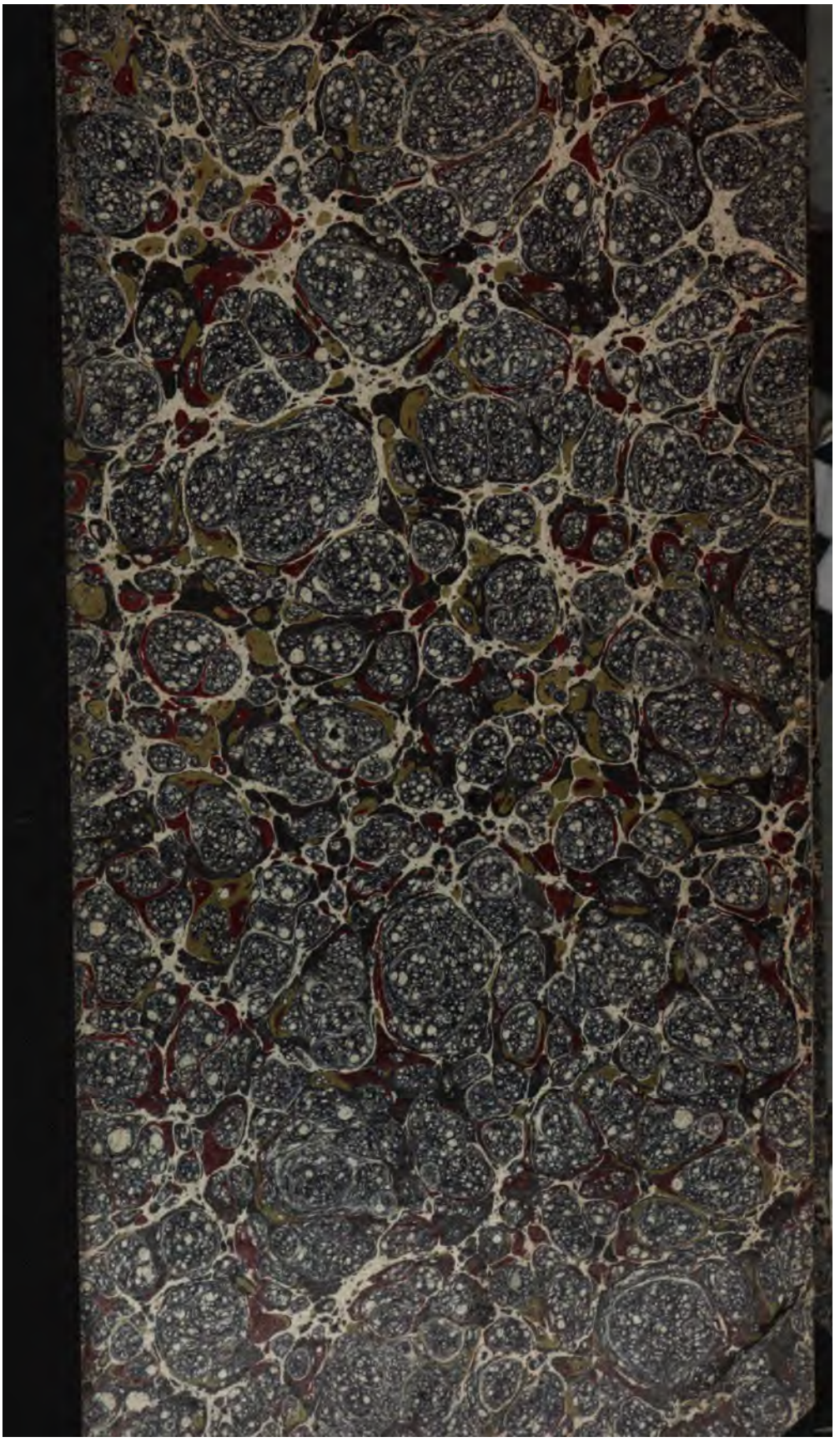
+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.



510.5
A673

ARCHIV

der

MATHEMATIK UND PHYSIK

mit besonderer Rücksicht

auf die Bedürfnisse der Lehrer an höheren Unterrichtsanstalten.

Gegründet von

J. A. Grunert,

fortgesetzt von

R. Hoppe,

Dr. ph. Prof. an d. Univ. Berlin.

Zweite Reihe.

Siebenter Teil.

Leipzig.
C. A. Koch's Verlagsbuchhandlung,
J. Sengbusch.

1889.

162305

STANFORD LIBRARY

Inhalts-Verzeichnis

des siebenten Teils.

№ der Abhandlung.		Heft.	Seite.
	Arithmetik, Algebra und reine Analysis ohne Integralrechnung.		
XIX.	Ueber eine besondere Art von Reihen. Von F. Rogel	IV	372
XX.	Die Bestimmung der Anzahl Primzahlen, welche nicht grösser als eine gegebene Zahl sind. Von F. Rogel	IV	381
	Integralrechnung.		
VII.	Reduction einiger Integrale. Von W. Láska .	I	110
XXII.	Sechs Beweise für den die elliptischen Integrale erster Gattung betreffenden Additionssatz. Von U. Bigler	IV	401
XXIII.	Ueber eine Differentialgleichung. Von W. Láska	IV	436
	Geometrie der Ebene.		
II.	Einige Beziehungen zwischen den drei Höhen und zwischen den drei seitenhalbirenden Ecktransversalen eines Dreiecks. Von C. Pabst	I	10
VI.	Metrische Relationen am Sehnenviereck. Von O. Zimmermann	I	64
VII.	Zur Construction der Kegelschnittslinien. Von K. Schober	I	99

№ der Abhandlung.		Heft.	Seite.
VII.	Beweis eines Dreieckssatzes. Von R Caspar .	I	109
XI.	Die Polaren der algebraischen Curven. Von R. Gaertner	II	180
XV.	Ueber Cassinische Curven. Von U. Bigler . .	III	311
XVI.	Einige Sätze über geometrische Orte und Enveloppen bei Kegelschnittbüscheln und Kegelschnittscharen. Von J. Heller	III	325
XVIII.	Die Lemniskate. Von E. Oekinghaus . . .	IV	337
XXI.	Neues über Vier- und Vielecke. Von B. Sporer	IV	389
XXIII.	Ueber Vierecke am Kreise. Von Beyssell . .	IV	426
XXIII.	Ein geometrischer Ort. Von K. Zelbr	IV	436

Geometrie des Raumes.

I.	Ueber den Ort der Axen derjenigen Schraubenbewegungen, durch welche eine Strecke in eine beliebige Lage im Raume gebracht werden kann. Von Pelisek	I	1
V.	Die flache Kreisschraubenfläche. Von F. Schiffner	I	54
VII.	Eine einfache Ableitung der Bedingungen, welche die Coefficienten einer Rotationsfläche zweiten Grades erfüllen müssen. Von F. Hofmann . .	I	101
VII.	Untersuchungen über die Fläche 3. Ordnung, welche von Kreisen erzeugt wird, die durch zwei Punkte gehen und eine Gerade treffen. Von F. Schiffner	I	104
VIII.	Ueber die Schaaren von Flächen 4. Grades mit 16 singulären Punkten, welche durch eine Lemniskate gehen. Von W. Schjerning	II	113
IX.	Die sphärische Curve 4.Ordnung als Einhüllende von Kreisschaaren. Von E. Czuber	II	143
X.	Dichte der Sehnen von Flächen und ebenen Curven. Von R. Hoppe	II	165
XIII.	Die ebenen und die sphärischen cykloidalen Curven. Von H. Ekama	II	207
XXIII.	Geometrischer Beweis eines Satzes der Flächentheorie. Von E. Czuber	IV	432

№ der Abhandlung.		Heft.	Seite.
	Trigonometrie.		
III.	Ueber trigonometrische Functionen von Winkelsummen und über Relationen zwischen Polygonwinkeln. Von Seipp	I	27
	Mechanik.		
IV.	Die elliptischen Integrale der Bewegung eines schweren Punktes in der verticalen Parabel. Von E. Oekinghaus	I	34
XIV.	Potential einer elliptischen Walze (Schluss). Von U. Bigler	III	225
XVII.	Ueber Kraftlinien der Anziehung von Linien. Von R. Hoppe	III	330
XXIII.	Ueber die Bewegung eines Luftballons in ruhiger Luft. Von E. Oekinghaus	IV	445
	Erd- und Himmelskunde.		
XII.	Ueber die Lage der Mondsichel gegen den Horizont des Beobachters. Von E. Oekinghaus	II	207
XXIII.	Zur Theorie der astronomischen Strahlenbrechung. Von E. Oekinghaus	IV	437
XXIII.	Die Refraction des Meeresbodens. Von E. Oekinghaus	IV	440
	Litterarische Berichte.		
XXV.	Foth (Ar. Geom.) Sickenberger (el. Math. — Ar. Aufg.) Suhle (Ar.) Reichel (Ar.) Moroff (Rechn.) Lieber u. Lühmann (Plan.) Köstler (Vorsch. Geom. — Plan.) Breuer (Kegschn.) Fischer (Geom.) Hauck (Ster.) Krebs (Phys. — Chem.) Henrici (Phys.) Acc. d. Napoli (Rend. XXVI. = 2. ser. I.)		
XXVI.	Lieber (ster. Aufg.) Lieber u. Lühmann (Constr. Aufg.) Reidt (plan. Aufg.) E. R. Müller (Constr. Aufg.) Harmuth (Aufg.) R. Weber (Elektr. Aufg.) Mendizabal Tam-		

borrel (Log. Taf.) Sickenberger (Log. 4st.) Mascart u. Joubert (Elektr.) Mascart (stat. El.) Thompson (Elektr.) Everett (ph. Einh.) Weinstein (ph. Massbest.) Urbanitzky (Elektr.) Krieg (Zschr. I.) Japan Univ. (J. I. 4. II. 1. 2. 3) Canad. Inst. (Proc. V.) Smiths. Inst. (Rep. 1884. 1885.) Wash. Phil. Soc. (Bull. X.) Amsterdam (N. Arch. XIV.) Mittag-Leffler (A. Math. XI.) Potonié (Nat. Zschr. II.). Newcomb (Am. J. X.) H. Klein (Rev. VII.)

XXVII. F. A. Müller. (Probl. Contin.) Dedekind (Zahl.). Tait (Eigensch. d. Mat.) Bonn (Structurf.). Simony (Molec. Th.) Hoh (Elektr.) Kerschbaum (Quadr. d. Kr.) Lolling (Qu. d. Kr.) Samuda (Qu. d. Hyperb.)

XXVIII. Weissenborn (Gerbert) Wohlwill (Jungius) Bierens de Haan (Baust. z. Gesch. d. Math.) Boncompagni (Bull. XX.) Schubert (Gesch. d. Qu. d. Kr.) Sibiriakoff (Elem.) Nies (Trig.) Spitz (Plan. — Trig. — Anh.) Weidemann (Plan.) Lembcke (Ar.) Amsterdam (N. Arch. XV.) Teixeira (J. VIII.) Toulouse (Ann. II.) Mansion u Neuberg (Math. VIII.) Bur. d. Long. (Ann. 1889).

Berichtigungen im 7. Teile.

S. 99	Z. 1	v. u.	statt Den	setze Der
103	7	v. u.	„Wir unternehmen etc.“	Die ganze Ausführung von 14 Zeilen bis
104	7	v. o.	„$a_{13} = a_{12}$ u s. w.“,	welche einen Rechenfehler enthält, soll wegfallen, dafür gesetzt werden: Beispielsweise folgt G ganz direct aus E und F durch Elimination von a_{11}.
106	20	v. ob.	statt $+cz$	setze (das 2te mal) $-cz$
	22	„ „	„ acx	„ $(acx$
	23	„ „	„ y^3	„ y^2

Berichtigungen im 6. Teile.

S. 438	Z. 22	v. u.	statt	aus M	setze	aus M'
440	4	v. o.	„	$\mathfrak{B}$	„	$\mathfrak{z}$
	5	v. u.	„	a, b, c	„	$a\xi$, $b\eta$, $c\zeta$
441	14	v. o.	„	„	„	„
	5	v. u.	„	F^2	„	$F\varrho$

STANFORD LIBRARY

I.

Ueber den Ort der Axen derjenigen Schraubenbewegungen, durch welche eine Strecke in eine beliebige Lage im Raume gebracht werden kann.

Von

Herrn **Peli'sˇek Miloslav,**

Assistent an der k. k. deutschen technischen Hochschule in Prag.

Mit einer Tafel.

Als Ausgangspunkt unserer Betrachtungen wählen wir die Fundamentalsätze der Kinematik:

1) Jede Bewegung eines starren Körpers aus einer Lage P in eine andere P', wobei ein Punkt a seine Lage nicht ändert, ist aequivalent einer einzigen Rotation um eine bestimmte durch a gehende Axe.

2) Jede Bewegung eines starren Körpers aus einer Lage P in eine andere P' ist einer Translation, durch welche ein Punkt a mit seinem entsprechenden a' zusammenfällt, und einer Rotation um eine bestimmte durch a' gehende Axe aequivalent.

Jene Translation kann jedoch in eine zu dieser Axe parallele und in eine zu ihr senkrechte Componente zerlegt werden. Wenn wir die letztere mit jener Rotation combiniren, so erhalten wir eine Rotation um eine gewisse, znr früheren parallele Axe, und wenn wir endlich diese Rotation mit der übrigbleibenden Translation combiniren, eine Schraubenbewegung. Einer beliebigen Bewegung eines starren Systems kann also eine Schraubenbewegung oder eine Rotation verbunden mit einer Translation in der Richtung der Axe substituirt werden.

Soll demnach die Strecke ab in die Lage a_1b_1 übergeführt werden (Fig. I.), so verschieben wir ab parallel zu sich selbst in die Lage $a_1(b)$; dann ist der Ort der Axen derjenigen Rotationen, durch welche $a_1(b)$ nach a_1b_1 gebracht werden kann, der Strahlenbüschel, dessen Scheitel a_1 und dessen Ebene die den Winkel der Geraden a_1b_1, $a_1(b)$ senkrecht halbirende Ebene D ist.

Wie aus dem oben angeführten ersichtlich, sind die gesuchten Schraubenaxen diesen Strahlen parallel, die Ebene D ist daher ihre Directionsebene und der Ort der Schraubenaxe ist demnach ein gewisses Konoïd.

Legen wir durch den Punkt a_1 und ebenso durch den Punkt b Ebenen, welche mit D parallel sind, und wählen in denselben eine beliebige Richtung $a_1x \parallel b_1x$, dann können wir den Punkt a_1 nach a auf einer Schraubenlinie zurückführen, deren Axe mit jener Richtung parallel ist. Dieser Bewegung können wir jedoch eine Translation a_1A in der Richtung a_1x und eine Rotation in der durch a gehenden, zu a_1x senkrechten Ebene substituiren. Dabei wird zugleich b_1 durch Translation in der Richtung b_1x nach B kommen, sodass $a_1A = b_1B$ ist, und durch nachfolgende Rotation in der durch b gehenden zu b_1x senkrechten Ebene nach b gelangen; kurz wir können die Gerade a_1b_1 in der angenommenen Richtung nach AB durch Translation und dann nach ab durch Rotation bringen.

Die Rotationsaxe erhalten wir bekanntlich, indem wir aA bezüglich bB in α bezüglich β halbiren und durch diese Halbirungspunkte Ebenen ϱ_α bezüglich ϱ_β legen, welche auf aA bezüglich bB senkrecht stehen; der Schnitt derselben ist die gesuchte Axe, die zugleich auch eine gesuchte Schraubenaxe ist.

Es entsteht nun die Frage, welches der Ort der Punkte A bezüglich B ist, wenn a_1x alle Richtungen in der Directionsebene einnimmt.

Da die durch a gehenden zu den Richtungen a_1x senkrechten Ebenen auch zur Directionsebene D senkrecht sind, so enthalten sie alle die Senkrechte aS_a, welche von dem Punkte a zur Directionsebene gefällt werden kann; ihre Trassen auf der Directionsebene sind aber senkrecht zu den entsprechenden Richtungen a_1x, der Ort der Punkte A ist somit ein Kreis K_a über dem Durchmesser a_1S_a.

Den Ort der Punkte B erhalten wir gleichfalls, indem wir von b auf die Directionsebene die Senkrechte bS_b fällen, als einen Kreis b über dem Durchmesser b_1S_b. Diese Kreise K_a und K_b müssen congruent sein, da die parallelen, aus den Punkten S_a bezüglich S

ausgehenden Sehnen von gleicher Länge sind. Die Geraden aA bezüglich bB sind also die Erzeugenden je eines schiefen Kreiskegels, dessen Erzeugende aS_a bezüglich bS_b auf der Basis senkrecht stehen.

Die Halbirungspunkte α_x, β_x dieser Geraden, erfüllen also gleichfalls congruente Kreise k_a, k_b, deren Ebenen parallel zu D sind. Es ist aber leicht zu zeigen, dass diese Ebenen in eine einzige zusammenfallen. Es ist nämlich bekannt, dass die Verbindungsline $\alpha\beta$ der Punkte, welche die Strecken aa_1 und bb_1 halbiren, ebenfalls eine Schraubenaxe ist, welche der Aufgabe genügt, und zwar diejenige, zu welcher eine halbe Umdrehung gehört; daher ist dieselbe auch parallel zu der Directionsebene, woraus aber hervorgeht, dass k_a und k_b in einer Ebene liegen.

Bezeichnen wir die Schnittpunkte der Geraden aS_a und bS_b mit dieser Ebene mit s_a und s_b, dann erkennen wir leicht, dass die Durchmesser $s_a\alpha$ und $s_b\beta$ der Kreise k_a und k_b parallel sind.

Die Ebene dieser Kreise wählen wir als die horizontale Projectionsebene, als die verticale dagegen die zu diesen Durchmessern parallele (Fig. II.). Um irgend eine Axe zu erhalten, ziehen wir parallele Sehnen $\alpha\alpha_x$, $\beta\beta_x$ (vergleiche Figuren I. und II.), ferner zu den Kegelerzeugenden $a\alpha_x$ und $b\beta_x$ durch die Punkte α_x und β_x senkrechte Ebenen; die Schnittlinie derselben ist nach früherem eine gesuchte Schraubenaxe. Diese Schnittlinie ist aber parallel mit den Sehnen $\alpha\alpha_x$, $\beta\beta_x$ und zugleich ist $\alpha\alpha_x = \beta\beta_x$ die Hälfte der Translation in der Richtung dieser Axe.

Auf diese Weise erhalten wir eine leichte Uebersicht, wie sich die Länge der Translation mit der Axenrichtung ändert. Wenn wir z. B. in α und β die Tangenten ziehen, so erkennen wir, dass es in dieser Richtung keine Translation gibt, und in der Tat schneiden sich die zugehörigen Ebenen in der Rotationsaxe der gegebenen Strecken.

Die Grösse der Translation wächst bei Aenderung der Axenrichtung bis zum Maximum $2\alpha s_\alpha = 2\beta s_\beta$. Dabei existirt folgende Relation:

$$x^2 + y^2 = \text{const}\, \overline{a_1 S_a}^2 = \overline{b_1 S_b}^2,$$

wenn x die Grösse der Translation in einer gewissen Richtung, y aber in dazu senkrechter Richtung bezeichnet.

Es lässt sich nun zeigen, dass die Ebenen, welche in den Punkten der Kreise k_a bezüglich k_b auf den Erzeugenden $\alpha_x a$ bezüglich $\beta_x b$ senkrecht stehen, einen Kegel zweiter Ordnung mit dem Scheitel α bezüglich β umhüllen. Vor allem ist klar, dass eine beliebige Gerade $\alpha\alpha_x$, da sie zur zugehörigen $a\alpha_x$ senkrecht ist, in der zu dieser

Geraden senkrechten Ebene liegt und daher die Spur dieser senkrechten Ebene in der horizontalen Projectionsebene bildet. Dadurch ist aber bewiesen, dass alle betrachteten Ebenen durch den Punkt α gehen, also einen Kegel von dem Scheitel α einhüllen.

Um irgend eine Erzeugende dieses Kegels zu finden, wählen wir zu $a\alpha_x$ die unendlich nahe Erzeugende des Kegels von dem Scheitel a etwa $a\alpha_y$ und suchen den Schnitt der Ebenen, welche auf den Geraden $a\alpha_x$ und $a\alpha_y$ senkrecht stehen. Die Grenze dieses Schnittes ist die gesuchte Erzeugende des Kegels mit dem Scheitel α. Da α ein Punkt dieser Schnittlinie ist, so haben wir noch einen zu finden, am zwekmässigsten den, welcher in die verticale Ebene hineinfällt, die sich in $a\alpha_x$ projicirt.

Wenn wir diese Ebene um ihre Trasse $S_a\alpha_x$ in die horizontale Projectionsebene umdrehen, wobei a nach (a), die Erzeugende nach $(a)\alpha_x$ und der Schnitt der betrachteten Ebene in die Senkrechte $(\alpha_x)p$ hineinfällt, so finden wir, dass die Bestimmung der Grenze des Schnittpunktes der zu α_x und α_y zugehörigen Ebenen mit der nach $a\alpha_x$ sich projicirenden Ebene identisch ist mit der Bestimmung des Berührungspunktes der Geraden $\alpha_x(p)$ mit der Parabel, welche durch den Brennpunkt (a) und die Scheiteltangente $S_a\alpha_x$ bestimmt ist.

Dieser Berührungspunkt (n) hat bekanntlich doppelte Entfernung von der Parabelaxe als α_x. Drehen wir daher diese Ebene zurück, so gelangt (n) nach n', sodass $n'\alpha_x = \alpha_x s_a$. Die Punkte n' liegen also auf einem Kreise k_n, welcher doppelt so grossen Durchmesser hat wie der frühere Kreis und denselben in s_x berührt Dieser Kreis ist die Leitlinie des gesuchten Kegels mit dem Scheitel α, welcher also zweiter Ordnung ist. Dasselbe gilt wörtlich von dem Kegel mit dem Scheitel β.

Die Horizontaltrasse der Ebene, welche k_α in einer gegebenen Geraden an' berührt, findet man offenbar, indem man den Winkel $s_a a n'$ halbirt; die Halbirungslinie gibt uns nach früherem die Richtung der Axe, welche sich in dieser Ebene befindet. Auf diese Weise finden wir unter anderem, dass dem Punkte α auf k_a die Erzeugende $\alpha\gamma_\alpha$ des Kegels k_α, ferner dem Punkte s_a die Erzeugende as_a entspricht, woraus wir schliessen, dass die X-Axe und die Gerade $\alpha''\gamma_\alpha'' \perp a''\alpha''$ die Verticalprojection des Kegels k_α bilden. Ebenso finden wir die Verticalprojection des Kegels k_β.

Da die horizontale Projectionsebene die beiden Kegel k_α und k_β in den Geraden as_a bezüglich βs_b berührt, so sind die Schnittlinien einer beliebigen Horizontalebene H mit diesen Kegeln gewisse Parabeln P_α und P_β, deren horizontale Projectionen $s_a\alpha$ und $s_b\beta$ zu Axen haben, und deren Scheitel und Scheiteltangenten wir erhalten,

indem wir die Schnittpunkte $\sigma_\alpha''\sigma_\beta''$ der Verticaltrasse H'' mit den Geraden $\alpha''\gamma_\alpha''$ und $\beta''\gamma_\beta''$ in die Punkte σ_α' und σ_β' projiciren.

Die Durchschnitte zweier entsprechenden Berührungsebenen zu k_α und k_β mit der Ebene H sind demnach zwei parallele Tangenten zu den Parabeln P_α und P_β; befindet sich dagegen in der Ebene H irgend eine von den gesuchten Axen, so muss dieselbe die gemeinschaftliche Tangente beider Parabeln sein, und umgekehrt, jede gemeinschaftliche Tangente der Parabeln P_α und P_β ist eine gesuchte Schraubenaxe, wobei wir aber offenbar die unendlich ferne Gerade auszuschliessen haben.

Ein weiterer Schluss ist der, dass jeder Schnittpunkt der gemeinschaftlichen Tangenten ein Doppelpunkt der Fläche ist.

Da die Parabeln P_α und P_β parallele Axen haben, so müssen wir, wie bekannt, die unendlich ferne Gerade als doppelte gemeinschaftliche Tangente der beiden Parabeln zählen; diese Parabeln haben demnach noch zwei gemeinschaftliche Tangenten, welche entweder reell oder imaginär sein können.

Besserer Uebersicht wegen wollen wir nun die Sätze anführen, welche sich von den Systemen der Parabeln P_α und P_β beweisen lassen:

1) Die Horizontalprojection aller Parabeln P_α bezüglich P_β sind confocal und zwar ist der gemeinschaftliche Brennpunkt in α bezüglich β.

2) Die Horizontalprojectionen der gemeinschaftlichen Tangenten, an die beiden Parabeln P_α und P_β in irgend einer Horizontalebene gehen durch einen festen Punkt Δ'.

Um den ersten Satz zu erweisen, betrachten wir die Ebene, welche k_α in der Geraden $\alpha\varphi$ berührt und mit der Geraden αs_α einen rechten Winkel einschliesst; die Trasse dieser Ebene schliesst nach dem früheren den Winkel von 45^0 mit αs_α und daher auch die Tangenten in den Pnnkten der Geraden $\alpha\varphi$; dann ist aber α die Projection des Brennpunktes aller Parabeln P_α, weil die Tangente, welche in dem Punkte berührt, dessen Projection auf die Axe der Brennpunkt ist, mit der Axe den Winkel von 45^0 einschliesst, wodurch der erste Satz bewiesen ist.

Seien T_1 und T_2 zwei gemeinschaftliche Tangenten der Parabeln P_α und P_β und Δ' ihr Durchschnittspunkt (Fig. III.); ferner $I_\alpha I_\beta$, $II_\alpha II_\beta$ die Durchschnittspunkte dieser Tangenten mit den Scheiteltangenten Σ_α und Σ_β; dann sind die Dreiecke $I_\alpha II_\alpha\alpha$ und $I_\beta II_\beta\beta$

ähnlich und für das Centrnm Δ' ähnlich gelegen; somit geht ebenfalls $\alpha\beta$ durch Δ' hindurch. Ausserdem finden wir, dass die Dreiecke $I_\alpha\alpha\sigma_\alpha$ und $I_\beta\beta\sigma_\beta$ ähnlich und für Δ' ähnlich gelegen sind; somit geht weiter diese Gerade $\sigma_\alpha\sigma_\beta$ durch dieses Centrum.

Wenn nun die Ebene H ihre Lage ändert, indem sie sich immer parallel bleibt, so sind die Verbindungslinien $\sigma_\alpha\sigma_\beta$ die Erzeugenden eines gleichseitigen hyperbolischen Paraboloides, dessen Leitlinien $\alpha\gamma_\alpha$ und $\beta\gamma_\beta$ und dessen Directionsebenen die beiden Projectionsebenen sind.

Unter diesen Erzeugenden muss es Eine geben, welche zu dem entgegengesetzten System als $\sigma_\alpha\sigma_\beta$ gehört und welche zur horizontalen Projectionsebene senkrecht steht und sich daher als ein Punkt horizontal projicirt. Da diese Gerade von allen Geraden $\sigma_\alpha\sigma_\beta$ geschnitten werden muss, so muss die Projection $\sigma_\alpha'\sigma_\beta'$ durch diesen Punkt gehen. Verschieben wir H so, dass H' durch den Schnittpunkt der Geraden $\alpha''\gamma_\alpha''$ und $\beta''\gamma_\beta''$ geht, dass also H durch die Rotationsaxe, welche sich in dem System der Schraubenaxen befindet, hindurch geht, so muss auch diese $\alpha'\beta'$ durch jenen Punkt gehen. Jener Punkt ist also Δ', womit auch der zweite Satz bewiesen ist.

Der nächste Schluss ist nun der, dass der Ort der Doppelpunkte der Fläche eine Gerade ist, welche auf der Directionsebene senkrecht steht, und dass sie die Gerade ist, auf welcher sich der kürzeste Abstand der Rotationsaxe mit der Schraubenaxe, zu welcher halbe Umdrehung gehört, bildet.

Die Lage dieser Doppelgeraden Δ zu den gegebenen Strecken ist sehr einfach. Sei O der Halbirungspunkt des kürzesten Abstandes der Geraden, auf denen sich die gegebenen Strecken ab und a_1b_1 befinden, und legen wir durch denselben die Directionsebene D, welche den Winkel der beiden Geraden senkrecht halbirt, und errichten wir endlich in diesen Punkten auf diese Ebene eine Senkrechte, welche von manchen Autoren die Winkelhalbirnngslinie der gegebenen Strecken heisst, dann ist dieselbe identisch mit Δ.

Ob zwar diese Behauptung aus den vorhergehenden Betrachtungen ohne Weiteres gefolgert werden kann, so wollen wir doch noch zu ihrer genauen Begründung folgendes anführen.

Die Axen sämtlicher Rotationen, durch welche die Gerade P nach P' gebracht werden kann, bilden bekanntlich ein gleichseitiges hyperbolisches Paraboloid, dessen Haupterzeugende diese Winkelhalbirungslinien sind. Da aber Δ die Axe der Rotation, durch welche ab nach a_1b_1 gebracht werden kann, ferner die Schraubenaxe $\alpha\beta$, zu

welcher eine halbe Umdrehung gehört, rechtwinklig schneidet, so muss sie mit der Winkelhalbirungslinie identisch sein.

Die Construction sämtlicher Schraubenaxen ist auf Grund der angeführten Resultate sehr einfach. Beschreiben wir (Fig. IV.) einen Kreis über dem Durchmesser $\alpha\Delta$ (oder $\beta\Delta$), führen wir eine beliebige H'' und projiciren den Durchschnittspunkt σ_α'' mit der Geraden $\alpha''\gamma_\alpha''$ in die Punkte 1 2, dann sind die Geraden 1Δ, 2Δ die Projectionen der Schraubenaxen, welche sich in der Ebene H befinden, da 1 2 die Scheiteltangente, α der Brennpunkt der Parabel P_α ist, ferner 1Δ und 2Δ die gemeinschaftlichen Tangenten der Parabeln P_α und P_β.

Aus dieser Construction folgt nachstehende Verteilung der Schraubenaxen im Raume.

1) Wählen wir H so, dass die entsprechende Scheiteltangente $\overline{1\,2}$ den Kreis nicht schneidet, dann gibt es keine reelle Axe in dieser Ebene.

2) Wenn H jene Lage erreicht, in welcher die zugehörige Scheiteltangente den Kreis in p berührt, so fallen in Δp zwei Axen zusammen. Diese Erzeugende ist die tiefste Erzeugende der Fläche, die sogenannte singuläre Erzeugende oder Kante der Fläche, da sie mit der Nachbarerzeugenden in einer Ebene liegt. Die Richtung dieser Kante halbirt den Winkel der Geraden $\alpha\beta$ und $s_\alpha\alpha$.

3) Verschieben wir H noch weiter, sodass die zugehörige Scheiteltangente den Kreis in zwei Punkten 1 2 schneidet, so sind 1Δ, 2Δ die Projectionen von zwei Axen, welche immer mehr divergiren. Geht die Scheiteltangente durch den Mittelpunkt des Kreises, so stehen die zugehörigen Axen aufeinander senkrecht; wenn sie dagegen durch Δ' hindurchgeht, so haben die zugehörigen Axen als Horizontalprojectionen die Tangente des Kreises in Δ' und jene Scheiteltangente 1 2; diese ist die Rotationsaxe, welche sich im Systeme befindet.

4) Berührt die Scheiteltangente den Kreis in einem Punkte q, so fallen wieder zwei Axen in der Geraden Δq zusammen, indem sie nun die höchste Erzeugende, die zweite singuläre Erzeugende der Fläche bilden. Es ist leicht einzusehen, dass die beiden singulären Erzeugenden aufeinander senkrecht stehen.

5) Bewegt sich H noch weiter, so werden die Axen wieder imaginär, die ganze Fläche liegt also zwischen zwei parallelen Ebenen, welche durch die erwähnten Kanten gehen.

Es wird nicht überflüssig sein zu bemerken, dass es sehr leicht ist, zu einer Axe die zu ihr senkrechte zu finden; wir brauchen nur den Durchmesser des Punktes zu ziehen, in welchem die gegebene Axe den Kreis in der Projection schneidet, durch den Diametralpunkt geht dann die Projection der anderen Axe. Es ist ferner leicht die Entfernung solcher Axen zu bestimmen.

Aus der Construction geht hervor, dass die Fläche folgende Leitlinien hat:

1) die Gerade Δ,

2) die Ellipse, deren Horizontalprojection der angeführte Kreis ist, und welche somit von Δ' geschnitten wird,

3) die unendlich ferne Gerade, durch welche alle Directionsebenen hindurchgehen, und welche somit durch keinen Punkt der Ellipse geht.

Es ist aber zur Genüge bekannt, dass eine so bestimmte Fläche dritter Ordnung ist, welche Δ als Doppelgerade besitzt.

Bisher befassten wir uns mit der Ueberführung der Strecke ab durch eine Schraubenbewegung nach a_1b_1. Wenn wir aber ab nach b_1a_1 überführen wollen, so wird der Ort aller Axen, welche dieser Bedingung genügen, eine andere Fläche dritter Ordnung sein, deren Directionsebene die andere Ebene ist, welche den Nebenwinkel der gegebenen Strecken senkrecht halbirt, und deren Doppelgerade die andere Winkelhalbirungslinie ist.

Auf Grund der vorangehenden Betrachtungen sind wir jetzt auch im Stande die Frage zu beantworten, welches der Ort der Axen derjenigen Schraubenbewegungen ist, durch welche die Gerade P in eine willkürliche Lage gebracht werden kann.

Verschieben wir die Länge a_1b_1 in die Lage a_2b_2, a_3b_3 ... (Fig. V.), sodass die Strecke alle Lagen auf P' stetig einnimmt, dann wird jeder Lage derselben eine gewisse Fläche dritter Ordnung als Ort der Axen entsprechen. Die Punkte $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ ... liegen auf einer Geraden M, welche parallel zu P_1 ist, die Kreise über den Durchmessern $\alpha_1'\Delta'$ $\alpha_2'\Delta'$ ... bilden einen Büschel von Kreisen, welche sich in Δ' berühren, sie sind also die Horizontalprojection eines Büschels von Kreiscylindern, welche sich längs der Geraden Δ berühren. Die Ebenen, welche zu $a\alpha_1$, $a\alpha_2$ ... senkrecht sind, schneiden die Ebene aM, wie man leicht erkennt, in den Tangenten derjenigen Parabel, welche, durch den Brennpunkt a und die Scheiteltangente M bestimmt ist; diese Ebenen sind Berührungsebenen eines parabolischen Cylinders, der auf der Ebene aM senkrecht steht.

Da der Ebenenbüschel zweiter Ordnung und der Cylinderbüschel zu den Punkten α perspectivisch sind, so sind sie zu einander projectivisch. Der Ort der Ellipsen als Leitlinien aller Flächen dritten Grades ist also das Erzeugniss eines Flächenbüschels zweiten Grades mit dem dazu projectivischen Ebenenbüschel zweiter Ordnung.

Hier sei nun erwähnt, dass eine solche Fläche allgemein sechsten Grades ist und dass dieselbe unter günstigen Bedingungen auf den vierten Grad sich reduciren kann. Von einem solchen Specialfall wollen wir bei anderer Gelegenheit sprechen.

Für unsere weiteren Betrachtungen ist nur der Umstand von Wichtigkeit, dass durch jeden Punkt B im Raume eine Fläche des Büschels und somit auch eine gewisse Ebene des projectivischen Ebenenbüschels bestimmt ist. Wenn wir von diesem Punkte B eine Senkrechte zu Δ fällen und durch den Fusspunkt dieser Senkrechten eine zu M senkrechte Ebene legen, so ist durch den Schnittpunkt α ein Cylinder des Büschels bestimmt, dessen Schnitt mit jener Ebene eine Ellipse ist. Daraus sieht man, dass jene Senkrechte zu Δ eine Erzeugende der Fläche dritten Grades ist, welche diese Ellipse, die Gerade Δ und die zu Δ senkrechte Ebene als Leitelemente besitzt, es gibt also eine Schraubenaxe, welche durch B geht und der Aufgabe genügt.

Wenn wir eine Senkrechte zur anderen Winkelhalbirungslinie [Δ] fällen, so] erhalten wir auch eine Schraubenaxe, durch welche P nach P' übergeführt werden kann, wobei wir aber der Geraden P' entgegengesetzte Richtung wie zuvor beilegen.

Wenn wir diese Möglichkeit ausschliessen. so erkennen wir:

Die Axen aller Schraubenbewegungen, durch welche die Gerade P in die Lage P' gebracht werden kann, sind im Raume so verteilt, dass

1) durch jeden Punkt (der nicht auf Δ liegt) eine Axe, nämlich die Senkrechte zu Δ_1 geht,

2) dass in jeder Ebene (welche nicht zu Δ senkrecht ist) eine Axe, nämlich die Senkrechte, welche wir durch den Schnittpunkt der Ebene mit Δ zu letzterer führen können, liegt.

Sämtliche Schraubenaxen bilden demnach eine lineare Congruenz, welche durch Δ und die unendlich ferne Gerade in der zu Δ senkrechten Richtung als Leitlinien bestimmt ist. Durch jeden Punkt dieser Leitlinien gehen unendlich viele Axen, welche einen Ebenenbüschel der zu Δ senkrecht ist, bilden, und in jeder Ebene, welche durch Δ hindurchgeht, befinden sich unendliche viele zu Δ parallele Axen.

II.

Einige Beziehungen zwischen den drei Höhen und zwischen den drei seitenhalbirenden Ecktransversalen eines Dreiecks.

Von

Carl Pabst.

---

§. 1.

Die Lösung der Aufgabe. aus drei von einander unabhängigen Stücken ein Dreieck zu construiren oder zu berechnen, unterliegt meist gewissen Bedingungen. Soll z. B. aus drei gegebenen Strecken als Seiten ein Dreieck construirt werden, so müssen die 3 Strecken der bekannten Bedingung genügen, dass die Summe je zweier derselben grösser, und die Differenz je zweier kleiner als die dritte Strecke ist. Wir wollen hier einige Beziehungen entwickeln, welche zwischen den drei Höhen und zwischen den drei seitenhalbirenden Ecktransversalen eines Dreiecks bestehen.

Bezeichnen h_1, h_2, h_3 die bezüglich zu den Seiten a, b, c des Dreiecks ABC zugehörigen Höhen, so bestehen die Gleichungen:

$$(1) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots ah_1 = bh_2 = ch_3$$

Mit Hilfe derselben wollen wir die Seiten a, b, c durch die drei Höhen ausdrücken.

Durch die Höhe h_1 wird das Dreieck ABC in zwei rechtwinklige Dreiecke geteilt, aus denen man nach dem Pythagoräischen Lehrsatze erhält:

$$a = \sqrt{b^2 - h_1^2} + \sqrt{c^2 - h_1^2}$$

Durch zweimalige Quadrirung geht diese Gleichung über in

$$a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2a^2c^2-2b^2c^2+4a^2h_1^2=0$$

oder:

$$4b^2c^2-(a^2-b^2-c^2)^2=4a^2h_1^2$$

Aus dieser Gleichung folgen die oben erwähnten Beziehungen zwischen den drei Seiten eines Dreiecks. Damit nämlich h_1 reell wird, muss die linke Seite dieser Gleichung positiv sein. Dieselbe stellt aber die Differenz zweier Quadrate dar, weshalb man dafür setzen kann das Product:

$$(2bc+a^2-b^2-c^2)(2bc-a^2+b^2+c^2)$$

Da dieses Product positiv sein muss, so erhält man die Bedingung:

$$b^2+c^2-2bc<a^2<b^2+c^2+2bc$$

oder:

$$b-c<a<b+c$$

Setzt man nun in die zuletzt erhaltene Gleichung die aus (1) folgenden Werte für b und c:

$$b=\frac{h_1}{h_2}a;\quad c=\frac{h_1}{h_3}a,$$

so geht dieselbe über in

$$\left[\frac{4h_1^2}{h_2^2h_3^2}-\frac{(h_2^2h_3^2-h_3^2h_1^2-h_1^2h_2^2)^2}{h_2^4h_3^4}\right]a^4=4a^2h_1^2$$

$$[4h_1^2h_2^2h_3^2-(h_2^2h_3^2-h_3^2h_1^2-h_1^2h_2^2)^2]a^2=4h_1^2h_2^4h_3^4$$

Dividirt man diese Gleichung durch $k_1^2h_2^2h_3^2$, so erhält man:

$$\left[4h_1^2-\left(\frac{h_2h_3}{h_1}-\frac{h_3h_1}{h_2}-\frac{h_1h_2}{h_3}\right)^2\right]a^2=4h_2^2h_3^2$$

Analoge Gleichungen ergeben sich für b und c, und zwar gehen dieselben aus der erhaltenen hervor, wenn man darin die Indices der h cyklisch und zugleich a mit b und b mit c vertauscht, so dass man erhält:

$$(2)\ \ldots\ \begin{cases} a^2=\dfrac{4h_2^2h_3^2}{4h_1^2-\left(\dfrac{h_2h_3}{h_1}-\dfrac{h_3h_1}{h_2}-\dfrac{h_1h_2}{h_3}\right)^2} \\ b^2=\dfrac{4h_3^2h_1^2}{4h_2^2-\left(\dfrac{h_3h_1}{h_2}-\dfrac{h_1h_2}{h_3}-\dfrac{h_2h_3}{h_1}\right)^2} \\ c^2=\dfrac{4h_1^2h_2^2}{4h_3^2-\left(\dfrac{h_1h_2}{h_3}-\dfrac{h_2h_3}{h_1}-\dfrac{h_3h_1}{h_2}\right)^2} \end{cases}$$

Hierdurch sind die Seiten des Dreiecks durch die drei Höhen bestimmt.

§. 2.

Aus den entwickelten Gleichungen (2) lassen sich nun einige Bedingungen für die drei Höhen eines Dreiecks ableiten. Zunächst ist klar, dass die Nenner der Brüche in (2) positiv sein müssen, damit man für a, b, c reelle Werte erhält. Betrachten wir den Nenner des ersten Bruches, so stellt derselbe die Differenz zweier Quadrate dar, weshalb man dafür setzen kann:

$$\left(2h_1+\frac{h_2h_3}{h_1}-\frac{h_3h_1}{h_2}-\frac{h_1h_2}{h_3}\right)\left(2h_1-\frac{h_2h_3}{h_1}+\frac{h_3h_1}{h_2}+\frac{h_1h_2}{h_3}\right)$$

Damit dieses Product positiv wird, muss sein:

$$\frac{h_3h_1}{h_2}+\frac{h_1h_2}{h_3}-2h_1<\frac{h_2h_3}{h_1}<\frac{h_3h_1}{h_2}+\frac{h_1h_2}{h_3}+2h_1$$

Zwei analoge Bedingungen ergeben sich aus den beiden anderen Gleichungen in (2), so dass man als Bedingungen für die drei Höhen eines Dreiecks hat:

$$(3)\ \ldots\ \begin{cases} \frac{h_3h_1}{h_2}+\frac{h_1h_2}{h_3}-2h_1<\frac{h_2h_3}{h_1}<\frac{h_3h_1}{h_2}+\frac{h_1h_2}{h_3}+2h_1 \\ \frac{h_1h_2}{h_3}+\frac{h_2h_3}{h_1}-2h_2<\frac{h_3h_1}{h_2}<\frac{h_1h_2}{h_3}+\frac{h_2h_3}{h_1}+2h_2 \\ \frac{h_2h_3}{h_1}+\frac{h_3h_1}{h_2}-2h_3<\frac{h_1h_2}{h_3}<\frac{h_2h_3}{h_1}+\frac{h_3h_1}{h_2}+2h_3 \end{cases}$$

Addirt man die beiden ersten Teile dieser Ungleichungen, so erhält man folgende Beziehung:

$$(4)\ \ldots\ldots\ \frac{h_2h_3}{h_1}+\frac{h_3h_1}{h_2}+\frac{h_1h_2}{h_3}<2(h_1+h_2+h_3)$$

Mit Hilfe der Gleichungen (2) lässt sich noch eine dritte Bedingung für die drei Höhen eines Dreiecks aufstellen. Löst man die Klammer im Nenner der Brüche in (2) auf, so bemerkt man, dass die 3 Brüche denselben Nenner haben. Bezeichnet man denselben mit N^2, so dass:

$$(5)\ \ldots\ldots\ \begin{cases} a=\frac{2h_2h_3}{N} \\ b=\frac{2h_3h_1}{N} \\ c=\frac{2h_1h_2}{N} \end{cases}$$

dann ist:

$$N^2 = 2(h_1^2+h_2^2+h_3^2) - \left[\left(\frac{h_2h_3}{h_1}\right)^2 + \left(\frac{h_3h_1}{h_2}\right)^2 + \left(\frac{h_1h_2}{h_3}\right)^2\right]$$

Damit N reell werde, muss demnach sein:

$$(6) \ldots \left(\frac{h_2h_3}{h_1}\right)^2 + \left(\frac{h_3h_1}{h_2}\right)^2 + \left(\frac{h_1h_2}{h_3}\right)^2 < 2(h_1^2+h_2^2+h_3^2)$$

Wenn diese Bedingung erfüllt ist, so genügen h_1, h_2, h_3 auch der Bedingung (4), denn aus dieser folgt:

$$\left(\frac{h_2h_3}{h_1}\right)^2 + \left(\frac{h_3h_1}{h_2}\right)^2 + \left(\frac{h_1h_2}{h_3}\right)^2 < 2(h_1^2+h_2^2+h_3^2)+8(h_2h_3+h_3h_1+h_1h_2)$$

Wenn daher ein Dreieck aus seinen drei Höhen construirt werden soll, so ist diese Aufgabe nur lösbar, wenn die Strecken h_1, h_2, h_3 den Bedingungen (3) und (6) genügen.

Mit Hilfe der Gleichungen (5) kann man nun auch von der Beschaffenheit der Höhen eines Dreiecks auf die Beschaffenheit seiner Seiten und Winkel schliessen. Zunächst ist klar, dass das Dreieck ungleichseitig ist, wenn die drei Höhen ungleich sind. Sind zwei Höhen einander gleich, so sind auch die zugehörigen Seiten gleich, d. h. das Dreieck ist gleichschenklig; und sind die drei Höhen einander gleich, so ist das Dreieck gleichseitig. Ist nämlich $h_1 = h_2 = h_3$, so folgt aus (5):

$$a = b = c = \tfrac{2}{3}h\sqrt{3}$$

Ferner ist nach dem Pythagoreischen Lehrsatze für $\alpha = 90^0$:

$$b^2+c^2 = a^2$$

Setzt man hierin für a, b, c ihre Werte aus (5), so erhält man:

$$h_3^2h_1^2+h_1^2h_2^2 = h_2^2h_3^2$$

oder:

$$(7) \ldots \ldots \ldots \left(\frac{h_1}{h_2}\right)^2 + \left(\frac{h_1}{h_3}\right)^2 = 1$$

Ebenso ergiebt sich:

$$\text{für } \beta = 90^0: \quad \left(\frac{h_2}{h_3}\right)^2 + \left(\frac{h_2}{h_1}\right)^2 = 1$$

$$\text{für } \gamma = 90^0: \quad \left(\frac{h_3}{h_1}\right)^2 + \left(\frac{h_3}{h_2}\right)^4 = 1$$

Hieraus fliesst der Satz:

Ist die Summe der Quadrate der Verhältnisse einer Höhe zu den beiden anderen Höhen eines Dreiecks gleich 1, so ist das aus diesen

3 Höhen construirbare Dreieck rechtwinklig, und zwar ist derjenige Dreieckswinkel ein Rechter, von dessen Scheitel die erstere Höhe ausgeht.

Aus dem verallgemeinerten Pythagoreischen Lehrsatze folgt, dass:

$$b^2+c^2 \gtrless a^2$$

ist, je nachdem $\alpha \lessgtr 90^0$ ist. Hieraus ergiebt sich mit Hilfe der Gleichungen (5):

$$h_3^2 h_1^2 + h_1^2 h_2^2 \gtrless h_2^2 h_3^2$$

oder:

$$(8) \quad \ldots\ldots\ldots \left(\frac{h_1}{h_2}\right)^2 + \left(\frac{h_1}{h_3}\right)^2 \gtrless 1$$

Daraus fliessen die Sätze:

1) Die Summe der Quadrate der Verhälnisse einer Höhe zu den beiden anderen Höhen eines Dreiecks ist grösser oder kleiner als 1, je nachdem der Winkel, von dessen Scheitel die erstere Höhe ausgeht, kleiner oder grösser als 90^0 ist.

2) Im spitzwinkligen Dreieck ist die Summe der Quadrate der Verhältnisse je einer Höhe zu den beiden anderen Höhen grösser als 1.

3) Ist die Summe der Quadrate der Verhältnisse einer Höhe zu den beiden anderen Höhen eines Dreiecks kleiner als 1, so ist der Winkel, von dessen Scheitel die erstere Höhe ausgeht, ein stumpfer.

4) Ist die Summe der Quadrate der Verhältnisse je einer Höhe zu den beiden anderen Höhen eines Dreiecks grösser als 1, so ist das Dreieck spitzwinklig.

§. 3.

Wir wollen nun noch die Winkel des Dreiecks direct durch die Höhen berechnen. Setzen wir zu dem Zwecke:

$$\begin{aligned} a+b+c &= 2u \\ -a+b+c &= 2(u-a) \\ a-b+c &= 2(u-b) \\ a+b-c &= 2(u-c) \end{aligned}$$

so ist, wie in der Trigonometrie bewiesen wird:

$$(9)\quad \begin{cases} \operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha^2 = \dfrac{(u-b)(u-c)}{u(u-a)} \\ \operatorname{tg}\frac{1}{2}\beta^2 = \dfrac{(u-c)(u-a)}{u(u-b)} \\ \operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma^2 = \dfrac{(u-a)(u-b)}{u(u-c)} \end{cases}$$

Mit Hilfe der Gleichungen (5) des §. 1. erhält man zunächst:

$$(10)\quad \begin{cases} u = \dfrac{1}{N}(h_2h_3 + h_3h_1 + h_1h_2) \\ u-a = \dfrac{1}{N}(-h_2h_3 + h_3h_1 + h_1h_2) \\ u-b = \dfrac{1}{N}(h_2h_3 - h_3h_1 + h_1h_2) \\ u-c = \dfrac{1}{N}(h_2h_3 + h_3h_1 - h_1h_2) \end{cases}$$

Setzt man diese Werte in die Gleichungen (9) ein, so gehen diese über in:

$$(11)\quad \begin{cases} \operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha^2 = \dfrac{h_2^2h_3^2 - h_1^2(h_2-h_3)^2}{h_1^2(h_2+h_3)^2 - h_2^2h_3^2} \\ \operatorname{tg}\frac{1}{2}\beta^2 = \dfrac{h_3^2h_1^2 - h_2^2(h_3-h_1)^2}{h_2^2(h_3+h_1)^2 - h_3^2h_1^2} \\ \operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma^2 = \dfrac{h_1^2h_2^2 - h_3^2(h_1-h_2)^2}{h_3^2(h_1+h_2)^2 - h_1^2h_2^2} \end{cases}$$

Hiernach lassen sich aus den drei Höhen direct die drei Winkel des Dreiecks berechnen.

Aus den Gleichungen (10) lassen sich noch einige Bedingungen für die drei Höhen eines Dreiecks ableiten. Da $u-a$, $u-b$, $u-c$ positiv sind, so müssen h_1, h_2, h_3 den Bedingungen genügen:

$$(12)\quad \begin{cases} h_1(h_2+h_3) > h_2h_3 > h_1(h_2-h_3) \\ h_2(h_3+h_1) > h_3h_1 > h_2(h_3-h_1) \\ h_3(h_1+h_2) > h_1h_2 > h_3(h_1-h_2) \end{cases}$$

das heisst in Worten: Das Rechteck aus je zwei Höhen eines Dreiecks ist kleiner als das Rechteck aus der Summe dieser beiden Höhen und der dritten Höhe und grösser als das Rechteck aus der Differenz der beiden ersteren Höhen und der dritten Höhe.

Die Bedingungen (12) lassen sich noch in folgende Form bringen:

$$(12a)\quad \left\{\begin{array}{l} \frac{h_1}{h_3}+\frac{h_1}{h_2} > 1 > \frac{h_1}{h_3}-\frac{h_1}{h_2} \\ \frac{h_2}{h_1}+\frac{h_2}{h_3} > 1 > \frac{h_2}{h_1}-\frac{h_2}{h_3} \\ \frac{h_3}{h_2}+\frac{h_3}{h_1} > 1 > \frac{h_3}{h_2}-\frac{h_3}{h_1} \end{array}\right.$$

Wie wir schon im vorigen §. erwähnt haben, ist, wenn $h_1 = h_2$ ist, das Dreieck ABC gleichschenklig, und zwar ist $a = b$. Für diesen Fall gehen die Gleichungen (11) über in:

$$(13)\quad \left\{\begin{array}{l} \operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha^2 = \operatorname{tg}\frac{1}{2}\beta^2 = \frac{2h_3 - h_1}{2h_3 + h_1} \\ \operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma^2 = \frac{h_1^2}{4h_3^2 - h_1^2} \end{array}\right.$$

Hieraus folgt zunächst: $2h_3 > h_1$. Das heisst in Worten: Im gleichgleichschenkligen Dreieck ist die doppelte zur Basis zugehörige Höhe stets grösser als eine der beiden anderen Höhen.

Ferner ergiebt sich aus der letzten Gleichung in (13), dass $\gamma \begin{matrix} < \\ = \\ > \end{matrix} 90^0$ ist, je nachdem $2h_3^2 \begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix} h_1^2$ ist. Im gleichschenkligen Dreieck ist demnach der Winkel an der Spitze kleiner, gleich oder grösser als 90^0, je nachdem das doppelte Quadrat über der zur Basis zugehörigen Höhe grösser, gleich oder kleiner als das Quadrat über einer der anderen Höhen isi.

Schliesslich folgen aus den Gleichungen (13) noch die beiden Bedingungen:

$$(14)\quad \left\{\begin{array}{l} \operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha \operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma = \frac{h_1}{2h_3 + h_1} \\ \operatorname{cotg}\frac{1}{2}\alpha \operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma = \frac{h_1}{2h_3 - h_1} \end{array}\right.$$

§. 4.

Analog dem bisherigen Verfahren wollen wir nun einige Beziehungen zwischen den drei seitenhalbirenden Ecktransversalen eines Dreiecks ableiten. Bezeichnen m_1, m_2, m_3 die bezüglich die

Seiten a, b, c des Dreiecks ABC halbirenden Ecktransversalen, so erhält man nach dem erweiterten Pythagoreischen Lehrsatze:

$$m_1^2 = b^2 + \tfrac{1}{4}a^2 - ap$$
$$m_1^2 = c^2 + \tfrac{1}{4}a^2 - aq$$

wenn p und q die Projectionen bezüglich der Seiten b und c auf die Seite a bedeuten. Beachtet man, dass $p+q=a$ ist, so folgt:

$$2m_1^2 = b^2 + c^2 - \tfrac{1}{2}a^2$$

Auf dieselbe Weise ergeben sich noch zwei Gleichungen bezüglich für m_2 und m_3, so dass man hat:

$$(15)\ldots\ldots\ldots \begin{cases} -\tfrac{1}{2}a^2 + b^2 + c^2 = 2m_1^2 \\ a^2 - \tfrac{1}{2}b^2 + c^2 = 2m_2^2 \\ a^2 + b^2 - \tfrac{1}{2}c^2 = 2m_3^2 \end{cases}$$

Nach leichter Rechnung erhält man hieraus:

$$(16)\ldots\ldots\ldots \begin{cases} a^2 = \tfrac{4}{9}(-m_1^2 + 2m_2^2 + 2m_3^2) \\ b^2 = \tfrac{4}{9}(2m_1^2 - m_2^2 + 2m_3^2) \\ c^2 = \tfrac{4}{9}(2m_1^2 + 2m_2^2 - m_3^2) \end{cases}$$

Hierdurch sind die Seiten durch die drei seitenhalbirenden Ecktransversalen eines Dreiecks bestimmt. Wir wollen aus den erhaltenen Gleichungen einige Beziehungen zwischen den drei Transversalen ableiten.

Wie man sogleich ersieht, müssen, damit man für a, b, c reelle Werte erhält, die Bedingungen erfüllt sein:

$$(17)\ldots\ldots\ldots \begin{cases} m_2^2 + m_3^2 > \tfrac{1}{2}m_1^2 \\ m_3^2 + m_2^2 > \tfrac{1}{2}m_2^2 \\ m_1^2 + m_2^2 > \tfrac{1}{2}m_3^2 \end{cases}$$

d. h. in Worten: In jedem Dreieck ist die Summe der Quadrate über je zwei seitenhalbirenden Ecktransversalen grösser als das halbe Quadrat über der die dritte Seite des Dreiecks halbirenden Ecktransversale.

Ferner folgt aus dem Pythagoreischen Lehrsatze für $\alpha = 90^0$:

$$b^2 + c^2 = a^2$$

In diese Gleichung die Werte für a, b, c aus (16) eingesetzt, giebt:

$$\alpha = 90^0: \qquad m_2^2 + m_3^2 = 5m_1^2$$
$$\beta = 90^0: \qquad m_3^2 + m_1^2 = 5m_2^2$$
$$\gamma = 90^0: \qquad m_1^2 + m_2^2 = 5m_3^2$$

Daraus fliesst der Satz: Im recktwinkligen Dreieck ist die Summe der Quadrate über den die Katheten halbirenden Ecktransversalen gleich dem fünffachen Quadrat über der die Hypotenuse halbirenden Ecktransversale.

Oder umgekehrt: Ist die Summe der Quadrate über zwei seitenhalbirenden Ecktransversalen eines Dreiecks gleich dem fünffachen Quadrat über der die dritte Seite halbirenden Ecktransversale, so ist das Dreieck rechtwinklig, und zwar ist derjenige Dreieckswinkel ein Rechter, von dessen Scheitel die letztere Transversale ausgeht.

Ausserdem wissen wir, dass im schiefwinkligen Dreieck das Quadrat über einer Seite grösser oder kleiner ist als die Summe der Quadrate über den beiden anderen Seiten, je nachdem der der ersteren Seite gegenüberliegende Winkel kleiner oder grösser als 90^0 ist. Demnach ergiebt sich mit Hilfe der Gleichungen (16):

$$\alpha \lessgtr 90^0: \qquad m_2^2 + m_3^2 \lessgtr 5m_1^2$$

Hieraus fliessen die Sätze:

1) In einem Dreieck ist die Summe der Quadrate über zwei Transversalen, welche die Ecken mit den Mitten der Gegenseiten verbinden, kleiner oder grösser als das fünffache Quadrat über der die dritte Seite halbirenden Ecktransversale, je nachdem der Winkel, welcher der dritten Seite gegenüberliegt, kleiner oder grösser als 90^0 ist.

2) Im spitzwinkligen Dreieck ist die Summe der Quadrate über je zwei Transversalen, welche die Ecken mit den Mitten der Gegenseiten verbinden, kleiner als das fünffache Quadrat über der die dritte Seite halbirenden Ecktransversale.

3) Ist in einem Dreieck die Summe der Quadrate über zwei Transversalen, welche die Ecken mit den Mitten der Gegenseiten verbinden, grösser als das fünffache Quadrat über der die dritte Seite halbirenden Ecktransversale, so ist der Winkel, welcher der dritten Seite gegenüberliegt, grösser als 90^0.

4) Ist in einem Dreieck die Summe der Quadrate über je zwei, die Ecken mit den Mitten der Gegenseiten verbindenden Ecktransversalen kleiner als das fünffache Quadrat über der die dritte Seite halbirenden Fcktransversale, so ist das Dreieck spitzwinklig.

§. 5.

Nachdem wir bisher die Dreiecksseiten durch die seitenhalbirenden Ecktransversalen ausgedrückt haben, bleibt uns noch übrig, die Winkel des Dreiecks zu bestimmen. Hierbei könnte man die Gleichungen (16) auf die Gleichungen (9) des §. 3. anwenden. Indessen wollen wir jetzt einen anderen Weg einschlagen, wobei wir zu neuen Bedingungen zwischen den drei seitenhalbirenden Ecktransversalen eines Dreiecks gelangen werden.

Der Kürze wegen sei (Fig. 1.)

$$\begin{aligned} \overset{\wedge}{CAD} &= \alpha_1, & \overset{\wedge}{BAD} &= \alpha_2 \\ \overset{\wedge}{ABE} &= \beta_1, & \overset{\wedge}{CBE} &= \beta_2 \\ \overset{\wedge}{BCF} &= \gamma_1, & \overset{\wedge}{ACF} &= \gamma_2 \end{aligned}$$

Alsdann ergiebt sich aus dem Dreieck BCS:

$$\frac{\sin\beta_2}{\sin\gamma_1} = \frac{m_3}{m_2}$$

$$\frac{\sin\beta_2 + \sin\gamma_1}{\sin\beta_2 - \sin\gamma_1} = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\beta_2+\gamma_1)\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}(\beta_2-\gamma_1) = \frac{m_3+m_2}{m_3-m_2}$$

Zwei analoge Gleichungen ergeben sich für γ_2, α_1 und für α_2, β_1, so dass man hat:

$$(18)\quad \ldots \begin{cases} \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\beta_2+\gamma_1)\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}(\beta_2-\gamma_1) = \dfrac{m_3+m_2}{m_3-m_2} \\ \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\gamma_2+\alpha_1)\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}(\gamma_2-\alpha_1) = \dfrac{m_1+m_3}{m_1-m_3} \\ \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\alpha_2+\beta_1)\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}(\alpha_2-\beta_1) = \dfrac{m_2+m_1}{m_2-m_1} \end{cases}$$

Wie man sieht, geht jede dieser Gleichungen aus der vorhergehenden hervor, wenn man die Winkel und die Indices von m cyklisch vertauscht.

Ferner erhält man aus dem Dreieck CSE, da $\overset{\wedge}{CES} = \alpha+\beta_1$ ist:

$$\frac{\sin\gamma_2}{\sin(\alpha+\beta_1)} = \frac{m_2}{2m_3}$$

Daraus folgt auf dieselbe Weise wie vorher:

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\gamma_2+\alpha+\beta_1)\operatorname{ctg}\tfrac{1}{2}(\gamma_2-\alpha-\beta_1)=\frac{m_2+2m_3}{m_2-2m_3}$$

Nun ist aber: $\frac{1}{2}(\gamma_2+\alpha+\beta_1=90^0-\frac{1}{2}(\beta_2+\gamma_1)$, wodurch die letztere Gleichung übergeht in

$$\operatorname{ctg}\tfrac{1}{2}(\beta_2+\gamma_1)\operatorname{ctg}\tfrac{1}{2}(\gamma_2-\alpha-\beta_1)=\frac{m_2+2m_3}{m_2-2m_3}$$

Wendet man hierauf die eben erwähnte cyklische Vertauschung an, so erhält man:

$$(19)\quad \ldots \begin{cases} \operatorname{ctg}\tfrac{1}{2}(\beta_2+\gamma_1)\operatorname{ctg}\tfrac{1}{2}(\gamma_2-\alpha-\beta_1)=\dfrac{m_2+2m_3}{m_2-2m_3} \\ \operatorname{ctg}\tfrac{1}{2}(\gamma_2+\alpha_1)\operatorname{ctg}\tfrac{1}{2}(\alpha_2-\beta-\gamma_1)=\dfrac{m_3+2m_1}{m_3-2m_1} \\ \operatorname{ctg}\tfrac{1}{2}(\alpha_2+\beta_1)\operatorname{ctg}\tfrac{1}{2}(\beta_2-\gamma-\alpha_1)=\dfrac{m_1+2m_2}{m_1-2m_2} \end{cases}$$

Beachtet man schliesslich, dass $\overset{\wedge}{BFS}=\alpha+\gamma_2$ ist, so folgt aus dem Dreieck *BSF*:

$$\frac{\sin\beta_1}{\sin(\alpha+\gamma_2)}=\frac{m_3}{2m_2}$$

Berücksichtigt man, dass $\frac{1}{2}(\beta_1+\alpha+\gamma_2)=90^0-\frac{1}{2}(\beta_2+\gamma_1)$ ist, so resultirt:

$$\operatorname{ctg}\tfrac{1}{2}(\beta_2+\gamma_1)\operatorname{ctg}\tfrac{1}{2}(\beta_1-\alpha-\gamma_2)=\frac{m_3+2m_2}{m_3-2m_3}$$

Wenn wir auch hierauf die erwähnte Vertauschung anwenden, so ergeben sich die Gleichungen:

$$(20)\quad \ldots \begin{cases} \operatorname{ctg}\tfrac{1}{2}(\beta_2+\gamma_1)\operatorname{ctg}\tfrac{1}{2}(\beta_1-\alpha-\gamma_2)=\dfrac{m_3+2m_2}{m_3-2m_2} \\ \operatorname{ctg}\tfrac{1}{2}(\gamma_2+\alpha_1)\operatorname{ctg}\tfrac{1}{2}(\gamma_1-\beta-\alpha_2)=\dfrac{m_1+2m_3}{m_1-2m_3} \\ \operatorname{ctg}\tfrac{1}{2}(\alpha_2+\beta_1)\operatorname{ctg}\tfrac{1}{2}(\alpha_1-\gamma-\beta_2)=\dfrac{m_1+2m_1}{m_2-2m_1} \end{cases}$$

Setzen wir nun der Kürze wegen:

$$(21)\quad \ldots \begin{cases} \operatorname{ctg}\tfrac{1}{2}(\beta_2+\gamma_1)=u; & \operatorname{ctg}\tfrac{1}{2}(\beta_2-\gamma_1)=u' \\ \operatorname{ctg}\tfrac{1}{2}(\gamma_2+\alpha_1)=v; & \operatorname{ctg}\tfrac{1}{2}(\gamma_2-\alpha_1)=v' \\ \operatorname{ctg}\tfrac{1}{2}(\alpha_2+\beta')=w; & \operatorname{ctg}\tfrac{1}{2}(\alpha_2-\beta_1)=w' \end{cases}$$

so gehen, bei Beachtung, dass $\frac{1}{2}(\gamma_2-\alpha-\beta_1)=\frac{1}{2}(\gamma_2-\alpha_1)-\frac{1}{2}(\alpha_2+\beta_1)$; etc. ist, die Gl. (18) (19) (20) über in

$$(22)\quad \begin{cases} \dfrac{u'}{u} = \dfrac{m_3+m_2}{\omega_3-m_2} \\ \dfrac{v'}{v} = \dfrac{m_1+m_3}{m_1-m_3} \\ \dfrac{w'}{w} = \dfrac{m_2+m_1}{m_2-m_1} \end{cases}$$

$$(23)\quad \begin{cases} u\ \dfrac{v'w+1}{w-v'} = \dfrac{m_2+2m_3}{m_2-2m_3} \\ v\ \dfrac{w'u+1}{u-w'} = \dfrac{m_3+2m_1}{m_3-2m_1} \\ w\ \dfrac{u'v+1}{v-u'} = \dfrac{m_1+2m_2}{m_1-2m_2} \end{cases}$$

$$(24)\quad \begin{cases} u\ \dfrac{-w'v+1}{v+w'} = \dfrac{m_3+2m_2}{m_3-2m_2} \\ v\ \dfrac{-u'w+1}{w+u'} = \dfrac{m_1+2m_3}{m_1-2m_3} \\ w\ \dfrac{-v'u+1}{u+v'} = \dfrac{m_2+2m_1}{m_2-2m_1} \end{cases}$$

Ausser diesen Gleichungen genügen u, v, w noch der Gleichung:

$$(25)\quad u+v+w = uvw$$

weil $\frac{1}{2}(\beta_2+\gamma_1)+\frac{1}{2}(\gamma_2+\alpha_1)+\frac{1}{2}(\alpha_2+\beta_1) = \frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma) = 90^0$ ist.

Durch Addition ergeben sich aus den Gleichungen (23) und (24):

$$w+v = \frac{m_1+2m_2}{m_1-2m_2}(v-u')+\frac{m_1+2m_3}{m_1-2m_3}(w+u')$$

$$u+w = \frac{m_2+2m_3}{m_2-2m_3}(w-v')+\frac{m_2+2m_1}{m_2-2m_1}(u+v')$$

$$v+u = \frac{m_3+2m_1}{m_3-2m_1}(u-w')+\frac{m_3+2m_2}{m_3-2m_2}(v+w')$$

Ordnet man diese Gleichungen nach u, v, w und setzt darin für u', v', w' die aus den Gleichungen (22) folgenden Werte ein, so resultirt:

$$(26)\quad \begin{cases} m_1(m_2+m_3)u+m_2(m_1-2m_3)v+m_3(m_1-2m_2)w = 0 \\ m_1(m_2-2m_3)u+m_2(m_3+m_1)v+m_3(m_2-2m_1)w = 0 \\ m_1(m_3-2m_2)u+m_2(m_3-2m_1)v+m_3(m_1+m_2)w = 0 \end{cases}$$

Wir haben also drei lineare Gleichungen für $m_1 u$, $m_2 v$, m_3 deren absolute Glieder gleich null sind. Damit diese sich nic widersprechen, muss, wie in der Determinantentheorie nachgewies wird, ihre Determinante verschwinden, also:

$$\Delta = \begin{vmatrix} m_2+m_3 & m_1-2m_3 & m_1-2m_2 \\ m_2-2m_3 & m_3+m_1 & m_2-2m_1 \\ m_3-2m_2 & m_3-2m_1 & m_1+m_2 \end{vmatrix} = 0$$

Bezeichnen wir mit Δ_1, Δ_2, Δ_3 die Unterdeterminanten d Determinante Δ, welche in der Entwicklung von Δ als Coefficient der Glieder der dritten Zeile auftreten, setzt man also:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} m_1-2m_3 & m_1-2m_2 \\ m_3+m_1 & m_2-2m_1 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} m_1-2m_2 & m_2+m_3 \\ m_2-2m_1 & m_2-2m_3 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} m_2+m_3 & m_1-2m_3 \\ m_2-2m_3 & m_3+m_1 \end{vmatrix}$$

so erhält man aus den beiden ersten Gleichungen in (26):

$$v = \frac{m_1\Delta_2}{m_2\Delta_1}u$$

$$w = \frac{m_1\Delta_3}{m_3\Delta_1}u$$

Diese Werte in die Gleichung (25) eingesetzt giebt:

$$u^2 = \frac{\Delta_1(m_2m_3\Delta_1+m_3m_1\Delta_2+m_1m_2\Delta_3)}{m_1^2\Delta_2\Delta_3}$$

$$v^2 = \frac{\Delta_2(m_2m_3\Delta_1+m_3m_1\Delta_2+m_1m_2\Delta_3)}{m_2^2\Delta_3\Delta_1}$$

$$w^2 = \frac{\Delta_3(m_2m_3\Delta_1+m_3m_1\Delta_2+m_1m_2\Delta_3)}{m_3^2\Delta_1\Delta_2}$$

Diese Brüche lassen sich noch etwas vereinfachen. Es ist nämlic

$$\Delta_1 = 3m_1(-m_1+m_2+m_3)$$
$$\Delta_2 = 3m_2(m_1-m_2+m_3)$$
$$\Delta_3 = 3m_3(m_1+m_2-m_3)$$

so dass die Ausdrücke für u^2, v^2, w^2 übergehen in

$$u^2 = \frac{(m_1+m_2+m_3)(-m_1+m_2+m_3)}{(m_1-m_2+m_3)(m_1+m_2-m_3)}$$

$$v^2 = \frac{(m_1+m_2+m_3)(m_1-m_2+m_3)}{(m_1+m_2-m_3)(-m_1+m_2+m_3)}$$

$$w^2 = \frac{(m_1+m_2+m_3)(m_1+m_2-m_3)}{(-m_1+m_2+m_3)(m_1-m_2+m_3)}$$

Setzen wir schliesslich:

$$\begin{aligned} m_1+m_2+m_3 &= 2s \\ -m_1+m_2+m_3 &= 2(s-m_1) \\ m_1+m_2+m_3 &= 2(s-m_2) \\ m_1+m_2-m_3 &= 2(s-m_3) \end{aligned}$$

so erhalten wir, wenn wir die Gleichungen (21) und (22) berücksichtigen:

$$(27)\ldots\ldots\begin{cases} \operatorname{ctg}\frac{1}{2}(\beta_2+\gamma_1)^2 = \dfrac{s(s-m_1)}{(s-m_2)(s-m_3)} \\ \operatorname{ctg}\frac{1}{2}(\gamma_2+\alpha_1)^2 = \dfrac{s(s-m_2)}{(s-m_3)(s-m_1)} \\ \operatorname{ctg}\frac{1}{2}(\alpha_2+\beta_1)^2 = \dfrac{s(s-m_3)}{(s-m_1)(s-m_2)} \end{cases}$$

$$(28)\ldots\begin{cases} \operatorname{ctg}\frac{1}{2}(\beta_2-\gamma_1)^2 = \left(\dfrac{m_3+m_2}{m_3-m_2}\right)^2 \dfrac{s(s-m_1)}{(s-m_2)(s-m_3)} \\ \operatorname{ctg}\frac{1}{2}(\gamma_2-\alpha_1)^2 = \left(\dfrac{m_1+m_3}{m_1-m_3}\right)^2 \dfrac{s(s-m_2)}{(s-m_3)(s-m_1)} \\ \operatorname{ctg}\frac{1}{2}(\alpha_2-\beta_1)^2 = \left(\dfrac{m_2+m_1}{m_2-m_1}\right)^2 \dfrac{s(s-m_3)}{(s-m_1)(s-m_2)} \end{cases}$$

Hierdurch sind die Dreieckswinkel eindeutig bestimmt.

Denn in den Gleichungen (27) haben wir, wenn wir die Quadratwurzel ausziehen, nur das posisive Vorzeichen dieser Quadratwurzel zu nehmen, da die halbe Summe zweier Winkelteile eines Dreiecks kleiner als 90^0 ist, die Cotangente von Winkeln im ersten Quadranten aber positiv ist.

§. 6.

Wenn wir die im vorigen §. erhaltenen Gleichungen (27) mit den Gleichungen (9) in §. 3. vergleichen, so ergiebt sich daraus, dass $\beta_2+\gamma_1$, $\gamma_2+\alpha_1$, $\alpha_2+\beta_1$ Winkel eines Dreiecks sind, welches

m_1, m_2, m_3 zu Seiten hat. Nun sind aber, wie sich aus Fig. 1. ergiebt, $\beta_2+\gamma_1$, $\gamma_2+\alpha_1$, $\alpha_2+\beta_1$ die Winkel, welche von dem oberen Abschnitte je einer der seitenhalbirenden Ecktransversalen und dem unteren Abschnitte einer anderen gebildet werden. Construirt man daher das Dreieck aus den drei seitenhalbirenden Ecktransversalen eines gegebenen Dreiecks als Seiten, so sind die Winkel desselben gleich den Winkeln, welche im gegebenen Dreieck von je einem oberen Abschnitte einer der Transversalen und dem unteren Abschnitte einer anderen gebildet werden.

Dieses Resultat lässt sich auch geometrisch ableiten. Zieht man zunächst durch die Ecke B des Dreiecks ABC (Fig. 1.) die Parallele BN zu der Transversale CF, welche die Verlängerung der Transversale AD über D hinaus in N schneidet, so ist in den Dreiecken BDN und CDS:

$$BD = CD$$

$$\measuredangle BDN = \measuredangle CDS$$

$$\measuredangle BND = \measuredangle CSD$$

$$\triangle BDN \cong CDS$$

$$BN = CS = \tfrac{2}{3}CF$$

$$DN = DS = \tfrac{1}{3}AD$$

Verlängert man nun SB über B hinaus um $BJ = SE$, zieht durch J die Parallele zu CF, welche die Verlängerung von AD über D hinaus in K schneidet, so ist:

$$JK : BN = JS : BS = 3 : 2$$

folglich:

$$JK = \tfrac{3}{2}BN = \tfrac{3}{2}CS = CF$$

Ausserdem ist:

$$KS : NS = JS : BS = 3 : 2$$

folglich:

$$KS = \tfrac{3}{2}NS = AD$$

Mithin ist in dem Dreick JKS:

$$SK = AD$$

$$SJ = BE$$

$$JK = CF$$

$$\measuredangle JSK = \measuredangle BSD = \measuredangle ASE$$

$$\measuredangle JKS = \measuredangle CSD = \measuredangle ASF$$

$$\measuredangle KJS = \measuredangle BSF = \measuredangle CSE$$

Hieraus folgt, da sich aus den drei seitenhalbirenden Ecktransversalen eines Dreiecks stets ein Dreieck construiren lässt, welches dieselben als Seiten enthält, dass zwischen ihnen die Bedingungen bestehen:

$$(29)\ldots\ldots\ldots\begin{cases} m_2+m_3 > m_1 > m_2-m_3 \\ m_3+m_1 > m_2 > m_3-m_1 \\ m_1+m_2 > m_3 > m_1-m_2 \end{cases}$$

Trägt man ferner auf den seitenhalbirenden Ecktransversalen von ihrem Durchschnitte S aus nach beiden Seiten hin die Länge der betreffenden Transversale ab, so dass also

$$SG = SK = AD$$
$$SH = SL = CF$$
$$SJ = SM = BE$$

und verbindet die Endpunkte dieser Strecken, so erhält man das Sechseck $GHJKLM$, dessen Seiten bezüglich gleich und parallel den drei Transversalen des gegebenen Dreiecks sind. Es ist:

$$HJ = AD = ML$$
$$GH = BE = KL$$
$$MG = CF = JK$$

Demnach erhält man:

$$\frac{\triangle ASB}{\square GSJH} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}m_1\cdot\frac{2}{3}m_2}{m_1\cdot m_2} = \frac{2}{9}$$

also:

$$\triangle ASB = \frac{2}{9}\square GSJK$$

Auf dieselbe Weise ergiebt sich:

$$\triangle BSC = \frac{2}{9}\square JSLK$$
$$\triangle CSA = \frac{2}{9}\square LSGM$$

Durch Addition dieser drei Gleichungen resultirt:

$$\triangle ABC = \frac{2}{9}GHJKLM$$

Nun ist aber, wie man sofort übersieht:

$$GHJKLM = 6\triangle GSH$$

und:

$$\triangle GSH = \sqrt{s(s-m_1)(s-m_2)(s-m_3)}$$

Mithin folgt:

(30) . . . $\triangle ABC = \frac{4}{3}\sqrt{s(s-m_1)(s-m_2)(s-m_3)}$

wobei s, wie wir oben festgesetzt haben, die Summe der drei seitenhalbirenden Ecktransversalen des Dreiecks ABC bedeutet.

Uebrigens ergiebt sich aus dem Gesagten eine einfache Construction des Dreiecks ABC aus seinen drei seitenhalbirenden Ecktransversalen m_1, m_2, m_3.

Man construire $\triangle BSN$ aus $SN = \frac{1}{3}m_1$, $BS = \frac{2}{3}m_2$, $BN = \frac{2}{3}m_3$, ziehe durch S und N die Parallelen bezüglich zu BN und BS, welche sich in C schneiden, verlängere NS über S hinaus um $SA = SN$, so ist $\triangle ABC$ das verlangte Dreieck.

Guben, Juli 1885.

III.

Ueber trigonometrische Functionen von Winkelsummen und über Relationen zwischen Polygonwinkeln.

Von

Seipp.

Beliebige Winkelgrössen, n an der Zahl, seien mit w_1, w_2, w_3 ... w_n bezeichnet.

Von den bekannten Formeln:

$$\sin(w_1+w_2+w_3) = \sin w_1 \cos w_2 \cos w_3 + \sin w_2 \cos w_1 \cos w_3 + \sin w_3 \cos w_1 \cos w_2 - \sin w_1 \sin w_2 \sin w_3$$

und

$$\cos(w_1+w_2+w_3) = -\sin w_1 \sin w_2 \cos w_3 - \sin w_1 \sin w_3 \cos w_2 - \sin w_2 \sin w_3 \cos w_1 + \cos w_1 \cos w_2 \cos w_3$$

ausgehend, erhält man wegen

$$\sin(w_1+w_2+w_3+w_4) = \sin(w_1+w_2+w_3)\cos w_4 + \cos(w_1+w_2+w_3)\sin w_4$$

sogleich:

$$\begin{aligned}\sin(w_1+w_2+w_3+w_4) = {} & \sin w_1 \cos w_2 \cos w_3 \cos w_4 \\ & + \sin w_2 \cos w_1 \cos w_3 \cos w_4 \\ & + \sin w_3 \cos w_1 \cos w_2 \cos w_4 \\ & + \sin w_4 \cos w_1 \cos w_2 \cos w_3 \\ & - \sin w_1 \sin w_2 \sin w_3 \cos w_4 \\ & - \sin w_1 \sin w_2 \sin w_4 \cos w_3 \\ & - \sin w_1 \sin w_3 \sin w_4 \cos w_2 \\ & - \sin w_2 \sin w_3 \sin w_4 \cos w_1\end{aligned}$$

Auf analogem Wege ergiebt sich:

$$\begin{aligned}\cos(w_1+w_2+w_3+w_4) = &-\sin w_1\sin w_2\cos w_3\cos w_4-\sin w_1\sin w_3\cos w_2\cos w_4\\ &-\sin w_1\sin w_4\cos w_2\cos w_3-\sin w_2\sin w_3\cos w_1\cos w_4\\ &-\sin w_2\sin w_4\cos w_1\cos w_3-\sin w_3\sin w_4\cos w_1\cos w_2\\ &+\sin w_1\sin w_2\sin w_3\sin w_4\\ &+\cos w_1\cos w_2\cos w_3\cos w_4\end{aligned}$$

Vorstehende Entwickelungen lassen das Bildungsgesetz der Ausdrücke für sin und cos einer beliebigen Winkelsumme bereits deutlich erkennen Es findet seinen Ausdruck in folgenden Formeln:

$$\begin{aligned}\text{I)}\quad \sin(w_1+w_2+w_3+w_4+\ldots+w_n) = &\Sigma(\sin w_1\cos w_2\cos w_3\ldots\cos w_n)\\ &-\Sigma(\sin w_1\sin w_2\sin w_3\cos w_4\cos w_5\ldots\cos w_n)\\ &+\Sigma(\sin w_1\sin w_2\ldots\sin w_5\cos w_6\cos w_7\ldots\cos w_n)\\ &-\Sigma(\sin w_1\sin w_2\ldots\sin w_7\cos w_8\cos w_9\ldots\cos w_n)\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{II)}\quad \cos(w_1+w_2+w_4+\ldots+w_n) = &-\Sigma(\sin w_1\sin w_2\cos w_3\cos w_4\ldots\cos w_n)\\ &+\Sigma(\sin w_1\sin w_2\sin w_3\sin w_4\cos w_5\ldots\cos w_n)\\ &-\Sigma(\sin w_1\sin w_2\ldots\sin w_6\cos w_7\ldots\cos w_n)\\ &+\Sigma(\sin w_1\sin w_2\ldots\sin w_8\cos w_9\ldots\cos w_n)\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &+\cos w_1\cos w_2\cos w_3\ldots\cos w_n\end{aligned}$$

Was das Zeichen Σ in dieser unendlichen Productensumme betrifft, so bedeutet z. B. $\Sigma(\sin w_1\sin w_2\sin w_3\cos w_4\ldots\cos w_n)$: Summe aller möglichen, von einander verschiedenen Producte aus den Sinus je dreier Winkel mal den Cosinus der übrigen. Die Anzahl der so sich ergebenden Summanden unter dem Σ-Zeichen ist demnach gleich der Zahl der Combinationen von n Elementen (Indices) zu je 3 ohne Wiederholung, nämlich in I) $\binom{n}{1}$, $\binom{n}{3}$, ... in II) $\binom{n}{2}$, $\binom{n}{4}$, ...

Durch Gleichsetzung der Winkel:

$$w_1 = w_2 = w_3 = \ldots = w_n = w$$

entstehen aus I) und II) die bekannten Reihen für sin und cos der vielfachen Bögen, nämlich:

III) $$\sin nw = \Sigma(\sin w \cos^{n-1} w) - \Sigma(\sin^3 w \cos^{n-3} w) + \Sigma(\sin^5 w \cos^{n-5} w) - \ldots$$

oder

$$\sin nw = n \sin w \cos^{n-1} w - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} \sin^3 w \cos^{n-3} w + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1.2.3.4.5} \sin^5 w \cos^{n-5} w - \ldots$$

und

IV) $$\cos nw = \cos^n w - \Sigma(\sin^2 w \cos^{n-2} w) + \Sigma(\sin^4 w \cos^{n-4} w) - \ldots$$

oder

$$\cos nw = \cos^n w - \frac{n(n-1)}{1.2} \sin^2 w \cos^{n-2} w + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4} \sin^4 w \cos^{n-4} w - \ldots$$

Dieselben sind hiernach erhalten, ohne dass auf die Moivre'sche Binomialformel recurrirt wurde.

$w_1, w_2, w_3 \ldots w_n$ mögen jetzt die Umfangswinkel eines Polygons (n-Ecks) bedeuten. Dann ist wegen Σw_1 oder $w_1 + w_2 + w_3 + \ldots + w_n = (2n-4)R$:

$$\sin(\Sigma w_1) = 0 \quad \text{und}$$
$$\cos(\Sigma w_1) = (-1)^n$$

Anstatt der hiermit aus I) und II) sofort sich ergebenden Relationen für die Winkel eines beliebigen Vielecks, sollen hier einige, andere Beziehungen aufgesucht werden, welche sich als Erweiterungen der bekannten Formeln

$$\sin 2w_1 + \sin 2w_2 + \sin 2w_3 = 4 \sin w_1 \sin w_2 \sin w_3$$

und

$$\cos 2w_1 + \cos 2w_2 + \cos 2w_3 = -1 - 4 \cos w_1 \cos w_2 \cos w_3$$

für's Dreieck darstellen.

Die erstere dieser beiden Formeln wird bekanntlich erhalten, indem man in dem obigen Ausdruck für $\sin(w_1 + w_2 + w_3)$ successive w_1, w_2 und w_3 negativ nimmt und die so entstehenden Gleichungen zur ursprünglichen addirt, nachdem die letztere beiderseits des Zeichens = mit -1 multiplicirt worden. Eine Erweiterung dieses Verfahrens besteht nun darin, dass man sich für das Viereck, Fünfeck u. s. f., allgemein für das n-Eck der bezüglichen Factoren -2, $-3, \ldots -(n-2)$ bedient, im übrigen aber genau wie beim Dreieck operirt. Wir setzen also in Formel I) die Bögen der Reihe nach negativ und addiren die so erhaltenen n Gleichungen. Die

linken Seiten derselben lassen sich sofort auf die Form $\sin[(2n-4)R - 2w_i]$ bringen, wenn i den Repräsentanten der Winkelindices: 1, 2, 3 ... n vorstellt. Auf der rechten Seite jeder dieser Gleichungen ändern nur diejenigen Glieder das Vorzeichen, welche den sin des negativ gesetzten Winkels w_i enthalten. Die Glieder mit $\cos w_i$ bleiben ungeändert. Da nun $\sin[(2n-4)R - 2w_i]$ für $n = 3, 5, 7$ ... positiv, für $n = 4, 6, 8$ ... aber negativ wird, so lässt sich allgemein dafür schreiben: $(-1)^{n\pm1} \sin 2w_i$. Zur Summe $(-1)^{n\pm1}[\sin 2w_1 + \sin 2w_2 + \ldots + \sin 2w_i + \ldots + \sin 2w_n]$ oder kürzer: $(-1)^{n\pm1}\Sigma(\sin 2w_1)$ fügen wir ferner noch das $-(n-2)$ fache von Gleichung I) hinzu. Da die linke Seite derselben gleich null, so wird der vorige Summenausdruck dadurch nicht geändert. — Jedes Glied der Summe $\Sigma(\sin w_1 \cos w_2 \ldots \cos w_n)$, Formel I), besteht aus $n-1$ cos-Factoren und nur einem sin-Factor. Es findet also in Folge der Setzung $-w_i$ statt w_i (während i alle Werte von 1 bis n durchläuft) nur ein Zeichenwechsel statt, und es erscheint sonach jedes Glied von $\Sigma(\sin w_1 \cos w_2 \ldots \cos w_n)$ und folglich dieser Ausdruck selbst $n-1$ mal mit dem $+$ und 1 mal mit dem $-$ Zeichen behaftet. Dazu kommt noch das $-(n-2)$ fache eines jeden Gliedes. Der in Rede stehende Ausdruck Σ tritt also im Ganzen $(n-1)-1-(n-2)$ mal auf, d. h. er verschwindet ganz. Jedes der negativen Glieder von $-\Sigma(\sin w_1 \sin w_2 \sin w_3 \cos w_4 \ldots \cos w_n)$ und folglich dieser Ausdruck selbst, kann, wenn successive $w_1, w_2, w_3 \ldots w_n$ negativ genommen wird, nur 3 mal sein Zeichen ändern. Er tritt also $n-3$ mal unverändert und 3 mal mit entgegengesetztem Vorzeichen, zusammen $(n-3)-3$ mal auf. Jedes der $\binom{n}{3}$ Glieder des Ausdrucks Σ wird ausserdem noch $n-2$ mal mit geändertem Vorzeichen hinzugefügt, so dass der Ausdruck $+\Sigma(\sin w_1 \sin w_2 \sin w_3 \cos w_4 \ldots \cos w_n)$ im ganzen $3-(n-3)+(n-2)$ mal, d. h. 4 mal vorkommt. Besitzen die Glieder eines Summanden Σ in Formel I) allgemein ν Sinus- und $n-\nu$ Cosinus-Factoren, so werden jene, den vorstehenden Betrachtungen gemäss, im ganzen $\nu-(n-\nu)+(n-2)$ mal, d. h. $2\nu-2$ oder $2(\nu-1)$ mal mit dem ihrem ursprünglichen entgegengesetzten Vorzeichen auftreten. Dasselbe gilt folglich auch von dem ganzen Ausdruck Σ. Die vorstehend beschriebene Summation ergiebt demgemäss das Resultat:

$$
\begin{aligned}
\text{V)}\quad (-1)^{n\pm1}\Sigma(\sin 2w_1) = {} & 4\Sigma(\sin w_1 \sin w_2 \sin w_3 \cos w_4 \ldots \cos w_n) \\
& -8\Sigma(\sin w_1 \sin w_2 \ldots \sin w_5 \cos w_6 \ldots \cos w_n) \\
& +12\Sigma(\sin w_1 \sin w_2 \ldots \sin w_7 \cos w_8 \ldots \cos w_n) \\
& -16\Sigma(\sin w_1 \sin w_2 \ldots \sin w_9 \cos w_{10} \ldots \cos w_n) \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

$$= 4\{1\Sigma(\sin w_1 \sin w_2 \sin w_3 \cos w_4 \ldots \cos w_n)$$
$$-2\Sigma(\sin w_1 \ldots \sin w_5 \cos w_6 \ldots \cos w_n)$$
$$+3\Sigma(\sin w_1 \ldots \sin w_7 \cos w_8 \ldots \cos w_n)$$
$$-4\Sigma(\sin w_1 \ldots \sin w_9 \cos w_{10} \ldots \cos w_n)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\}$$

Für ungerade Werte von n bricht diese fortlaufende Summe mit einem Gliede ab, welches nur aus einem einzigen Sinusproduct besteht. Für $n = 3$, also $w_4 = w_5 = \ldots = 0$ und folglich $\cos w_4 = \cos w_5 = \ldots = 1$, $\sin w_4 = \sin w_5 = \ldots = 0$ folgt z. B. $+1\Sigma(\sin w_1) = 4\sin w_2 \sin w_2 \sin w_3$. Die andere Relation zwischen den Dreiecks-winkeln: $\cos 2w_1 + \cos 2w_2 + \cos 2w_3 = -1 - 4\cos w_1 \cos w_2 \cos w_3$ wird erhalten, wenn man in der Formel für $\Sigma(\cos w_1)$ successive w_1, w_2, w_3 negativ setzt und die so erhaltenen drei Gleichungen zu den vorigen einfach addirt. Zum Viereck, Fünfeck, Sechseck ... n-Eck fortschreitend, bringen wir statt $+1$ die Factoren 0, -1, -2 ... $-(n-4)$ zur Anwendung. Im Uebrigen verfahren wir wie beim Dreieck. Das Summenglied $\Sigma(\sin w_1 \sin w_2 \cos w_3 \cos w_4 \ldots \cos w_n)$ fällt in Folge der besonderen Wahl jener Factoren in allen Fällen aus. Man findet auf dem angedeuteten Wege leicht:

VI) $$-(n-4)(-1)^n + (-1)^n \Sigma(\cos 2w_1) = 4\cos w_1 \cos w_2 \cos w_3 \ldots \cos w_n$$
$$-4\Sigma(\sin w_1 \sin w_2 \sin w_3 \sin w_4 \cos w_5 \ldots \cos w_n)$$
$$+8\Sigma(\sin w_1 \sin w_2 \ldots \sin w_6 \cos w_7 \ldots \cos w_n)$$
$$-12\Sigma(\sin w_1 \sin w_2 \ldots \sin w_8 \cos w_9 \ldots \cos w_n)$$
$$+16\Sigma(\sin w_1 \sin w_2 \ldots \sin w_{10} \cos w_{11} \ldots \cos w_n)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$= 4\cos w_1 \cos w_2 \cos w_3 \ldots \cos w_n$$
$$-4\{1\Sigma(\sin w_1 \ldots \sin w_4 \cos w_5 \ldots \cos w_n)$$
$$-2\Sigma(\sin w_1 \ldots \sin w_6 \cos w_7 \ldots \cos w_n)$$
$$+3\Sigma(\sin w_1 \ldots \sin w_8 \cos w_9 \ldots \cos w_n)$$
$$-4\Sigma(\sin w_1 \ldots \sin w_{10} \cos w_{11} \ldots \cos w_n)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\}$$

Bei geradem n bricht diese fortlaufende Summe mit einem Product aus n Sinus-Factoren ab. Das vierfache Cosinus-Product erscheint unter allen Umständen.

Das Bildungsgesetz für die trigonometrische Tangente einer beliebigen Winkelsumme leiten wir durch Induction von

$$\operatorname{tg}(w_1+w_2)=\frac{\operatorname{tg}w_1+\operatorname{tg}w_2}{1-\operatorname{tg}w_1\operatorname{tg}w_2}$$

aus ab. Zunächst folgt:

$$\operatorname{tg}(w_1+w_2+w_3)=\frac{\operatorname{tg}(w_1+w_2)+\operatorname{tg}w_3}{1-\operatorname{tg}(w_1+w_2)\operatorname{tg}w_3}$$

oder

$$\operatorname{tg}(w_1+w_2+w_3)=\frac{\operatorname{tg}w_1+\operatorname{tg}w_2+\operatorname{tg}w_3-\operatorname{tg}w_1\operatorname{tg}w_2\operatorname{tg}w_3}{1-\operatorname{tg}w_1\operatorname{tg}w_2-\operatorname{tg}w_1\operatorname{tg}w_3-\operatorname{tg}w_2\operatorname{tg}w_3}$$

und endlich allgemein für n Winkel:

VII)
$$\operatorname{tg}(w_1+w_2+w_3+w_4+\ldots+w_n)=\frac{\Sigma\binom{n}{1}(\operatorname{tg}w_1)-\Sigma\binom{n}{3}(\operatorname{tg}w_1\operatorname{tg}w_2\operatorname{tg}w_3)+\Sigma\binom{n}{5}(\operatorname{tg}w_1\operatorname{tg}w_2\operatorname{tg}w_3\operatorname{tg}w_4\operatorname{tg}w_5)-\ldots}{1-\Sigma\binom{n}{2}(\operatorname{tg}w_1\operatorname{tg}w_2)+\Sigma\binom{n}{4}(\operatorname{tg}w_1\operatorname{tg}w_2\operatorname{tg}w_3\operatorname{tg}w_4)-\ldots}$$

Für $\operatorname{cotg}(\Sigma w_1)$ gilt der reciproke Ausdruck.

Formel VII) reducirt sich für $w_1=w_2=\ldots w_n=w$ auf folgenden für die tang des n-fachen Winkels giltigen Quotienten zweier unendlichen Reihen:

VIII)
$$\operatorname{tg}nw=\frac{n\operatorname{tg}w-\binom{n}{3}\operatorname{tg}^3w+\binom{n}{5}\operatorname{tg}^5w-\ldots}{1-\binom{n}{2}\operatorname{tg}^2w+\binom{n}{4}\operatorname{tg}^4w-\ldots}$$

Für $\operatorname{cotg}nw$ gilt der umgekehrte Ausdruck.

Bedeuten jetzt w_1. w_2, w_3 ... w_n die Winkel am Umfang eines n-Ecks, dann ist $\operatorname{tg}(\Sigma w_1)=\operatorname{tg}(2n-4)\,\mathrm{R}=0$ und die Formel VII) geht in die folgende über:

IX)
$$0=\Sigma\binom{n}{1}(\operatorname{tg}w_1)-\Sigma\binom{n}{3}(\operatorname{tg}w_1\operatorname{tg}w_2\operatorname{tg}w_3)+\Sigma\binom{n}{5}(\operatorname{tg}w_1\operatorname{tg}w_2\operatorname{tg}w_3\operatorname{tg}w_4\operatorname{tg}w_5-\ldots$$

Dieselbe liefert ihrerseits wieder in dem speciellen Fall, dass $w_4=w_5=\ldots=0$, die bekannte Relation zwischen den trigonometrischen Tangenten der Dreieckswinkel:

$$\operatorname{tg}w_1+\operatorname{tg}w_2+\operatorname{tg}w_3=\operatorname{tg}w_1\operatorname{tg}w_2\operatorname{tg}w_3$$

Zwischen den Tangenten der Viereckswinkel besteht die entsprechende Beziehung:

$$\operatorname{tg} w_1 + \operatorname{tg} w_2 + \operatorname{tg} w_3 + \operatorname{tg} w_4 = \operatorname{tg} w_1 \operatorname{tg} w_2 \operatorname{tg} w_3 + \operatorname{tg} w_1 \operatorname{tg} w_2 \operatorname{tg} w_4 + \operatorname{tg} w_1 \operatorname{tg} w_3 \operatorname{tg} w_4 + \operatorname{tg} w_2 \operatorname{tg} w_3 \operatorname{tg} w_4$$

Formel IX) ist übrigens auch aus der auf Polygonwinkel angewandten Formel I) durch Division mit $\cos w_1 \cos w_2 \ldots \cos w_n$ ableitbar.

Für die cotg einer beliebigen Winkelsumme gilt die Formel:

$$\text{X)}\quad \operatorname{cotg}(w_1 + w_2 + w_3 + w_4 + \ldots + w_n) = \frac{\Sigma}{\binom{n}{1}} (\operatorname{cotg} w_1) - \frac{\Sigma}{\binom{n}{3}} (\operatorname{cot} w_1 \operatorname{cotg} w_2 \operatorname{cotg} w_3) + \frac{\Sigma}{\binom{n}{5}} (\operatorname{cotg} w_1 \operatorname{cotg} w_2 \operatorname{cotg} w_3 \operatorname{cotg} w_4 \operatorname{cotg} w_5) - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$: 1 - \frac{\Sigma}{\binom{n}{2}} (\operatorname{cotg} w_1 \operatorname{cotg} w_2) + \frac{\Sigma}{\binom{n}{4}} (\operatorname{cotg} w_1 \operatorname{cotg} w_2 \ldots \operatorname{cotg} w_4) - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Beträgt die Zahl der Winkel beispielsweise 3 und gehören dieselben einem Dreieck an, so folgt aus X), da $\operatorname{cotg}(2R) = \infty$, folglich der Nenner gleich null wird,

$$\frac{\Sigma}{\binom{3}{2}} (\operatorname{cotg} w_1 \operatorname{cotg} w_2) = 1 \quad \text{oder}$$

$$\operatorname{cotg} w_1 \operatorname{cotg} w_2 + \operatorname{cotg} w_1 \operatorname{cotg} w_3 + \operatorname{cotg} w_2 \operatorname{cotg} w_3 = 1$$

Diese Formel ist jedoch identisch mit

$$\frac{\Sigma}{\binom{3}{1}} (\operatorname{tg} w_1) = \operatorname{tg} w_1 \operatorname{tg} w_2 \operatorname{tg} w_3$$

Schliesslich sei noch bemerkt, dass die letztere Formel, je nachdem man beide Seiten derselben mit $\operatorname{cotg} w_2 \operatorname{cotg} w_3$, $\operatorname{cotg} w_1 \operatorname{cotg} w_3$ oder $\operatorname{cotg} w_1 \operatorname{cotg} w_2$ multiplicirt, auch auf eine der drei Formen:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} w_1 - \operatorname{cotg} w_2 - \operatorname{cotg} w_3 &= \operatorname{tg} w_1 \operatorname{cotg} w_2 \operatorname{cotg} w_3, \\ -\operatorname{cotg} w_1 + \operatorname{tg} w_2 - \operatorname{cotg} w_3 &= \operatorname{cotg} w_1 \operatorname{tg} w_2 \operatorname{cotg} w_3, \\ -\operatorname{cotg} w_1 - \operatorname{cotg} w_2 + \operatorname{tg} w_3 &= \operatorname{cotg} w_1 \operatorname{cotg} w_2 \operatorname{tg} w_3 \end{aligned}$$

gebracht werden kann.

VI.

Die elliptischen Integrale der Bewegung eines schweren Punktes in der verticalen Parabel.

Von

Emil Oekinghaus.

Die Verwandtschaft der Curven kann dazu benutzt werden, in dynamischem Sinne die Bewegungsverhältnisse eines Punkes auf die Bewegung eines zweiten in der verwandten Curve zu beziehen.

Wir werden im Folgenden die Bewegung eines schweren Punktes in einer verticalen Parabel analytisch verfolgen und die daraus entspringenden Zeitintegrale mit denjenigen identificiren, auf welchen die Rectification der Ellipse und Hyperbel beruht.

1.

Wir nehmen zunächst an, dass die Achse der Parabel vertical nach oben gerichtet sei und erteilen im Scheitel der Parabel dem schweren Punkte eine Geschwindigkeit v_0, welche der Geschwindigkeitshöhe h entspricht. Demnach ist

$$v_0^2 = 2gh$$

Nach Verlauf der Zeit t habe der Ort des Punktes die Abscisse x, die Geschwindigkeit wird dann durch

$$v^2 = 2g(h-x)$$

bestimmt. Führen wir den Polarwinkel θ ein, so ist, wie vermittelst der Polargleichung gefunden wird,

$$x = q \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\theta^2,$$
$$y = 2q \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\theta,$$
$$r = \frac{q}{\cos\tfrac{1}{2}\theta}$$

Für die Grenzlage ist demnach

$$h = q \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\beta^2$$

Da nun $v = \frac{ds}{dt}$ und also die Zeit der Bewegung durch $t = \int \frac{ds}{v}$ gefunden wird, so muss zunächst das Differential des Parabelbogens s durch θ ausgedrückt werden, man findet

$$ds = p \frac{d\tfrac{1}{2}\theta}{\cos\tfrac{1}{2}\theta^3}$$

Substituirt man nun noch in v den oben abgeleiteten Wert von x, so gewinnt man schliesslich das Integral

$$t = \int \frac{p d\tfrac{1}{2}\theta}{\cos\tfrac{1}{2}\theta^2 \sqrt{2g(h-(h+q)\sin\tfrac{1}{2}\theta^2)}}$$

Zu diesem Integral gelangt man nun auch auf folgendem Wege. In einer Ellipse $\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1$ wählen wir einen Punkt derart, dass seine beiden Brennstralen einen Winkel θ, also den Polarwinkel der Parabel einschliessen. Bemerkt man nun, dass der Bogen S der Ellipse durch

$$S = A \int \sqrt{1 - \frac{C^2}{A^2} \sin\varphi^2}\, d\varphi$$

bestimmt wird, dass φ der bekannte excentrische Winkel ist, welcher, wie leicht nachzuweisen, vermittelst der Relation

$$\cos\varphi = \frac{B}{C} \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\theta$$

durch θ ausgedrückt werden kann, so führt die Einführung von θ auf ein Integral von der Form

$$s = \int \frac{B^2 d\tfrac{1}{2}\theta}{\cos\tfrac{1}{2}\theta^2 \sqrt{C^2 - A^2 \sin\tfrac{1}{2}\theta^2}}$$

welches mit dem obigen Zeitintegral in Uebereinstimmung gebracht werden kann. Wählt man den Bogen von der grossen Achse an, so entspricht der Bogen S der Zeit t, welche vom Scheitelpunkt der Parabel an gezählt ist.

Soll demnach die Zeit t des durchlaufenen Parabelbogens proportional durch einen Bogen s einer bestimmten Ellipse dargestellt werden, so sind folgende Bedingungen erforderlich

$$\int \frac{d\frac{1}{2}\theta}{\cos\frac{1}{2}\theta^2\sqrt{1-\frac{h+q}{h}\sin\frac{1}{2}\theta^2}} = \int \frac{d\frac{1}{2}\theta}{\cos\frac{1}{2}\theta^2\sqrt{1-\frac{A^2}{C^2}\sin\frac{1}{2}\theta^2}}$$

$$\frac{h+q}{h} = \frac{A^2}{C^2}$$

Aus der zweiten folgt demnach

$$\frac{q}{h} = \frac{B^2}{C^2} = \operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}\beta^2$$

wonach der aus $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\beta = \frac{C}{B}$ folgende Winkel zwischen den Brennlinien vom Scheitelpunkte der kleinen Achse, also β, dem Polarwinkel des höchsten Punktes der Parabel, oder der Geschwindigkeitshöhe h entspricht.

In Folge des Obigen findet man die Zeit der Bewegung aus der Relation

$$t = \frac{S}{C}\sqrt{\frac{2h}{g}}$$

so dass für zwei Phasen

$$t : t' = S : S'$$

die entsprechenden Zeiten sich verhalten wie die bezüglichen Ellipsenbogen. Für den senkrechten Fall aus der Höhe h folgt die Zeit τ aus $h = \frac{1}{2}g\tau^2$, demnach gibt hiernach die letzte Formel die Relation

$$\frac{t}{\tau} = \frac{S}{C}.$$

Die Fallzeit in der Parabel verhält sich zur Fallzeit in der Geschwindigkeitshöhe h wie der dem Polar- und Focalwinkel θ entsprechende Ellipsenbogen zur Excentricität.

Setzt man einfach

$$C = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \frac{v_0}{g} = \tau$$

so ist der Ellipsenbogen S selbst das Mass der vom Scheitel der Parabel an verflossenen Zeit.

Führt man dagegen in der allgemeinern Formel

$$S = \frac{C}{\sqrt{\frac{2h}{g}}}.t = ct$$

die mittlere Geschwindigkeit c ein, so folgt, wenn man die Excentricität der Ellipse gleich der doppelten Geschwindigkeitshöhe, also $C = 2h$ annimmt,

$$c = v_0$$

Mit der Bewegung eines Punktes in der Parabel, deren Achse vertical nach oben gerichtet ist, steht demnach eine entsprechende gleichförmige Bewegung eines andern Punktes in einer Ellipse derart in Wechselbeziehung, dass der Polarwinkel des Punktes in der Parabel zu jeder Zeit dem Focalwinkel des bezüglichen in der Ellipse gleich ist, vorausgesetzt, dass der Polarwinkel β des äussersten Punktes vermittelst der Relation

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\beta = \frac{C}{B}$$

die Achsenverhältnisse der Ellipse definirt.

Da $v^2 = 2g(h - q \operatorname{tg}^2 \tfrac{1}{2}\theta^2) = 2gh\left(1 - \frac{B^2}{C^2} \operatorname{tg}^2 \tfrac{1}{2}\theta^2\right) = 2gh \sin \varphi^2$ ist, so ergibt sich aus

$$v = v_0 \sin \varphi = v_0 \frac{X}{A}$$

der Satz, dass die Geschwindigkeit in den verschiedenen Parabelpunkten den Abscissen der entsprechenden Ellipsenpunkte proportional ist.

Ueberträgt man demnach in dem entwickelten Sinne die gleichförmige Bewegung eines Punktes in der Ellipse auf die Parabel in der gedachten Lage, so erhält man die Fallbewegung in derselben. Die periodische Bewegung des schweren Punktes in letzterer wird demnach durch das Durchlaufen eines zweiten Punktes in der erstern klar veranschaulicht. Je grösser die erteilte Anfangsgeschwindigkeit v_0 ist, um so grösser wird β, und um so gestreckter wird die Ellipse, bis sie bei unendlich wachsendem v zu einer Geraden degenerirt. Dagegen nähert sich bei abnehmender Geschwindigkeit die Ellipse der Kreisform.

II.

Wir nehmen ferner an, dass die Achse der Parabel normal nach unten gerichtet sei.

Die Anfangsgeschwindigkeit im Scheitelpunkt sei v_0, die der Abscisse x entsprechende Geschwindigkeit wird bestimmt durch die Formel

$$v^2 = v_0^2 + 2gx$$

Die Substitutionen sind wie vorhin einzuführen, so dass das Zeitintegral durch

$$t = \int \frac{p d\frac{1}{2}\theta}{\cos\frac{1}{2}\theta^2 \sqrt{2g\,(h-(h-q)\sin\frac{1}{2}\theta^2)}}$$

definirt ist. Hierin bedeutet h die der Geschwindigkeit v_0 entsprechende Höhe.

Es kommt nun darauf an, dieses Integral auf anderm Wege abzuleiten.

In einer Hyperbel $\frac{x^2}{A^2} - \frac{y^2}{B^2} = 1$ bestimmen wir einen Punkt der Art, dass die Focallinien einen Winkel $180^0 - \theta$ mit einander einschliessen, welcher dem Polarwinkel θ der Parabel entspricht.

Beachten wir nun, dass bei der Rectification der Hyperbel ein Winkel φ vorkommt, der durch die Formel $\frac{A}{X} = \cos\varphi$ bekannt ist, und dass auch hier die Relation

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{B}{C}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\theta$$

gilt, so kann das Bogenintegral

$$S = A\int \sqrt{\frac{C^2}{A^2} - \cos\varphi^2}\,\sec\varphi^2\, d\varphi$$

durch Einführung der Amplitude θ in das folgende umgeformt werden:

$$S = B^2 \int \frac{d\frac{1}{2}\theta}{\cos\frac{1}{2}\theta^2 \sqrt{C^2 - A^2\sin\frac{1}{2}\theta^2}}$$

Dieses Integral ist dem obigen für die Parabel analog.

Soll demnach die Zeit t des vom Punkte durchlaufenen Parabelbogens proportional dem Bogen S einer bestimmten Hyperbel sein, so sind die folgenden Bedingungen erforderlich

$$\int \frac{d\frac{1}{2}\theta}{\cos\frac{1}{2}\theta^2 \sqrt{1 - \frac{h-q}{h}\sin\frac{1}{2}\theta^2}} = \int \frac{d\frac{1}{2}\theta}{\cos\frac{1}{2}\theta^2 \sqrt{1 - \frac{A^2}{C^2}\sin\frac{1}{2}\theta^2}},$$

$$\frac{h-q}{h} = \frac{A^2}{C^2}$$

Aus der zweiten folgt demnach wegen $C^2 = A^2 + B^2$

$$\frac{h}{q} = \frac{B^2}{C^2} = \cot\tfrac{1}{2}\beta^2$$

Hieraus ergeben sich die Achsenverhältnisse der Hyperbel, wonach jeder Geschwindigkeitshöhe h eine bestimmte Hyperbel entspricht, falls $h > q$, und der Punkt gezwungen ist, die Curve nicht zu verlassen.

Trägt man auf der kleinen Halbachse die Strecke B auf und zieht die Focallinien, so schliessen diese einen Winkel β ein, welcher gleich dem Polarwinkel β der Parabel ist, letzterer entspricht der Höhe h für die Anfangsgeschwindigkeit v_0.

Die Zeit des durchlaufenen Parabelbogens ist dem Bogen S der Hyperbel proportional, wenn der Polarwinkel gleich dem Focalwinkel ist. Man hat dann wie bei der Ellipse

$$t = \frac{S}{C}\sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Für die der freien Fallbewegung in h entsprechende Zeit τ folgt aus der letzten Formel

$$\frac{t}{\tau} = \frac{S}{C}$$

Bewegt sich demnach ein Punkt vom Scheitelpunkt einer Hyperbel aus in gleichförmiger Bewegung, so ist mit dieser eine beschleunigte eines schweren Punktes in einer Parabel verknüpft, und zwar so, dass der Focalwinkel der Hyperbel dem Polarwinkel der Parabel gleich ist. Wie man sieht, geht die Bewegung in's Unendliche fort.

Da $S = \frac{C}{\sqrt{\frac{2h}{g}}} . t$ ist, so führen wir ein $c = \frac{C}{\sqrt{\frac{2h}{g}}}$.

Die gleichförmige Geschwindigkeit in der Hyperbel ist demnach $= c$. Setzen wir die Excentricität gleich $2h$, so folgt $c = v_0$, wonach bei der Hyperbel die constante Geschwindigkeit mit derjenigen im Scheitel der Parabel übereinstimmt. Je kleiner diese ist, um so grösser wird wegen $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\beta = \frac{C}{B}$ der Asymptotenwinkel und um so steiler die Curve. Bei grösserer Geschwindigkeit dagegen wird der Winkel kleiner, und die Hyperbel degenerirt zu zwei in der Abscissenachse liegenden Geraden. In beiden Fällen nehmen wir die Excentricität C als constant an.

Die Geschwindigkeit wird durch die Formel

$$v^2 = 2gh\left(1 + \frac{B^2}{C^2}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\theta^2\right)$$

also wegen bekannter Beziehungen durch

$$v = \frac{v_0}{\cos\varphi} = \frac{v_0}{A} \cdot x$$

bestimmt. Sie ist demnach der Hyperbelabscisse x proportional und wächst mit der Zeit in's Unendliche.

Man wird schon bemerkt haben, dass die Bewegung eines Punktes in der Parabel mit nach unter gerichteter Achse auf besondere Grenzfälle stösst, die einer Untersuchung bedürfen, da der Modulus des elliptischen Integral grösser, kleiner und gleich null gesetzt werden kann. Im letztern Fall ist $h = q$, oder die Geschwindigkeitshöhe wird zur Focaldistanz der Parabel und damit wird die Bewegung die freie der Wurfbewegung im leeren Raume.

Für diesen Fall müssen wir sehen, was aus unserer Hyperbel wird. Da der betreffende Polarwinkel der Parabel $= 90^0$ und demnach $C = B$ wird, so geht die Hyperbel in die Ordinatenachse über. Der Wurfbewegung entspricht demnach eine gleichförmige Bewegung in einer Geraden, welche man in entgegengesetzter Richtung mit der Achse der Parabel in gleicher Lage annehmen kann. Die Ordinaten des Brennpunktes schneiden die Parabel in den Brennpunkten dieser Grenzhyperbel. Auch ist der Focalwinkel in jedem Punkte dieser Geraden gleich dem Polarwinkel der genannten Bewegung in der Parabel. Da wegen $h = q$ die Excentricität gleich $2h = 2q$ ist, so ist die gleichförmige Bewegung in der Geraden gleich der Geschwindigkeit ein Scheitel der Bahn.

Hinsichtlich der Wurfbewegung bemerken wir noch, dass die Schnittpunkte der Parabelachse mit den Tangenten, welche durch die aufeinander folgenden von dem geworfenen Körper durcheilten Parabelpunkte gezogen werden, sich nach oben in einer der Fallbewegung entsprechenden Art bewegen.

Denn die Geschwindigkeit in der Parabelachse wird durch

$$c = p \frac{\sin\frac{1}{2}\theta}{\cos\frac{1}{2}\theta^2} \cdot \frac{d\theta}{dt}$$

in der Parabel durch

$$v = \frac{p}{\cos\frac{1}{2}\theta^3} \cdot \frac{d\theta}{dt}$$

ausgedrückt, woraus

$$\frac{c}{v} = \sin\tfrac{1}{2}\theta$$

also

$$\frac{c^2}{v^2} = \frac{2g(r-q)}{2gr}$$

und damit das genannte Gesetz folgt.

Wir haben hiermit die Fälle $h \gtreqless q$ erledigt, damit ist auch die Verwendung der Hyperbel erschöpft, da alle Verhältnisse und Lagen derselben innerhalb der obigen Grenzbedingungen enthalten sind. Die Frage ist demnach, zu welcher Curve die Bewegung hinüberführt, wenn $h < q$ ist. Ist demnach die Geschwindigkeitshöhe h der Anfangsbewegung im Scheitel der Parabel zwischen 0 und der Focaldistanz q enthalten, so besteht die Untersuchung darin, eine Curve zu suchen, welche, von einem Punkte gleichförmig durchlaufen der Parabelbewegung entspricht. Zugleich muss dieselbe der Integralgleichung Genüge tun.

Dieselbe ist

$$t = \int \frac{p\, d\tfrac{1}{2}\theta}{\cos\tfrac{1}{2}\theta^2 \sqrt{2g\,(h + (q-h)\sin\tfrac{1}{2}\theta^2)}}$$

oder

$$t = \int \frac{\sqrt{\frac{p}{g}}}{\sin\tfrac{1}{2}\theta'^2} \frac{d\tfrac{1}{2}\theta'}{\sqrt{1 - \frac{q-h}{q}\sin\tfrac{1}{2}\theta'^2}} \qquad \theta + \theta' = 180^0$$

Um nun die Curve aufzusuchen, deren Bogen durch ein solches Integral definirt ist, schreiben wir abgekürzt

$$s = \int \frac{a\, d\varphi}{\sin\varphi^2 \sqrt{1 - k^2 \sin\varphi^2}}$$

Da nun

$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$

so folgt

$$dx^2 + dy^2 = \frac{a^2 d\varphi^2}{\sin\varphi^4 (1 - k^2 \sin\varphi^2)}$$

Wir führen ein

$$x = a \operatorname{cotg} \varphi,$$

$$dx = -\frac{a\, d\varphi}{\sin\varphi^2}$$

wodurch

$$dy = \frac{ak\, d\varphi}{\sin\varphi \sqrt{1 - k^2 \sin\varphi^2}}$$

oder

$$dy = \frac{ka\, dx}{\sqrt{a^2 k'^2 + x^2}}$$

Die Integration ergibt

$$y = ak \log (x + \sqrt{a^2 k'^2 + x^2}) + \text{Const}$$

als Gleichung der gesuchten Curve.

Der Einfachheit wegen nehmen wir die Constante so, dass y für $x = 0$ verschwindet. Man hat also definitiv die transcendente Curve

$$y = ak \log \frac{x + \sqrt{a^2 k'^2 + x^2}}{ak'}$$

Diese Gleichung genügt der oben ausgesprochenen Bedingung.

Denn differentirt man sie und setzt in

$$s = \int \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

den gefundenen Differentialquotienten ein, so resultirt, wenn $x = \cot\varphi$ gesetzt wird, die obige Integralformel für s.

Aus der Identität beider Integrale folgt für $\varphi = \frac{1}{2}\theta' = 90^0 - \frac{1}{2}\theta$

$$\frac{s}{a} = \frac{t}{\sqrt{\frac{p}{g}}}.$$

Die zur Geschwindigkeitshöhe als Abscisse gehörende Ordinate sei a, dann ist $a^2 = 2ph$, weshalb die letzte Formel in die Relation

$$s = v_0 t \quad \text{übergeht.}$$

Der in der Curve mit dem Parabelpunkt correspondirende Punkt beschreibt die Curve mit gleichförmiger Geschwindigkeit v_0, welche der Geschwindigkeit im Scheitel der Parabel gleich ist.

Die Abscisse in der ersteren wird stets durch $x' = a \operatorname{tg} \frac{1}{2}\theta$ ausgedrückt, so dass, da $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\theta = \frac{y}{p}$, $\frac{x'}{a} = \frac{y}{p}$, x' stets der Ordinate des bezüglichen Parabelpunktes proportional ist.

Man kann noch die oben abgeleitete Gleichung mit der Kettenlinie in Beziehung bringen, wenn man x und y mit einander vertauscht. Wird $a = 1$ gesetzt, so findet man

$$\sqrt{k'^2 + \cot\varphi^2} + \cot\varphi = k' e^{\frac{x}{k}}$$

$$\sqrt{k'^2 + \cot\varphi^2} - \cot\varphi = k' e^{-\frac{x}{k}}$$

Durch Addition und Subtraction folgt hieraus

$$\frac{k}{2}\left(e^{\frac{x}{k}} + e^{-\frac{x}{k}}\right) = \frac{k}{k'}\sqrt{k'^2 + \cot\varphi^2} = x',$$

$$\frac{k}{2}\left(e^{\frac{x}{k}} - e^{-\frac{x}{k}}\right) = \frac{k}{k'}\cot\varphi = s'$$

Da der Bogen s' der Kettenlinie $= k\,\mathrm{tg}\,\delta$ ist, worin δ den Winkel der Tangente des bezüglichen Curvenpunktes mit der X-Achse darstellt, so folgt

$$\mathrm{cotg}\,\varphi = k'\mathrm{tg}\,\delta = x$$

Hieraus resultirt, wenn die Kettenlinie gegeben ist, eine leichte Construction der Curve, und zwar mit Hülfe der Tangente.

Wir bemerken noch, dass die Rectification der vorliegenden logarithmischen Curve auch durch das Integral

$$s = \int \frac{\sqrt{1 - k^2 \sin\delta^2}}{\cos\delta^2}\, d\delta = F(\delta) - E(\delta) + \Delta\,\mathrm{tg}\,\delta$$

formulirt werden kann. Berücksichtigen wir nun, dass der Bogen einer Hyperbel $\frac{x^2}{k^2} - \frac{y^2}{k'^2} = 1$ durch

$$s' = k'^2 F(\delta) - E(\delta) + \Delta\,\mathrm{tg}\,\delta$$

definirt wird, worin δ ein bekannter Winkel ist, so folgt durch Vergleichen der letzten Ausdrücke noch die Relation

$$s - s' = k^2 \int \frac{d\delta}{\sqrt{1 - k^2 \sin\delta^2}}$$

Die Differenz zweier einander entsprechenden Lagen der transcendenten Curve und der Hyperbel ist demnach durch ein elliptisches der ersten Art charakterisirt.

Wie aus den Entwickelungen hervorgegangen ist, sind die Bewegungsverhältnisse des schweren Punktes in einer Parabel je nach der Lage der letztern auf die Ellipse und die Hyperbel übertragbar.

Die Vermittelung beider Bewegungen ging aus der Uebereinstimmung der elliptischen Integrale hervor, zu welchen die Rectification der Kegelschnitte und die Zeitbestimmung der Bewegung geführt hatte. Wir werden später zeigen, dass auch die Newton'sche Centralbewegung eines in Kegelschnitten einhergehenden Punktes durch eine ihr verwandte andere dargestellt werden kann.

Emmerich, im Nov. 1884.

Anhang.

Wir geben hier noch einige Sätze über die Fusspunktcurven der Kegelschnitte.

Ausserhalb einer Ellipse ziehen wir durch einen Punkt $R(\psi)$ eine Secante, welche mit der X-Achse den Winkel τ einschliesst. Die Secantenteile seien $s_1 s_2$. Sie sind Wurzeln der Gleichung

$$s^2(a^2\sin\tau^2+b^2\cos\tau^2) - 2R(a^2\sin\tau\sin\psi+b^2\cos\tau\cos\psi)s + R^2(a^2\sin\psi^2+b^2\cos\psi^2) - a^2b^2 = 0$$

Soll die Secante zur Tangente werden, so müssen beide Wurzeln gleich sein:

$$t = \frac{a^2y\sin\tau+b^2x\cos\tau}{a^2\sin\tau^2+b^2\cos\tau^2}$$

und die Bedingungsgleichung hierfür ist:

$$(a^2y\sin\tau+bx\cos\tau)^2 = (a^2\sin\tau^2+b^2\cos\tau^2)(a^2y^2+b^2x^2-a^2b^2)$$

Aus diesen Beziehungen lässt sich eine Gleichung für t ableiten, wenn τ eliminirt wird. Man findet

$$a^2y\sqrt{a^2y^2+b^2x^2-a^2b^2-b^2t^2}+b^2x\sqrt{-a^2y^2-b^2x^2+a^2b^2+a^2t^2} = c(a^2y^2+b^2x^2-a^2b^2)$$

woraus für t^2 eine quadratische Gleichung hervorgeht, da 2 Tangenten existiren. Sie ist:

$$t^4(a^2y^2+b^2x^2)^2-2t^2M(a^2y^4+b^2x^4+(a^2+b^2)x^2y^2+a^2c^2y^2-b^2c^2x^2) + M^2((x^2+y^2)^2-2c^2(x^2-y^2)+c^4) = 0$$

$$M = a^2y^2+b^2x^2-a^2b^2$$

Daher ist

$$t_1t_2 = \frac{a^2y^2+b^2x^2-a^2b^2}{a^2y^2+b^2x^2}\sqrt{(x^2+y^2)^2-2c^2(x^2-y^2)+c^4}$$

Den Ausdruck unter dem Wurzelzeichen, welcher nur von der Excentricität abhängt, bezeichnen wir mit q^4, so dass also das Product p_1p_2 der von $R(\psi)$ nach den Brennpunkten gehenden Geraden gleich q^2 ist.

Daher hat man

$$\frac{t_1t_2}{p_1p_2} = 1-\frac{1}{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}$$

Da aber $x = R\cos\psi$, $y = R\sin\psi$, $\frac{\cos\psi^2}{a^2} + \frac{\sin\psi^2}{b^2} = \frac{1}{r^2}$, wo r der in R liegende Ellipsenradius ist, so folgt

$$\frac{t_1 t_2}{p_1 p_2} = \frac{(R+r)(R-r)}{R^2}$$

$(R+r)(R-r)$ ist das Product der Teile der Mittelpunktssecanten, welches wir mit $s_1 s_2$ bezeichnen wollen, Daher besteht die Relation

$$\frac{t_1 t_2}{s_1 s_2} = \frac{q^2}{R^2}$$

woraus der Satz folgt:

Zieht man von einem Punkte $R(\psi)$ an eine Ellipse die beiden Tangenten und die Secante durch den Mittelpunkt, so ist für alle confocalen Ellipsen das Verhältniss der Producte beider Tangenten zu dem Producte der entsprechenden Secanten eine constante Grösse $\frac{q^2}{R^2}$.

Setzen wir $\frac{q}{R} = n$, so besteht hierfür die Curve

$$R^4(1-n^4) - 2c^2R^2\cos 2\varphi + c^4 = 0$$

als geometrischer Ort der Punkte, für welche auch $\frac{q}{R}$ constant ist.

Ist $n = 1$, so folgt eine gleichseitige Hyperbel. Im allgemeinen ist die Curve eine Cassinische Linie.

Man kann ferner setzen

$$\frac{t_1 t_2}{p_1 p_2} = \frac{a^2y^2 + b^2x^2 - a^2b^2}{a^2y^2 + b^2x^2} = k$$

Hiernach soll das Verhältniss $\frac{t_1 t_2}{p_1 p_2}$ constant $= k$ sein. Der geometrische Ort der Punkte dieses constanten Verhältnisses ist ein Kegelschnitt:

$$\frac{x^2}{\frac{a^2}{1-k}} + \frac{y^2}{\frac{b^2}{1-k}} = 1$$

Mit jedem Kegelschnitt ist demnach ein beliebiger zweiter und ähnlicher verknüpft, welcher die Eigenschaft besitzt, dass das Product der vom 2. an den 1. gezogenen Tangenten zu dem Producte der entsprechenden Brennstrahlen ein constantes Verhältniss bildet.

Die Tangenten an einen Kegelschnitt kann man auch auf folgende Art mit Kreistangenten in Verbindung bringen. Wir beschreiben um das Centrum des Kegelschnitts einen Kreis mit dem Radius ϱ. Vom Punkte xy oder $R(\psi)$ ziehen wir an beide Curven die Tangenten.

Für den Kreis besteht demnach die Gleichung

$$t^2 = x^2 + y^2 - \varrho^2$$

Wir nehmen an, dass $t_1^2 + t_2^2 = 2t^2$ ist und gewinnen aus den entwickelten Gleichungen die Curve 4 Grades

$$x^4 b^4(\varrho^2 - a^2 - c^2) + y^4 a^4(\varrho^2 - b^2 + c^2) + x^2 y^2 a^2 b^2(2\varrho^2 - a^2 - b^2) - a^2 b^2 c^2(a^2 y^2 - b^2 x^2) = 0$$

Es sei $\varrho^2 = \frac{a^2+b^2}{2}$, so erhalten wir aus

$$\frac{x^4}{a^4} - \frac{y^4}{b^4} = \frac{2}{3}\left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)$$

die Gerade $y = \frac{b}{a}x$ und den Kegelschnitt $\frac{x^2}{\frac{2}{3}a^2} + \frac{y^2}{\frac{2}{3}b^2} = 1$, welcher eine Hyperbel sein muss. Beide Resultate geben zu neuen Sätzen Veranlassung.

Auf Fusspunktcurven kommen wir durch Einführung des Winkels ω zwischen den Tangenten $t_1 t_2$ eines Kegelschnitts, für welchen die Formel

$$\cos\omega = \frac{x^2 + y^2 - a^2 - b^2}{\sqrt{(x^2+y^2)^2 = 2c^2(x^2 - y^2) + c^4}}$$

oder

$$\tfrac{1}{4}\operatorname{tg}\omega^2 = \frac{a^2 y^2 + b^2 x^2 - a^2 b^2}{(x^2 + y^2 - a^2 - b^2)^2}$$

gilt. Aus der letzten Gleichung folgt:

$$(x^2+y^2)^2 = 2(a^2 + b^2 + 2b^2\cot\omega^2)x^2 + 2(a^2 + b^2 + 2a^2\cot\omega^2)y^2 - (a^2+b^2)^2 - 4a^2b^2\cot\omega^2$$

Wir wählen die Hyperbel als Grundcurve, setzen also $-b^2$ statt b^2 und führen ein

$$\operatorname{tg}\omega = \frac{2ab}{a^2 - b^2} = \frac{2\frac{b}{a}}{1-\frac{b^2}{a^2}}, \quad \frac{b}{a} = \operatorname{tg}\varepsilon$$

also

$$\omega = 2\varepsilon$$

dann folgt

$$(x^2+y^2)^2 = \frac{a^4-b^4}{a^2}x^2 + \frac{a^4-b^4}{b^2}y^2$$

Diese Gleichung stellt die Fusspunktcurve einer Ellipse dar. Daher haben wir den Satz:

Mit jeder Hyperbel ist eine bestimmte Fusspunktcurve einer Ellipse verbunden, welche der geometrische Ort aller der Punkte ist, von welchen die an die Hyperbel gezogenen Tangenten einen constanten Winkel $\omega = 2\varepsilon$, den Asymptotenwinkel, einschliessen.

Aus der allgemeinen Gleichung folgt für die gleichseitige Hyperbel mit constantem ω

$$R^4 - 2c^2\cot\omega^2 R^2\cos 2\varphi + c^4\cot\omega^4 = \frac{\cot\omega^2}{\sin\omega^2}$$

Also resultirt hieraus:

Mit jeder gleichseitigen Hyperbel existiren Schaaren von aus einem Zuge bestehenden Lemniskaten, welche die Eigenschaft besitzen, dass die von jedem ihrer Punkte an die Hyperbel gezogenen Tangenten constante Winkel einschliessen.

Wir wollen über die Rectification der Fusspunktcurven der Kegelschnitte noch einige Integrale aufstellen und transformiren.

Die allgemeine Gleichung derselben ist

$$r^2 = a^2 - b^2\sin\varphi^2$$

Der Bogen wird dargestellt durch

$$s = a\int \frac{\left(1-\frac{a^4-b^4}{a^4}\sin^2\varphi\right)d\varphi}{\sqrt{\left(1-\frac{a^4-b^4}{a^4}\sin\varphi^2\right)\left(1-\frac{c^2}{a^2}\sin\varphi^2\right)}}$$

Wir führen ein

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{a^2}{b^2}\cot\varphi$$

so folgt für die Ellipsenfusspunktcurve

$$s = \int \frac{d\psi}{\left(1-\frac{a^4-b^4}{a^4}\sin\psi^2\right)\sqrt{1-\frac{c^2}{a^2}\sin\psi^2}} \qquad c^2 = a^2 - b^2$$

Der Winkel ψ ist geometrisch leicht bestimmbar. Er ist der Winkel, den die kleine Achse mit dem Radius des Ellipsenpunktes macht, auf dessen Tangente die Normale $r(\varphi)$ als Vector der Fusspunktcurve gefällt ist.

Wenden wir das Additionstheorem der elliptischen Integrale 3. Art auf diesen Fall an, setzen demnach

$$\cos\psi_3 = \cos\psi_1\cos\psi_2 - \sin\psi_1\sin\psi_2\,\Delta\psi_3$$

so findet man nach einigen Entwickelungen

$$s_1+s_2 = s_3 - \sqrt{a^2+b^2}\operatorname{arctg}\frac{b^3c^2\sqrt{a^2+b^2}\sin\psi_1\sin\psi_2\sin\psi_3}{a^2(b^4-(a^4-b^4)\cos\psi_1\cos\psi_2\cos\psi_3)}$$

Zu zwei Bogen der Fusspunktcurve einer Ellipse lässt sich demnach ein dritter finden, der von der Summe der beiden ersten um einen bestimmten Bogen eines Kreises differirt.

Für die Fusspunktcurve der Hyperbel

$$r^2 = a^2 - c^2\sin\varphi^2$$

folgt der Bogen

$$s = \frac{a^3}{b^2}\int \frac{d\varphi}{\left(1+\frac{a^4-b^4}{b^4}\sin\varphi^2\right)\sqrt{1-\frac{c^2}{b^2}\sin\varphi^2}}, \qquad c^2 = a^2+b^2$$

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{a^2}{b^2}\cot\varphi$$

Es ist φ der Polarwinkel des Hyperbelpunktes, auf dessen Tangente die Normale $r(\varphi)$ als Vector der Fusspunktcurve gefällt ist.

Das Additionstheorem liefert nun auch die Relation der 3 Bogen

$$s_1+s_2 = s_3 + \sqrt{a^2-b^2}\operatorname{arctg}\frac{a^3c^2\sqrt{a^2-b^2}\sin\psi_1\sin\psi_2\sin\psi_3}{b^2(a^4-(a^4-b^4)\cos\psi_1\cos\psi_2\cos\psi_3)}$$

wenn $a > b$ ist. Ist dagegen $a < b$, so folgt

$$s_1+s_2=s_3+\tfrac{1}{2}\sqrt{b^2-a^2}$$
$$\times\log\frac{b^2(a^4-(a^4-b^4)\cos\psi_1\cos\psi_2\cos\psi_3)-a^3c^2\sqrt{b^2-a^2}\sin\psi_1\sin\psi_2\sin\psi_3}{b^2(a^4-(a^4-b^4)\cos\psi_1\cos\psi_2\cos\psi_3)+a^3c^2\sqrt{b^2-a^2}\sin\psi_1\sin\psi_2\sin\psi_3}$$

Aus diesen allgemeinen Gleichungen lassen sich leicht noch specielle entwickeln, wenn s_3 ein Quadrant ist etc.

Legen wir eine Gerade durch die Fusspunktcurve, welche gegen die Achse um den Winkel β geneigt ist und den Abstand h vom Centrum hat, und entwickeln die Gleichung für $\operatorname{tg}\varphi$, so folgt

$$\operatorname{tg}\varphi^4\left(\frac{h^2}{a^2}-\frac{b^2}{a^2}\cos\beta^2\right)+\frac{b^2}{a^2}\sin 2\beta\operatorname{tg}\varphi^3+\left(2\frac{h^2}{a^2}-1+\frac{c^2}{a^2}\sin\beta^2\right)\operatorname{tg}\varphi^2$$
$$+\sin 2\beta\operatorname{tg}\varphi+\frac{h^2}{a^2}-\sin\beta^2=0$$

Wie wir in einer früheren Abhandlung nachgewiesen, existirt mit einer solchen Gleichung eine Integralfunction

$$\Sigma\int\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin\varphi^2}}=2K$$

deren Modulus aus

$$k'^2=\frac{\frac{b^4}{a^4}\sin 2\beta^2+2\left(\frac{h^2}{a^2}-\frac{b^2}{a^2}\cos\beta^2\right)\frac{c^2}{a^2}(\cos 2\beta\pm 1)}{\sin 2\beta^2+2\left(\frac{h^2}{a^2}-\sin\beta^2\right)\frac{c^2}{a^2}(\cos 2\beta\pm 1)}$$

hervorgeht. Nehmen wir eine Fusspunktcurve der Hyperbel an, so erhält man für das untere Zeichen unter Voraussetzung $k^2=\frac{c^2}{a^2}$

$$h^2=\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}\sin\beta^2$$

und wenn $h=x\sin\beta$,

$$x^2=\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$$

Alle Geraden demnach, welche durch den auf der Achse der Fusspunktcurve einer Hyperbel, deren Gleichung

$$r^2=a^2-(a^2+b^2)\sin\varphi^2$$

ist, liegenden, vom Centrum um $x=\frac{ab}{c}$ entfernten Punkt gehen und die Polarwinkel $\varphi_1\varphi_2\varphi_3\varphi_4$ bedingen, bestimmen eine Integralfunction, und zwar unter andern die folgende

$$\int \frac{d\varphi_1}{\sqrt{1-\frac{c^2}{a^2}\sin\varphi_1^2}} + \int \frac{d\varphi_2}{\sqrt{1-\frac{c^2}{a^2}\sin\varphi_2^2}} + \int \frac{d\varphi_3}{\sqrt{1-\frac{c^2}{a^2}\sin\varphi_3^2}} + \int \frac{d\varphi_4}{\sqrt{1-\frac{c^2}{a^2}\sin\varphi_4^2}} = 2K$$

Für die gleichseitige Hyperbel geht die Curve in die Lemniskate über, und es ist $c^2 = 2a^2$, demnach

$$\int \frac{d\varphi_1}{\sqrt{\cos 2\varphi_1}} + \int \frac{d\varphi_2}{\sqrt{\cos 2\varphi_2}} + \int \frac{d\varphi_3}{\sqrt{\cos 2\varphi_3}} + \int \frac{d\varphi_4}{\sqrt{\cos 2\varphi_4}} = 2K$$

Da aber die Integrale Lemniskatenbogen bezeichnen, so ist die Summe der Bogen, welche von einer durch einen Brennpunkt gehenden Geraden auf der Lemniskate begrenzt werden, eine constante Grösse und zwar dem halben Umfang der Curve gleich. Zugleich besteht allgemein für alle Fusspunktcurven die Relation

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 = 2\pi + 2\beta$$

Wir halten es für nützlich, hinsichtlich der Verwandtschaft der Bewegungen das Rectificationsintegral der Fusspunktcurven der Kegelschnitte mit einem andern analogen in Verbindung zu bringen, welches die Zeit ausdrückt, welche ein schwerer Körper zum Durchlaufen eines Bogens einer Trochoide bedarf.

Man unterscheidet bekanntlich ausser den einfachen Cykloiden noch geschweifte und verkürzte, welche man Trochoiden nennt. Während die erste durch einen Punkt im Umfang des Rollkreises erzeugt wird, dessen Radius a sein möge, werden die Trochoiden durch feste Punkte, die innerhalb oder ausserhalb des Rollkreises liegen, beschrieben. Es sei b der Abstand eines solchen Punktes vom Centrum.

Die von ihm beschriebene Curve ist

$$x = a\theta - b\sin\theta,$$
$$y = a - b\cos\theta$$

Wir wollen die Bewegung eines schweren Punktes auf dieser Curve, die wir unterhalb der X-Achse denken, verfolgen und die Geschwindigkeit v durch die Relation $v^2 = 2gy$ definiren.

Wir betrachten demnach die X-Achse als Directrix, wodurch die Geschwindigkeit ihre bestimmte Fallhöhe erhält. Das Zeitintegral ist, wie man bald findet

$$t = \sqrt{\frac{2(a+b)}{g}} \int \frac{\left(1 - \frac{4ab}{(a^2+b)^2} \sin\tfrac{1}{2}\psi^2\right) d\tfrac{1}{2}\psi}{\sqrt{1 - \left(\frac{4ab}{a+b} \sin\tfrac{1}{2}\psi^2\right)\left(1 - \frac{2b}{a+b} \sin\tfrac{1}{2}\psi^2\right)}}$$

$$\psi + \theta = 180^0$$

Die Bewegung rechnen wir demnach vom tiefsten Punkt an.

Das Integral für den Bogen einer Fusspunktcurve der Kegelschnitte ist aber

$$s = A \int \frac{\left(1 - \frac{A^4 - B^4}{A^4} \sin\varphi^2\right) d\varphi}{\sqrt{\left(1 - \frac{A^4 - B^4}{A^4} \sin\varphi^2\right)\left(1 - \frac{A^2 - B^2}{A^2} \sin\varphi^2\right)}}$$

$$R^2 = A^2 - C^2 \sin\varphi^2$$

Wir können demnach

$$\frac{s}{A} = \frac{t}{\sqrt{\frac{2(a+b)}{g}}}$$

setzen, wenn wir identisch haben

$$\frac{4ab}{(a+b)^2} = \frac{A^4 - B^4}{A^4}, \quad \frac{2b}{a+b} = \frac{A^2 - B^2}{A^2},$$

$$\varphi = \tfrac{1}{2}\psi$$

Die zweite Bedingung ist eine Folge der ersten, und man hat

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{B^2}{A^2}$$

als einzige Bedingungsgleichung für verkürzte Trochoiden $a > b$.

Die geometrische Bedeutung von A und B erkennt man sofort aus den beiden Rollkreisen, deren Radien a und b sind; A und B sind proportional den Katheten des dadurch bestimmten Dreiecks im grösseren Kreise. Man kann also $A = a + b$ setzen und es ist

$$s = \sqrt{\frac{gA}{2}}\, t$$

Die Bewegung eines schweren Punktes in der Trochoide, also hier in der verkürzten Cykloide, steht mit der gleichförmigen Bewegung eines Punktes in einer Fusspunktencurve einer Ellipse in einer solchen Beziehung, dass der Polarwinkel φ des letztern stets

dem halben Wälzungswinkel ψ der erstern gleich und die constante Geschwindigkeit $= \sqrt{\frac{gA}{2}}$ ist.

Für die Bewegungsverhältnisse in einer geschweiften Cykloide $a < b$ tritt, wie man leicht bemerkt, die Fusspunktcurve der Hyperbel an Stelle der Ellipse auf und die Bedingungen modificiren sich darnach.

Wir wollen schliesslich noch auf eine schöne Eigenschaft der Fusspunktcurven aufmerksam machen.

Betrachtet man das elliptische Integral der 1. Art

$$F = \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin \varphi^2}}$$

so erkennt man augenblicklich, dass der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen dazu einladet, ihn mit der Gleichung der Fusspunktcurven

$$r^2 = a^2 - c^2 \sin \varphi^2$$

oder

$$r = a\sqrt{1 - k^2 \sin \varphi^2} \qquad k = \frac{c}{a}$$

in Beziehung zu bringen. Indem wir diesen Gedanken benutzen, wollen wir zeigen, dass das Integral vermittelst der Curve eine interessante optische Bedeutung gewinnt.

Zunächst wird

$$F = a \int \frac{d\varphi}{r}$$

Wir lassen zunächst in der Curve φ um $d\varphi$ wachsen, und betrachten das unendliche schmale Dreieck zwischen r, $r + dr$, und dem Bogendifferential ds, dessen Normale mit r den Winkel ε einschliessen möge. Alsdann bestehen die Relationen

$$r\,d\varphi = ds \cos \varepsilon,$$

$$\frac{d\varphi}{r} = \frac{ds \cos \varepsilon}{r^2},$$

$$F = a \int \frac{ds}{r^2} \cos \varepsilon$$

Die physikalische Bedeutung des Integrals ist sofort klar.

Wir nehmen eine Lichtquelle an. Dieselbe möge eine kleine Kugel im Centrum der Curve in der Einheit der Entfernung mit

der Stärke $= a$ beleuchten, die Lichtmenge wird demnach in der Entfernung r gleich $\frac{a}{r^2}$ sein. Der Bogen s der Fusspunktcurve sei eine leuchtende Linie; alsdann wirkt das Lichtteilchen ds, dessen Ausstrahlungswinkel $= 0$ ist, durch den Zuwachs $\frac{a\,ds}{r^2}$, und wenn der Winkel $= E$ ist, nach bekanntem Gesetz durch

$$dF = \frac{a\,ds\cos\varepsilon}{r^2}$$

auf die Kugel ein. Daher bedeutet das Integral

$$F = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin\varphi^2}} = a\int_0^{s} \frac{ds\cos\varepsilon}{r^2}$$

die Quantität des Lichtes oder der Wärme, welcher ein Lichtbogen der Fusspunktcurve einer im Centrum befindlichen Kugeloberfläche erteilt.

Der Modulus k kann jeden Wert haben, er ist für die Fusspunktcurve der Ellipse kleiner, für die der Hyperbel grösser als die Einheit.

Das Additionstheorem bestimmt mit Leichtigkeit Bogen der Curve von gleicher Lichtstärke.

Erwähnenswert ist noch, dass wenn in der X- und Y-Achse eine Fläche angebracht wird, die Stärke der Beleuchtung derselben im 1. Fall durch

$$Fx = \int \frac{\sin\varphi\,d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin\varphi^2}} = \frac{1}{k}\log\frac{\sqrt{1-k^2\cos\varphi^2}-k\cos\varphi}{1-k}$$

im zweiten Fall durch

$$Fy = \int \frac{\cos\varphi\,d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin\varphi^2}} = \frac{\varphi}{k}$$

gegeben ist, wonach die Beleuchtung dem Polarwinkel proportional ist. Specielle Fälle haben wir schon früher erwähnt.

Die vorhin entwickelte Integralfunction der Fusspunktcurve der Hyperbel kann in dem angedeuteten Sinne interpretirt werden, wodurch sie an Interesse gewinnt.

V.

Die flache Kreisschraubenfläche.

Von

Franz Schiffner.

Die gewöhnliche Schraubenfläche wird von einer Geraden G erzeugt, welche mit einem ihrer Punkte auf einer anderen Geraden L weiterrückt und dabei gleichzeitig um L rotirt. Eine Kreisschraubenfläche soll entstehen, wenn sich ein Punkt p der Geraden G auf einer Kreislinie K bewegt, und G zugleich eine Drehung vollführt. Die Kreisschraubenfläche kann gleichsam als eine deformirte gewöhnliche Schraubenfläche betrachtet werden; als eine Schraubenfläche, deren Achse L in einen Kreis K übergegangen ist. Bei dieser Deformation ändern sich die kleinsten Elemente von L so, dass sie zu Kreiselementen werden und die Richtung der Kreistangente in dem betreffenden Elemente erhalten. G dreht sich also in jedem Momente um eine andere Achse; und zwar können wir, damit die gegenseitige Lage der gemeinschaftlichen Elemente von G und L durch die Deformation nicht geändert wird, der Drehung von G jene Kreistangente t als Achse nachweisen, welche in dem Schnittpunkte p von G und K berührt. Da die Bewegung von p auf K oder t an K auch eine Drehung ist, nämlich eine Drehung von p und t um die Gerade A, welche im Kreismittelpunkt O auf der Kreisebene K senkrecht steht, so macht G eigentlich gleichzeitig zwei Rotationen: um die Gerade t und mit p und t um die Gerade A.

Die Kreisschraubenfläche F wird bestimmt sein, sobald die gegenseitige Lage von G und K bekannt ist und die Beziehung zwischen den beiden Drehungen festgestellt wurde. Bei der gewöhnlichen flachen Schraubenfläche ist G stets normal zu L; bei der flachen

Kreisschraubenfläche — die wir hier zunächst untersuchen wollen — soll dem entsprechend G auf K, d. h. G auf t senkrecht stehen. Bei der gewöhnlichen Schraubenfläche wird meistens nebst dem Drehungssinne die Ganghöhe angegeben, das ist jene Strecke, welche ein Punkt von G auf L durchläuft, wenn sich G einmal um L dreht. Dem entspricht hier die Angabe des Bogens, den p auf K durchmessen soll, wenn G eine volle Umdrehung macht; oder die Angabe, in welchem Verhältnisse die Drehung von p zu jener von G stehen soll. Wir wollen zuerst einen einfachen Fall betrachten und annehmen, p durchlaufe den Kreis K, wenn G eine Umdrehung macht; oder die Drehungsgeschwindigkeiten, resp. die Drehungswinkel von p und G seien gleich. Nun ist die Fläche F vollständig bestimmt, weil die Erzeugende G während ihrer ganzen Bewegung verfolgt werden kann.

Für die Darstellung von F empfiehlt es sich, der Geraden A eine verticale Richtung zu geben, als Anfangslage von G jene Lage G_0 zu wählen, welche in der horizontalen Kreisebene liegt, und die Projectionsachse parallel zu G_0 anzunehmen. (Als positiv gelte die der Bewegung von Uhrzeigern entgegengesetzte Drehung.) G kann nun in jeder Lage leicht dargestellt werden und damit die Gesamtheit dieser Lagen: die flache Kreisschraubenfläche F.

Es ist für die Darstellung der Erzeugenden G, in welche die Gerade G_0 fällt, wenn sie sich in beiderlei Sinn um den Winkel u gedreht hat, ganz gleichgiltig, ob die beiden Drehungen um t und A zugleich oder nach einander, und ob diese oder jene früher gemacht wurde.

Bei obigen Annahmen ist es angezeigt, G_0 zuerst um t_0 nach (G) zu drehen, dann (G) um A nach G; denn es projicirt sich erstere Drehung im Aufriss, letztere im Grundriss in wahrer Grösse und man hat nur $(G)''$ durch p_0'' unter den Winkel u zu G_0'' zu ziehen und p_0 auf K um den Winkel u zu drehen. Es bleibt nämlich bei der ersten Rotation der Kreispunkt p_0, bei der zweiten Drehung der Schnittpunkt B von (G) mit A fix. G und A müssen sich in einem Punkte B schneiden, weil G auf K oder vielmehr t senkrecht steht, also G_0 durch O geht, und die Drehung von G_0 um t_0 in der Ebene (AG_0) erfolgt.

Für die Winkel u von 0^0 bis 360^0 erhält man alle Erzeugende G der Fläche F; in der weiteren Drehung fällt G mit früheren Lagen zusammen: F besteht deshalb nur aus einem Teile.

Wie oben erwähnt, trifft jede Erzeugende G die Gerade A in einem Punkte B; aber durch jeden Punkt B von A gehen zwei Er-

zeugende der Fläche, denn es ist $OB = -a.\operatorname{tg} u$, (wenn a der Halbmesser von K ist) und dieser Ausdruck hat für u^0 und $(180+u)^0$ denselben Wert. A ist sonach eine Doppelgerade der Fläche F.

Die beiden Erzeugenden, welche sich in demselben Punkte B treffen, liegen immer in einer durch A gehenden Ebene und bilden mit A gleiche Winkel; sie fallen nur für $u = 0^0$ und $u = 180^0$ oder $OA = 0$ zusammen und sind nur für $u = 90^0$ und $u = = 270^0$ oder $OB = \infty$ parallel. Zwei beliebige andere Erzeugende sind windschief. Auch zwei Nachbarerzeugende kreuzen sich, weil sie sonst beide durch denselben Punkt von A gehen müssten, in welchem die durch sie gelegte Ebene der Geraden A begegnet, was wegen der Verschiedenheit der Werte $a.\operatorname{tang}.u$ und $a.\operatorname{tang}.(u+du)$ nicht sein kann. Mit anderen Worten heisst es: die flache Kreisschraubenfläche ist eine windschiefe Fläche.

Untersuchen wir nun, von welchem Grade sie ist. Irgend ein Strahl L hat mit F so viele Punkte gemein als er Erzeugende G trifft. Ist G_n eine solche Gerade, welche von L geschnitten wird, dann lässt sich durch L und G_n eine Ebene legen. Diese muss den Punkt B_n enthalten und ihre Spur in der Kreisebene K muss durch den Kreispunkt p_n gehen. Da p_n auch ein Punkt der Geraden Op_n ist, in welcher die Ebene (AG_n) die Kreisebene K schneidet, so folgt: Wenn der Strahl L die Fläche F in einem Punkte von G_n schneidet, dann treffen sich die Spuren der Ebenen (LB_n) und (AG_n) in einem Punkte p_n des Kreises K. Nun ist aber das Ebenenbüschel (AG) mit der Punktreihe (B) projectivisch, denn das Ebenenbüschel (AG) liegt zu einer Punktreihe (b) auf t_0 perspectivisch, die mit der Punktreihe (B) congruent ist. (p_0b und OB haben nämlich die gleiche Länge $a.\operatorname{tang} u$). Infolge dessen wird auch das zur Punktreihe (B) perspectivische Ebenenbüschel (LB) mit dem Ebenenbüschel (AG) projectivisch sein, und als Spuren von (LB) und (AG) in der Kreisebene K werden sich zwei projectivische Strahlenbüschel ergeben, deren Erzeugniss ein Kegelschnitt k ist. Die Linien der zweiten Ordnung k und K haben im allgemeinen vier Punkte gemein, die Spuren der Ebenen (LB) und (AG) können sich deshalb nur viermal in K begegnen und L kann mit F höchstens vier Schnittpunkte liefern. Die Fläche F ist somit von der vierten Ordnung und als windschiefe Regelfläche auch von derselben Classe oder kurz: F ist eine Fläche des 4. Grades.

Dies Resultat wird auch durch die Gleichung von F bestätigt, welche wie folgt abgeleitet werden kann.

Es besteht für jeden Punkt P in G die Proportion:

$$PP' : P'p = OB : Op$$

Nimmt man G_0 als Achse der x, A als Achse der z und zu beiden senkrecht die Achse der y an, und zwar so, dass ihre positiven Richtungen $+u$ entsprechen, dann kann man statt jener Proportion schreiben:

$$z : (\sqrt{x^2+y^2} - a) = a \cdot \frac{y}{x} : a$$

woraus sich

$$zx = y\sqrt{x^2+y^2} = ay$$

oder

$$y^2(x^2+y^2) - (ay+xz)^2 = 0$$

als Gleichung von F ergibt. Sie ist richtig vom vierten Grade.

Irgend eine Ebene E schneidet deshalb F nach einer Curve der vierten Ordnung C_4.

C_4 wird in Curven niederer Ordnung zerfallen, wenn E 1) durch die Doppelgerade A geht, 2) die zweifache Gerade G_0 oder 3) irgend eine andere Erzeugende G enthält.

Im ersten Falle zählt A als Doppelgerade von C_4 und die ergänzende Curve 2. Ordnung besteht aus zwei Geraden, die sich in einem Punkte B von A schneiden. Nach früherem haben zwei solche Gerade gleiche Horizontalneigung u und können deshalb auch als Schnitte mit dem Kegel (BK) ermittelt werden, wenn

$$OB = -a \operatorname{tang} u$$

ist. Hieraus folgt, dass man die Fläche F als das Erzeugniss eines Ebenenbüschels und einer Schar von Rotationskegeln betrachten kann. Die Ebenen des Büschels gehen durch A und haben zu G_0 die Neigung u, die Kegel gehen durch K, und ihre Spitzen haben von K den Abstand

$$OB = -a \operatorname{tang} u$$

Man erhält alle Erzeugende, wenn u alle Werte von 0^0 bis 180^0 annimmt.

Im zweiten Falle zählt G_0 als zweifache Gerade des ebenen Schnittes C_4, welcher also durch einen Kegelschnitt C_2 zur Curve der 4. Ordnung ergänzt werden muss. In der Tat liefert die Flächengleichung

$$y^2(x^2+y^2) = (ay+xz)^2$$

für den constanten Wert

$$\frac{z}{y} = \operatorname{tang} v = m$$

die Gleichung 2. Grades

$$x^2+y^2 = (a+mx)^2$$

welche, da z nicht darin vorkommt, als Gleichung des Grundrisses C_2 der Schnittlinie C_2 betrachtet werden kann. Für jeden constanten Wert m erhält man einen bestimmten Kegelschnitt, d. h. jede durch G_0 gehende Ebene schneidet F in einer Curve 2. Ordnung: C_2. Von allen Kegelschnitten C_2 liegt die Hauptachse in G_0. Für den Grundriss C_2' hat die Hauptachse die Länge: $\frac{2a}{1-m^2}$, die Nebenachse die Länge: $\frac{2a}{\sqrt{1-m^2}}$, der Mittelpunkt die Coordinaten: $x = \frac{am}{1-m^2}, y=0$, oder $x = \frac{a}{2}\operatorname{tang} 2v$, $y = 0$. Alle C_2' haben O zum Brennpunkte und den Parameter $2a$, was auch aus der Polargleichung von C_2' hervorgeht, die $r = \frac{a}{1-m\cos u}$ lautet. Unter diesen Kegelschnitten C_2 sind zwei Parabeln ($m = \pm 1$), unendlich viele Ellipsen ($m < 1$), unendlich viele Hyperbeln ($m > 1$), aber nur ein Kreis ($m = 0$) und ein Paar zusammenfallende Gerade ($m = \infty$).

Daraus liesse sich noch folgende Erzeugungsart der Fläche F ableiten. Dreht sich eine Ebene um die Gerade G_0 aus der horizontalen Lage um den Winkel v, so bilden die in ihr liegenden Kegelschnitte mit der Gleichung

$$x^2+y^2 = (a+x\operatorname{tang} v)^2$$

die Fläche F. Letztere und die vorher besprochene Erzeugungsart lassen erkennen, dass F unter die von Plücker in seiner „Neuen Geometrie des Raumes" etc. besprochenen Complex-Flächen gehört und zwar unter die Meridian-Flächen der Complexe 2. Grades.

Wenn endlich drittens die schneidende Ebene E durch irgend eine andere Erzeugende G der Fläche F geht, dann wird die Schnittcurve C_4 aus G und einer Curve 3. Ordnung C_3 bestehen, welche den Schnittpunkt von E mit A zum Doppelpunkte hat.

Enthält die schneidende Ebene gar keine Erzeugende der Fläche, dann ist ihre Schnittlinie mit F eine Curve 4. Ordnung, die nicht zerfällt. Von solchen Schnittlinien lassen sich jene leicht construiren, die in einer zu K parallelen Ebene liegen. Denkt man sich F durch Ebenen aus A, welche gegen G_0 die Neigung u haben, und die Kegel (BK) erzeugt, so kann man die Schnittcurve in der Ebene $z = c$ als die Gesamtheit der Punkte auffassen, welche Strahlen in $z = c$ aus dem Spurpunkte von A mit concentrischen Kreisen aus demselben Spurpunkte gemein haben. Der Neigungswinkel der Strahlen zur Ebene (G_0A) ist u, der Halbmesser der Kreise ist $(a+c\operatorname{tang} u)$.

Ausser den erwähnten ebenen Linien G und C_1 auf F sind noch jene Curven $\mathfrak{C}$ der Fläche von Bedeutung, welche die einzelnen Punkte der rotirenden Geraden beschreiben und welche den cylinderischen Schraubenlinien der gewöhnlichen Schraubenflächen entsprechen. Eine von diesen Curven $\mathfrak{C}$, nämlich der Kreis K, ist als Weg des Punktes p schon durch die Definition von F fixirt. K ist die einzige Linie unter $\mathfrak{C}$, welche eben ist. Eine beliebige andere Curve $\mathfrak{C}$ kann man sich auf zweifache Art durch die Bewegung des Punktes $\mathfrak{P}$ entstanden denken, je nachdem man $\mathfrak{P}$ als Punkt der Geraden G betrachtet und mit dieser zugleich dreht oder $\mathfrak{P}$ unabhängig von G bewegt. Ersteres sagt, dass man G in den verschiedenen Lagen darstellen und in jeder derselben $\mathfrak{P}$ aufsuchen soll, indem man z. B. beachtet, dass $\mathfrak{P}$ stets um dasselbe Stück b von p absteht. Ohne Benutzung von G kann man $\mathfrak{C}$ entstehen lassen, indem man $\mathfrak{P}$ um t dreht, also $\mathfrak{P}$ einen Kreis $\mathfrak{K}$ beschreiben lässt, und dann $\mathfrak{P}$ mit diesem Kreise $\mathfrak{K}$ um A rotirt. $\mathfrak{K}$ erzeugt so eine Ring- und Wulstfläche W, auf welcher $\mathfrak{C}$ liegen muss. $\mathfrak{K}$ hat p zum Mittelpunkte, $\mathfrak{P}p = b$ zum Halbmesser und liegt in einer durch A gehenden Ebene. Durch jeden Punkt $\mathfrak{P}$ geht ein solcher Kreis $\mathfrak{K}$ und noch ein horizontaler Kreis der Ringfläche W vom Halbmesser $(a+b\cos u)$. Die Coordinaten des Punktes $\mathfrak{P}$ sind:

$$x = (a+b\cos u)\cos u, \quad y = (a+b\cos u)\sin u, \quad z = b\sin u$$

der Grundriss $\mathfrak{C}'$ von $\mathfrak{C}$ hat deshalb die einfache Polargleichung:

$$r = a+b\cos u$$

Hieraus folgt für die Subnormale OD der Wert

$$\frac{dr}{du} = -b\sin u = -z$$

Bedenkt man noch, dass $\mathfrak{C}$ auf W liegt, die Tangente $\mathfrak{T}$ an $\mathfrak{C}$ also der Berührungsebene ε der Wulstfläche angehört, so ist die Tangente $\mathfrak{T}$ für jeden Punkt $\mathfrak{P}$ der Raumcurve $\mathfrak{C}$ durch leicht construirbare Bedingungen bestimmt.

Auf diese Weise haben wir aber auch die Tangentenebene der Fläche F für jeden Punkt P festgestellt. Sie geht durch die Erzeugende G des Punktes P und durch die Tangente $\mathfrak{T}$ der Curve $\mathfrak{C}$, welche P beschreibt. Es ist aber vorzuziehen, statt der Tangente $\mathfrak{T}$ jene Gerade T zu benutzen, welche den durch P gehenden Kegelschnitt C_2 in P berührt. An C_2 kann man, sobald P gegeben ist, die Tangente leicht ziehen, wenn man berücksichtigt, dass O ein Brennpunkt des Grundrisses C_2' ist, dass der Mittelpunkt o von C_2'

nach früherem die Coordinaten $x = \frac{a}{2}\operatorname{tang} 2v$, $y = 0$ hat (wenn $\operatorname{tang} v = \frac{z}{y}$ ist) und dass C_2 in der Ebene (PG_0) liegt. Es könnte auch der Umstand ausgenutzt werden, dass alle C_2' durch den Grundriss $\mathfrak{G}'$ und $(\mathfrak{G})'$ jener zwei Erzeugenden $\mathfrak{G}$ und $(\mathfrak{G})$ gehen, die auf der Ebene K senkrecht stehen; denn man kennt dann, wenn P gegeben ist, von C_2' den Brennpunkt O und drei Punkte $\mathfrak{G}$, $(\mathfrak{G})'$, P', kann also nach „Reye: Geometrie der Lage 2. Aufl. 1. Th. S. 187" den zweiten Brennpunkt suchen und die Tangente T construiren.

Besonders einfach lassen sich Aufgaben über Berührungsebenen lösen, wenn man den Satz verwertet: haben Kegelschnitte denselben Parameter, dann treffen sich alle jene Tangenten, deren Berührungspunkte auf einem durch den gemeinsamen Brennpunkt gehenden Strahle liegen, in einem Punkte der Parametergeraden. (Aufsatz des Verfassers in Grunerts Archiv). In unserem Falle müssen somit alle Tangenten T' an die Kegelschnitte C_2', welche in Punkten derselben Geraden G' berühren, auf OY einen gemeinsamen Punkt U' haben. Daraus folgt, dass die Tangenten T an alle Kegelschnitte C_2 einer zu OZ oder A parallelen Geraden U in YOZ begegnen, wenn die Tangenten T in Punkten einer Erzeugenden G berühren. Darnach construirt man die Tangentenebene des Punktes P folgendermassen. Die Tangente t in p an K trifft OY in jenem Punkte U', durch welchen die Gerade U parallel A zu ziehen ist; die Ebene (G_0P) schneidet U in dem Spurpunkt von T mit YOZ; die verlangte Berührungsebene geht durch T und G.

Umgekehrt kann man den Berührungspunkt einer gegebenen Tangentenebene auf diese Art finden. Die gegebene Ebene E hat mit F eine Erzeugende G gemein, welche K in p schneidet; die Tangente an K in p trifft OY in jenem Punkte U', durch welchen die Gerade U parallel zu A zu ziehen ist; begegnet E der Geraden U in dem Punkte V, so muss die Ebene (G_0V) den Kegelschnitt C_2 enthalten, der von E berührt wird, oder (G_0V) muss G in dem Berührungspunkte der Ebene E treffen.

Sobald drei durch eine Erzeugende G gehende Berührungsebenen bekannt sind, wird für die Ermittlung anderer Tangentenebenen derselben Erzeugenden mit Vorteil der Satz angewendet: „das Büschel der Berührungsebenen durch eine Erzeugende der Regelfläche ist projectivisch zur Reihe der Berührungspunkte derselben auf dieser Erzeugenden." (Dr. W. Fiedler Darst. Geometrie

2. A. S. 411). Mit Hilfe dieses Satzes lässt sich ebenfalls der Berührungspunkt einer gegebenen Tangentenebene auffinden. Z. B. kann so auch gesucht werden, in welchem Punkte Q'' der Aufriss G'' einer Erzeugenden G die Verticalcontour der Fläche tangirt, indem Q als Berührungspunkt der durch G gelegten vertical projicirenden Ebene gesucht wird. G_0'' berührt die Aufrisscontour in den Punkten p_0'' und $(p_0)''$, weil die horizontale Ebene K Tangentenebene der Punkte p_0 und (p_0) ist; $\mathfrak{G}''$ und $(\mathfrak{G})''$ sind Asymptoten der Verticalcontour, denn die Ebene YOZ berührt F in dem unendlichen Punkte der Geraden $\mathfrak{G}$ und $(\mathfrak{G})$.

Die Kreuzrisscontour ergibt sich einfacher. Die früher erwähnten Kegelschnitte C_2 haben die Hauptachsen MM_1 in G_0, somit in den Endpunkten der Nebenachsen NN_1 zu G_0 parallele oder zur Ebene YOZ normale Tangenten. (Selbstverständlich sind diese Tangenten nur reell, wenn C_2 eine Ellipse, d. h. $m < 1$ ist). Die Tangentenebenen für solche Punkte N, N_1 stehen also auf der Kreuzrissebene senkrecht und ihre Spuren G_n'' berühren die Kreuzrisscontour in N_n'''. Da die Punkte N mit dem Mittelpunkte o von C_1 gleiche Abscisse haben, so sind ihre Coordinaten:

$$x = \frac{am}{1-m^2}, \quad y = \pm\frac{a}{\sqrt{1-m^2}}, \quad z = m \cdot y$$

Setzt man für m seinen Wert $\operatorname{tang} v = \frac{z}{y}$ in y ein, so erhält man

$$y^2 = \frac{a^2 y^2}{y^2 - z^2}$$

woraus sich für die dritte Projection der Kreuzrisscontour nebst $y^2 = 0$ die Gleichung

$$y^2 - z^2 = a^2$$

ergibt, welche sagt, dass die Kreuzrissprojectionen G''' der Flächenerzeugenden G eine Hyperbel umhüllen. Die Contourcurve selbst ist aber von der 4. Ordnung (der Grundriss hat die Gleichung

$$y^4 - a^2 y^2 - a^2 x^2 = 0)$$

und ihr Kreuzriss ist nur wegen der Symmetrie zu YOZ eine Linie der 2. Ordnung. Dies Resultat liesse sich auch so ausdrücken: der Fläche F kann der gerade hyperbolische Cylinder $y^2 - z^2 = a^2$ umschrieben werden, dessen Kanten zu G_0 parallel sind.

Zu den Berührungsebenen der Fläche gehören alle Ebenen, welche durch A gehen, sowie jene, die durch G_0 gehen; erstere

berühren in den ihnen entsprechenden Punkten B, letztere in den Hauptscheitelpunkten der in ihnen liegenden Kegelschnitten C_3. Berührt die Tangentenebene im unendlichen Punkte der Erzeugenden G, so wird sie zur asymptotischen Ebene der Erzeugenden G.

Eine solche kann nach den obigen Sätzen oder als Parallele zur Berührungsebene des Richtungskegels F längs der zu G parallelen Erzeugenden $\mathfrak{g}$ desselben construirt werden. Zum Richtungs- oder Directionskegel der Fläche gelangen wir wie folgt. Eine Gerade $\mathfrak{g}$, welche durch irgend einen Raumpunkt R parallel zur Flächenerzeugenden G gezogen wird, muss zur horizontalen Bildebene ebenso geneigt sein wie G, weshalb der Spurpunkt s von $\mathfrak{g}$ in der Ebene XOY so liegt, dass

$$RR' = R's \operatorname{tang} u$$

Alle Punkte s bilden die Spurcurve S des Richtungskegels in der horizontalen Bildebene. Wählt man z. B. R in A und $RR' = a$, so ist

$$a = Os \operatorname{tang} u$$

und die Spurcurve S hat dann die Polargleichung

$$r = -\frac{a}{\operatorname{tang} u}$$

wonach S leicht construirt werden kann. In Punktcoordinaten lautet ihre Gleichung:

$$y^2(x^2+y^2) = a^2x^2$$

S ist eine Curve der 4. Ordnung, liegt zu beiden Coordinatenachsen symmetrisch, hat in O einen Doppelpunkt und besitzt zwei im Abstande $\pm a$ zu OX parallele Asymptoten. Die Tangente τ an S in s bildet mit dem Radiusvector Os einen Winkel φ, welcher im allgemeinen der Bedingung

$$\operatorname{tang} \varphi = \frac{dr}{du} : r$$

genügt. Da

$$r = -a \operatorname{cotang} u, \quad \frac{dr}{du} = \frac{a}{\sin^2 u}$$

ist, so wird hier

$$\operatorname{tang} \varphi = -\cos u \sin u$$

sein. Wird also in (p_0) eine Senkrechte auf OX errichtet, welche Os in H trifft, und hier normal zu Os das Stück $HW = a \sin u$ aufgetragen, so gibt OW die Richtung von τ an. Die Ebene $(R\tau)$ berührt den Richtungskegel nach $\mathfrak{g}$ und hat gleiche Stellung mit der asymptotischen Fbene der zu $\mathfrak{g}$ parallelen Flächenerzeugenden G.

Einfacher ist es aber, die asymptotische Ebene mit Benutzung der Geraden U zu construiren. Man hat dann nur den Schnittpunkt U' der Tangente t in p an K mit OY und den Schnittpunkt h der Parallelen zu G' durch U' mit G_0 zu suchen; (hG) ist die asymptotische Ebene der Erzeugenden G.

Wie Richtungskegel und asymptotische Ebene zur Bestimmung der Asymptoten eines ebenen Schnittes und zur Construction der Strictionslinie der Fläche angewendet werden, ist bekannt.

Mit den gewonnenen Resultaten sind überhaupt schon so viele Eigenschaften der flachen Kreisschraubenfläche hervorgehoben worden, dass sie leicht einer constructiven Behandlung unterzogen werden kann.

VI.

Metrische Relationen am Sehnenviereck.

Von

Herrn Dr. **Otto Zimmermann.**

Es sei $ABCD$ ein Sehnenviereck, in welchem $AB > CD$ und $BC > AD$ ist. AB und CD mögen sich in P, BC und AD in Q schneiden, die Diagonalen AC und BD in N. Setzt man $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$, $AC = f$, $BD = g$ und bezeichnet die Diagonale AC' desjenigen Sehnenvierecks $ABC'D$, welches aus $ABCD$ durch Vertauschung von b und c entsteht, mit h, so gelten bekanntlich folgende Gleichungen [1]):

$$f^2 = \frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}, \quad g^2 = \frac{(ac+bd)(ab+cd)}{ad+bc}.$$

$$h^2 = \frac{(ab+cd)(ad+bc)}{ac+bd};$$

$$AN = \frac{ad}{h}, \quad BN = \frac{ab}{h}, \quad CN = \frac{bc}{h}, \quad DN = \frac{cd}{h};$$

$$J = \tfrac{1}{4}\sqrt{(a+b+c-d)(a+b-c+d)(a-b+c+d)(-a+b+c+d)}$$

$$R = \sqrt{\frac{(ab+cd)(ad+bc)(ac+bd)}{(a+b+c-d)(a+b-c+d)(a-b+c+d)(-a+b+c+d)}} = \frac{f.g.h}{4J}$$

1) Kunzes Geom. 2. Aufl., S. 225 f., Baltzers Elem. d. Math. 4. Buch S. 126 f. und Dostor, Propriétés nouvelles etc. in Grunerts Archiv XXXXVIII S. 245.

$$AP=\frac{d(ad+bc)}{b^2-d^2},\quad BP=\frac{b(ab+cd)}{b^2-d^2},\quad CP=\frac{b(ad+bc)}{b^2-d^2},$$
$$DP=\frac{d(ab+cd)}{b^2-d^2};$$

$$AQ=\frac{a(ad+bc)}{a^2-c^2},\quad BQ=\frac{a(ab+cd)}{a^2-c^2},\quad CQ=\frac{c(ad+bc)}{a^2-c^2},$$
$$DQ=\frac{c(ab+cd)}{a^2-c^2};$$

$$\Delta ADP=\frac{d^2J}{b^2-d^2},\quad \Delta BCP=\frac{b^2J}{b^2-d^2},\quad \Delta ABQ=\frac{a^2J}{a^2-c^2},$$
$$\Delta CDQ=\frac{c^2J}{a^2-c^2};$$

$$\cos ADB=\cos ACB=\frac{a(b^2+c^2+d^2-a^2)+2bcd}{2fgh}$$

$$\cos BAC=\cos BDC=\frac{b(a^2+c^2+d^2-b^2)+2acd}{2fgh}$$

$$\cos CBD=\cos CAD=\frac{c(a^2+b^2+d^2-c^2)+2abd}{2fgh}$$

$$\cos DBA=\cos DCA=\frac{d(a^2+b^2+c^2-d^2)+2abc}{2fgh}$$

bezeichnet man endlich die Innenwinkel DAB und ABC mit α und β und den spitzen Winkel AND zwischen den Diagonalen mit ε, so ist

$$\sin\alpha=\frac{2J}{ad+bc},\quad \sin\beta=\frac{2J}{ab+cd},\quad \sin\varepsilon=\frac{2J}{ac+bd};$$

$$\cos\alpha=\frac{a^2+d^2-b^2-c^2}{2(ad+bc)},\quad \cos\beta=\frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(ab+cd)},$$
$$\cos\varepsilon=\frac{a^2+c^2-b^2-d^2}{2(ac+bd)};$$

$$\sin APD=\sin(\alpha-\beta)=\frac{2J(b^2-d^2)}{(ab+cd)(ad+bc)};$$

$$\sin CQD=\sin(\alpha+\beta)=\frac{2J(a^2-c^2)}{(ab+cd)(ad+bc)}$$

Im Folgenden werden Functionen wie

$$ab+cd,\quad ad+bc,\quad ac+bd,\quad a+b+c-d,\quad a+b-c+d,\quad a-b+c+d,$$
$$-a+b+c+d$$

abkürzungsweise stets mit

$$(ab),\quad (ad),\quad (ac),\quad \{d\},\quad \{c\},\quad \{b\},\quad \{a\}$$

bezeichnet.

1) a. Die Lote von A, B, C, D auf b, c, d, a haben die Werte:

$$h_1 = a\sin\beta = \frac{2aJ}{(ab)},\quad h_2 = b\sin\alpha = \frac{2bJ}{(ad)},\quad h_3 = c\sin\beta = \frac{2cJ}{(ab)},$$

$$h_4 = d\sin\alpha = \frac{2dJ}{(ad)}$$

Daraus ergiebt sich

$$h_1 : h_3 = a : c \quad \text{und} \quad h_2 : h_4 = b : d \quad \text{oder} \quad c = a\frac{h_3}{h_1} \quad \text{und} \quad d = b\frac{h_4}{h_2}$$

durch Einsetzen dieser Werte in die Gleichung

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{a(ad)}{b(ab)}$$

ergiebt sich

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{a(h_1h_4)}{b(h_1h_2)}$$

oder

$$b = a\frac{h_2(h_1h_4)}{h_1(h_1h_2)}$$

folglich

$$d = b\frac{h_4}{h_2} = a\frac{h_4(h_1h_4)}{h_1(h_1h_2)}$$

und durch Einsetzen der Werte von b, c und d in $h_1 = \frac{2aJ}{(ab)}$ erhält man unter Berücksichtigung unsrer symbolischen Schreibweise, nach der wir $h_2(h_2h_3+h_1h_4)+h_3(h_3h_4+h_1h_2)+h_4(h_4h_1+h_2h_3) - h_1(h_1h_2+h_3h_4) = \{h_1(h_1h_2)\}$ u. s. w. setzen,

$$a = \frac{2h_1(h_2h_3)[(h_1h_2)]^2}{\sqrt{\{h_1(h_1h_2)\}\{h_2(h_2h_3)\}\{h_3(h_3h_4)\}\{(h_4(h_4h_1)\}}} = \frac{2h_1(h_2h_3)[(h_1h_2)]^2}{W}$$

$$b = \frac{2h_2(h_3h_4)[(h_2h_3)]^2}{W},\quad c = \frac{2h_3(h_4h_1)[(h_3h_4)]^2}{W},$$

$$d = \frac{2h_4(h_1h_2)[(h_4h_1)]^2}{W},$$

$$J = \frac{[(h_1h_2)(h_1h_4)]^2}{W},$$

$$R = \frac{2[(h_1h_2)(h_1h_4)]^2}{W^2}\sqrt{(h_1h_2)(h_1h_4)[h_1h_3[(h_1h_2)]^2+h_2h_4[h_1h_4)]^2]}$$

b. Ganz entsprechende Formeln gelten für die von B, C, D, A auf d, a, b, c gefällten Lote:

$$h_1' = \frac{2aJ}{(ad)}, \quad h_2' = \frac{2bJ}{(ab)}, \quad h_3' = \frac{2cJ}{(ad)}, \quad h_4' = \frac{2dJ}{(ab)}$$

Es wird nämlich

$$a = \frac{2h_1'(h_1'h_2')[(h_2'h_3')]^2}{W}, \quad b = \frac{2h_2'(h_2'h_3')[(h_3'h_4')]^2}{W},$$

$$c = \frac{2h_3'(h_3'h_4')[(h_4'h_1')]^2}{W}, \quad d = \frac{2h_4'(h_1'h_1')[(h_1'h_2')]^2}{W}$$

$$J = \frac{[(h_1'h_2')(h_3'h_4')]^2}{W}.$$

$$R = \frac{2[(h_1'h_2')(h_1'h_4')]^2}{W^2}\sqrt{(h_1'h_2')(h_1'h_4')[(h_1'h_3')h_1'h_4')]^2 + h_2'h_4'[(h_1'h_2']^2]}$$

wo

$$W = \sqrt{\{h_1'(h_2'h_3')\}\{h_2'(h_3'h_4')\}\{h_3'(h_4'h_1')\}\{h_4'(h_1'h_2')\}}$$

Man beachte noch die Beziehung

$$h_1h_2h_3h_4 = \frac{16\,abcdJ^4}{[(ab)(ad)]^2} = h_1'h_2'h_3'h_4'$$

2) Für die Lote von Q auf a, von P auf b, von Q auf c und von P auf d gelten die Gleichungen

$$p_1 = \frac{2aJ}{a^2 - c^2}, \quad p_2 = \frac{2bJ}{b^2 - d^2}, \quad p_3 = \frac{2cJ}{a^2 - c^2}, \quad p_4 = \frac{2dJ}{b^2 - d^2}$$

folglich

$$c = a\frac{p_3}{p_1}, \quad d = b\frac{p_4}{p_2}; \quad \frac{p_1}{p_2} = \frac{a(b^2 - d^2)}{b(a^2 - c^2)} = \frac{b}{a} \cdot \frac{p_1^2(p_2^2 - p_4^2)}{p_2^2(p_1^2 - p_4^2)}$$

oder

$$b = a\frac{p_2(p_1^2 - p_3^2)}{p_1(p_2^2 - p_4^2)}, \quad d = a\frac{p_4(p_1^2 - p_3^2)}{p_1(p_2^2 - p_4^2)}$$

Setzt man die Werte für b, c und d in die Formel

$$J = \tfrac{1}{4}\sqrt{\{a\}\{b\}\{c\}\{d\}}$$

ein, so folgt

$$J = \frac{a^2(p_1^2 - p_3^2)}{4p_1^2(p_2^2 - p_4^2)}\sqrt{\{p_1\}\{p_2\}\{p_3\}\{p_4\}} = \frac{a^2(p_1^2 - p_3^2)}{4p_1^2(p_2^2 - p_4^2)} \cdot W$$

Durch Einsetzen der Werte von J und c in $p_1 = \frac{2aJ}{a^2 - c^2}$ ergiebt sich schliesslich

$$a = \frac{2p_1(p_2^2 - p_4^2)}{W}, \quad b = \frac{2p_2(p_1^2 - p_3^2)}{W}, \quad c = \frac{2p_3(p_2^2 - p_4^2)}{W},$$

$$d = \frac{2p_4(p_1^2 - p_3^2)}{W}$$

$$J = \frac{(p_1^2 - p_3^2)(p_2^2 - p_4^2)}{W},$$

$$R = \frac{2\sqrt{(p_1 p_2)(p_1 p_4)[p_1 p_3 (p_2^2 - p_4^2)^2 + p_2 p_4 (p_1^2 - p_3^2)^2]}}{W^2}$$

3) Die Lote von N auf a, b, c, d haben die Werte:

$$n_1 = \frac{2abdJ}{(ab)(ad)}, \quad n_2 = \frac{2abcJ}{(ab)(ad)}, \quad n_3 = \frac{2bcdJ}{(ab)(ad)} \quad n_4 = \frac{2acdJ}{(ab)(ad)}$$

denn es ist

$$\Delta ABN = \tfrac{1}{2} AN . BN . \sin \varepsilon = \frac{a^2 bdJ}{(ab)(ad)}$$

u. s. w. Es wird

$$b = a\frac{n_3}{n_4}, \quad c = a\frac{n_3}{n_1}, \quad d = a\frac{n_3}{n_2}$$

und ebenso wie unter 3)

$$J = \tfrac{1}{4} a^2 n_3^2 \sqrt{\left\{\frac{1}{n_1}\right\}\left\{\frac{1}{n_2}\right\}\left\{\frac{1}{n_3}\right\}\left\{\frac{1}{n_4}\right\}} = \tfrac{1}{4} a^2 n_3^2 W,$$

folglich

$$n_1 = \frac{2abdJ}{(ab)(ad)} = a\frac{n_1^2 n_3^2 n_2 n_4 W}{2(n_1 n_2)(n_1 n_4)}$$

$$a = \frac{2(n_1 n_2)(n_1 n_4)}{n_1 n_2 n_3^2 n_4 W}, \quad b = \frac{2(n_1 n_2)(n_1 n_4)}{n_1 n_2 n_3 n_4^2 W}, \quad c = \frac{2(n_1 n_2)(n_1 n_4)}{n_1^2 n_2 n_3 n_4 W},$$

$$d = \frac{2(n_1 n_2)(n_1 n_4)}{n_1 n_2^2 n_3 n_4 W}$$

$$J = \frac{[(n_1 n_2)(n_1 n_4)]^2}{n_1^2 n_2^2 n_3^2 n_4^2 W},$$

$$f = \frac{2(n_1 n_4)}{n_1 n_2 n_3 n_4 W}\sqrt{\frac{(n_1 n_2)(n_1 n_4)(n_1 n_3)}{n_1 n_2 n_3 n_4}},$$

$$g = \frac{2(n_1 n_2)}{n_1 n_2 n_3 n_4 W}\sqrt{\frac{(n_1 n_2)(n_1 n_4)(n_1 n_3)}{n_1 n_2 n_3 n_4}},$$

$$h = \frac{2[(n_1 n_2)(n_1 n_4)]^2 \sqrt{n_1 n_2 n_3 n_4}}{n_1^2 n_2^2 n_3^2 n_4^2 W \sqrt{(n_1 n_2)(n_1 n_4)(n_1 n_3)}},$$

$$R = \frac{2(n_1 n_2)(n_1 n_4)\sqrt{n_1 n_2 n_3 n_4 (n_1 n_2)(n_1 n_4)(n_1 n_3)}}{n_1^3 n_2^3 n_3^3 n_4^3 W^2}.$$

4) Für die 4 Lote vom Mittelpunkt M des umschriebenen Kreis auf a, b, c, d gilt:

$$\gamma_1 = R\cos ACB = \frac{a(b^2+c^2+d^2-a^2)+2bcd}{8J}$$

analog

$$\gamma_2 = \frac{b(a^2+c^2+d^2-b^2)+2acd}{8J}, \quad \gamma_3 = \frac{c(a^2+b^2+d^2-c^2)+2abd}{8J},$$

$$\gamma_4 = \frac{d(a^2+b^2+c^2-d^2)+2abc}{8J}$$

und es ist

$$\gamma_1+\gamma_2 = \tfrac{1}{2}(a+b)\sqrt{\frac{\{a\}\{b\}}{\{c\}\{d\}}}, \quad \gamma_2-\gamma_1 = \tfrac{1}{2}(a-b)\sqrt{\frac{\{c\}\{d\}}{\{a\}\{b\}}}$$

$$\gamma_2+\gamma_3 = \tfrac{1}{2}(b+c)\sqrt{\frac{\{b\}\{c\}}{\{a\}\{d\}}}, \quad \gamma_3-\gamma_2 = \tfrac{1}{2}(b-c)\sqrt{\frac{\{a\}\{d\}}{\{b\}\{c\}}}$$

$$\gamma_3+\gamma_4 = \tfrac{1}{2}(c+d)\sqrt{\frac{\{c\}\{d\}}{\{a\}\{b\}}}, \quad \gamma_4-\gamma_3 = \tfrac{1}{2}(c-d)\sqrt{\frac{\{a\}\{b\}}{\{c\}\{d\}}}$$

$$\gamma_1+\gamma_4 = \tfrac{1}{2}(a+d)\sqrt{\frac{\{a\}\{d\}}{\{b\}\{c\}}}, \quad \gamma_4-\gamma_1 = \tfrac{1}{2}(a-d)\sqrt{\frac{\{b\}\{c\}}{\{a\}\{d\}}}$$

$$\gamma_1+\gamma_3 = \tfrac{1}{2}(a+c)\sqrt{\frac{\{a\}\{c\}}{\{b\}\{d\}}}, \quad \gamma_3-\gamma_1 = \tfrac{1}{2}(a-c)\sqrt{\frac{\{b\}\{d\}}{\{a\}\{c\}}}$$

$$\gamma_2+\gamma_4 = \tfrac{1}{2}(b+d)\sqrt{\frac{\{b\}\{d\}}{\{a\}\{c\}}}, \quad \gamma_4-\gamma_2 = \tfrac{1}{2}(b-d)\sqrt{\frac{\{a\}\{c\}}{\{b\}\{d\}}}$$

$$\gamma_2^2-\gamma_1^2 = \tfrac{1}{4}(a^2-b^2), \quad \gamma_3^2-\gamma_2^2 = \tfrac{1}{4}(b^2-c^2), \quad \gamma_4^2-\gamma_3^2 = \tfrac{1}{4}(c^2-d^2),$$
$$\gamma_4^2-\gamma_1^2 = \tfrac{1}{4}(a^2-d^2), \quad \gamma_3^2-\gamma_1^2 = \tfrac{1}{4}(a^2-c^2), \quad \gamma_4^2-\gamma_2^2 = \tfrac{1}{4}(b^2-d^2);$$

$$(\gamma_1+\gamma_2)(\gamma_3+\gamma_4) = \frac{(a+b)(c+d)}{4} \text{ (I)}, \quad (\gamma_1+\gamma_4)(\gamma_2+\gamma_3) = \frac{(a+d)(b+c)}{4} \text{ (II)}$$

$$(\gamma_1+\gamma_3)(\gamma_2+\gamma_4) = \frac{(a+c)(b+d)}{4} \text{ (III)}$$

(I) + (II) − (III) ergiebt $4(\gamma_1\gamma_3) = (ac)$ (1)
(I) + (III) − (II) „ $4(\gamma_1\gamma_4) = (ad)$ (2)
(II) + (III) − (I) „ $4(\gamma_1\gamma_2) = (ab)$ (3).

Aus (1) und (2) folgt durch Elimination von d

$$4a(\gamma_1\gamma_3) - 4b(\gamma_1\gamma_4) = c(a^2-b^2) = 4c(\gamma_2^2-\gamma_1^2)$$

oder

$$a(\gamma_1\gamma_3) - b(\gamma_1\gamma_4) = c(\gamma_2^2-\gamma_1^2) \quad (\alpha)$$

ebenso aus (1) und (3)

$$b(\gamma_1\gamma_2) - c(\gamma_1\gamma_3) = a(\gamma_3^2-\gamma_2^2) \quad (\beta)$$

aus (α) und (β) aber folgt durch Elimination von c

$$b = a\frac{(\gamma_2^2-\gamma_1^2(\gamma_3^2-\gamma_2^2)+(\gamma_1\gamma_3)^2}{(\gamma_1\gamma_2)(\gamma_2^2-\gamma_1^2+(\gamma_1\gamma_2(\gamma_1\gamma_4)} = a\frac{\gamma_2(\gamma_1^2+\gamma_3^2+\gamma_4^2-\gamma_2^2)+2\gamma_1\gamma_3\gamma_4}{\gamma_1(\gamma_2^2+\gamma_3^2+\gamma_4^2-\gamma_1^2)+2\gamma_2\gamma_3\gamma_4}$$
$$= \frac{N}{M}$$

aus $\gamma_2^2-\gamma_1^2 = \frac{1}{4}(a^2-b^2)$ folgt andrerseits $b^2 = a^2-4(\gamma_2^2-\gamma_1^2)$, so dass

$$a^3-4(\gamma_2^2-\gamma_1^2) = a^2\frac{N^2}{M^2}$$

oder

$$\frac{a^2}{M^2}(M^2-N^2] = 4(\gamma_2^2-\gamma_1^2)$$

wird. Da nun

$$M+N = (\gamma_1+\gamma_2)\{\gamma_1\}\{\gamma_2\} \quad \text{und} \quad M-N = (\gamma_2-\gamma_1)\{\gamma_3\}\{\gamma_4\}$$

also

$$M^2-N^2 = (\gamma_2^2-\gamma_1^2)\{\gamma_1\}\{\gamma_2\}\{\gamma_3\}\{\gamma_4\} = (\gamma_2^2-\gamma_1^2)W^2$$

ist, so hat man

$$a = \frac{2[\gamma_1(\gamma_2^2+\gamma_3^2+\gamma_4^2-\gamma_1^2)+2\gamma_2\gamma_3\gamma_4}{W},$$

$$b = \frac{2[\gamma_2(\gamma_1^2+\gamma_3^2+\gamma_4^2-\gamma_2^2)+2\gamma_1\gamma_3\gamma_4]}{W},$$

$$c = \frac{2[\gamma_3(\gamma_1^2+\gamma_3^2+\gamma_4^2-\gamma_3^2)+2\gamma_1\gamma_2\gamma_4]}{W},$$

$$d = \frac{2[\gamma_4(\gamma_1^2+\gamma_2^2+\gamma_3^2-\gamma_4^2)+2\gamma_1\gamma_2\gamma_3]}{W}.$$

Hieraus ergiebt sich:

$$a\gamma_1+b\gamma_2+c\gamma_3+d\gamma_4 = 2W$$

andrerseits folgt einfach aus geometrischen Gründen:

$$a\gamma_1+b\gamma_2+c\gamma_3+d\gamma_4 = 2J$$

demnach

$$J = W = \sqrt{\{\gamma_1\}\{\gamma_2\}\{\gamma_3\}\{\gamma_4\}}$$

Aus den Gleichungen (1), (2), (3) folgt ferner:

$$f = 2\sqrt{\frac{(\gamma_1\gamma_3)(\gamma_1\gamma_4)}{(\gamma_1\gamma_2)}}, \quad g_2 = \sqrt{\frac{(\gamma_1\gamma_3)(\gamma_1\gamma_2)}{(\gamma_1\gamma_4)}}, \quad h_2 = \sqrt{\frac{(\gamma_1\gamma_2)(\gamma_1\gamma_4)}{(\gamma_1\gamma_3)}}$$

$$R = \frac{2\sqrt{(\gamma_1\gamma_2)(\gamma_1\gamma_4)(\gamma_1\gamma_3)}}{W}.$$

Liegt a mit den andern Seiten b, c, d in einem Halbkreis und ist grösser als jede derselben, so ist $\cos ACB$ negativ; demgemäss ist

alsdann in den vorigen Formeln γ_1 überall negativ zu setzen, ohne dass dieselben eine weitere Aenderung erleiden.

Man beachte noch die Gleichungen

$$a\gamma_2+b\gamma_1=\frac{(ac)(ad)}{4J}=c\gamma_4+d\gamma_3$$

$$b\gamma_3+c\gamma_2=\frac{(ac)(ab)}{4J}=d\gamma_1+a\gamma_4$$

$$a\gamma_3+c\gamma_1=\frac{(ab)(ad)}{4J}=b\gamma_4+d\gamma_2$$

5) Bekanntlich [1]) schneiden sich die Lote von den Mitten der Seiten des Sehnenvierecks auf die gegenüberliegenden Seiten in einem Punkte. Die Werte dieser Lote sind leicht zu berechnen Denn ist M_1 die Mitte von a, so ist

$$s_1=PM_1\sin APD=\left(\frac{a}{2}+\frac{d(ad)}{b^2-d^2}\right)\frac{2J(b^2-d^2)}{(ab)(ad)}=\frac{J[a(b^2+d^2)+2bcd]}{(ab)(ad)}$$

analog

$$s_2=\frac{J[b(a^2+c^2)+2acd]}{(ab)(ad)},\qquad s_3=\frac{J[c(b^2+d^2)+2abd]}{(ab)(ad)},$$

$$s_4=\frac{J[d(a^2+c^2)+2abc]}{(ab)(ad)}$$

Mithin

$$s_1+s_3=\frac{J(a+c)(b+d)^2}{(ab)(ad)},\qquad s_1-s_3=\frac{J(a-c)(b-d)^2}{(ab)(ad)},$$

$$s_2+s_4=\frac{J(b+d)(a+c)^2}{(ab)(ad)},\qquad s_2-s_4=\frac{J(b-d)(a-c)^2}{(ab)(ad)},$$

$$\frac{s_1+s_3}{s_2+s_4}=\frac{b+d}{a+c}$$

oder

$$b+d=(a+c)\frac{s_1+s_3}{s_2+s_4},\qquad \frac{s_1-s_3}{s_2-s_4}=\frac{b-d}{a-c}$$

ferner

$$b-d=(a-c)\frac{s_1-s_3}{s_2-s_4};\qquad \frac{(s_1+s_3)(s_2+s_4)}{(s_1-s_3)(s_2-s_4)}=\frac{(a+c)^3(b+d)^3}{(a-c)^3(b-d)^3}$$

also

$$\sqrt[3]{\frac{(s_1+s_3)(s_2+s_4)}{(s_1-s_3)(s_2-s_4)}}=\frac{(a+c)(b+d)}{(a-c)(b-d)}$$

oder wenn man die eben gefundenen Werte von $b+d$ und $b-d$ einsetzt,

---

1) Kunze, a. a. O. S. 138.

$$\sqrt[3]{\frac{(s_1+s_3)(s_2+s_4)}{(s_1-s_3)(s_2-s_4)}} = \frac{(a+c)^2(s_1+s_3)(s_2-s_4)}{(a-c)^2(s_1-s_3)(s_2+s_4)}$$

folglich

$$\left(\frac{a+c}{a-c}\right)^2 = \sqrt[3]{\frac{(s_1-s_3)^2(s_2+s_4)^4}{(s_1+s_3)^2(s_2-s_4)^4}}$$

oder

$$\frac{a+c}{a-c} = \sqrt[3]{\frac{(s_1-s_3)(s_2+s_4)^2}{(s_1+s_3)(s_2-s_4)^2}}$$

woraus

$$c = a\frac{\sqrt[3]{(s_1-s_3)(s_2+s_4)^2} - \sqrt[3]{(s_1+s_3)(s_2-s_4)^2}}{\sqrt[3]{(s_1-s_3)(s_2+s_4)^2} + \sqrt[3]{(s_1+s_3)(s_2-s_4)^2}}$$

$$= a\frac{(s_2+s_4)\sqrt[3]{M} - (s_2-s_4)\sqrt[3]{N}}{(s_2+s_4)\sqrt[3]{M} + (s_2-s_4)\sqrt[3]{N}}$$

wo M für $\sqrt[3]{\frac{s_1-s_3}{s_2+s_4}}$ und N für $\sqrt[3]{\frac{s_1+s_3}{s_2-s_4}}$ gesetzt ist; also wird

$$a+c = a\frac{2(s_2+s_4)\sqrt[3]{M}}{(s_2+s_4)\sqrt[3]{M} + (s_2-s_4)\sqrt[3]{N}}$$

Nun ist einerseits

$$4J = \sqrt{[(a+c)^2-(b-d)^2][(b+d)^2-(a-c)^2]}$$

$$= \sqrt{\left[(a+c)^2-(a-c)^2\left(\frac{s_1-s_3}{s_2-s_4}\right)^2\right]\left[(a+c)^2\left(\frac{s_1+s_3}{s_2+s_4}\right)^2-(a-c)^2\right]}$$

oder da

$$a-c = (a+c)\sqrt[3]{\frac{(s_1+s_3)(s_2-s_4)^2}{(s_1-s_3)(s_2+s_4)^2}} = (a+c)\frac{s_2-s_4}{s_2+s_4}\sqrt[3]{\frac{N}{M}} \quad \text{ist,}$$

$$4J = (a+c)^2\sqrt{\left[1-\frac{(s_1-s_3)^2}{(s_2+s_4)^2}\sqrt[3]{\frac{N^2}{M^2}}\right]\left[\frac{(s_1+s_3)^2}{(s_2+s_4)^2} - \frac{(s_2-s_4)^2}{(s_2+s_4)^2}\sqrt[3]{\frac{N^2}{M^2}}\right]}$$

$$= \frac{4a^2W}{[(s_2+s_4)\sqrt[3]{M} + (s_2-s_4)\sqrt[3]{N}]^2}$$

wo

$$W = \sqrt{[(s_2+s_4)^2\sqrt[3]{M^2} - (s_1-s_3)^2\sqrt[3]{N^2}][(s_1+s_3)^2\sqrt[3]{M^2} - (s_2-s_4)^2\sqrt[3]{N^2}]}$$

andrerseits folgt aus den Werten von s_1 und s_3

$$2J = as_3 + cs_1 = a\,\frac{(s_1+s_3)(s_2+s_4)\sqrt[3]{M} - (s_1-s_3)(s_2-s_4)\sqrt[3]{N}}{(s_2+s_4)\sqrt[3]{M} + (s_2-s_4)\sqrt[3]{N}};$$

die Gleichsetzung der Werte von J ergiebt

$$a = \frac{[(s_2+s_4)\sqrt[3]{M} + (s_2-s_4)\sqrt[3]{N}]\,[(s_1+s_3)(s_2+s_4)\sqrt[3]{M} - (s_1-s_3)(s_2-s_4)\sqrt[3]{N}]}{2W}$$

durch cyklische Vertauschung von s_1, s_2, s_3, s_4 und einige Umformungen gewinnt man die Werte

$$b = \frac{[(s_1+s_3)\sqrt[3]{M} + (s_1-s_3)\sqrt[3]{N}]\,[(s_1+s_3)(s_2+s_4)\sqrt[3]{M} - (s_1-s_3)(s_2-s_4)\sqrt[3]{N}]}{2W},$$

$$c = \frac{[(s_2+s_4)\sqrt[3]{M} - (s_2-s_4)\sqrt[3]{N}]\,[(s_1+s_3)(s_2+s_4)\sqrt[3]{M} - (s_1-s_3)(s_2-s_4)\sqrt[3]{N}]}{2W},$$

$$d = \frac{[(s_1+s_3)\sqrt[3]{M} - (s_1-s_3)\sqrt[3]{N}]\,[(s_1+s_3)(s_2+s_4)\sqrt[3]{M} - (s_1-s_3)(s_2-s_4)\sqrt[3]{N}]}{2W}$$

Aus der zweiten der obigen Gleichungen für J folgt ohne weiteres

$$J = \frac{[(s_1+s_3)(s_2+s_4)\sqrt[3]{M} - (s_1-s_3)(s_2-s_4)\sqrt[3]{N}]^2}{4W}$$

Zu beachten sind noch die Gleichungen

$$as_1 + cs_3 = bs_2 + ds_4 \quad \text{und} \quad as_3 + cs_1 = bs_4 + ds_2 = 2J$$

6) In jedem Viereck halbiren sich die Verbindungslinien der Mitten der gegenüberliegenden Seiten und die Verbindungslinie der Diagonalenmitten in einem Punkte [1]), der zugleich den Schwerpunkt der vier Ecken darstellt. Für die Lote von diesem Punkte auf c, d, a, b gelten, wie geometrisch sofort einzusehen ist, die Beziehungen:

$$k_1 = \tfrac{1}{2}s_1, \quad k_2 = \tfrac{1}{2}s_2, \quad k_3 = \tfrac{1}{2}s_3, \quad k_4 = \tfrac{1}{2}s_4$$

es gelten demnach für die k dieselben Formeln wie für die s, mit dem einzigen Unterschied, dass in den Ausdrücken für a, b, c, d der Factor 2 und im Ausdruck für J der Factor 4 im Nenner fehlt.

---

1) Kunze, a. a. O. S. 58.

7) Für die Gerade w_1, welche Wkl. ANB halbirt und von a begrenzt wird, findet man leicht:

$$w_1 = \frac{a}{h(b+d)}\sqrt{bd[(b+d)^2 - h^2]}$$

oder wenn man berücksichtigt, dass

$$(b+d)^2 - h^2 = \frac{bd\{a\}\{c\}}{(ac)} \quad \text{ist,}$$

$$w_1 = \frac{abd}{b+d}\sqrt{\frac{\{a\}\{c\}}{(ab)(ad)}}$$

analog die andern Halbirungslinien:

$$w_2 = \frac{abc}{a+c}\sqrt{\frac{\{b\}\{d\}}{(ab)(ad)}}, \quad w_3 = \frac{bcd}{b+d}\sqrt{\frac{\{a\}\{c\}}{(ab)(ad)}}, \quad w_4 = \frac{acd}{a+c}\sqrt{\frac{\{b\}\{d\}}{(ab)(ad)}}$$

Also

$$c = a\frac{w_3}{w_1}, \quad d = b\frac{w_4}{w_2}$$

Setzt man diese Werte in die Gleichung

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{d(a+c)}{c(b+d)}\sqrt{\frac{\{a\}\{c\}}{\{b\}\{d\}}}$$

ein, so erhält man eine Gleichung ersten Grades in $\frac{a^2}{b^2}$, aus der sich ergiebt:

$$b = a\frac{w_2(w_1+w_3)}{w_1(w_2+w_4)}\sqrt{\frac{w_2^2w_4^2(w_1-w_3)^2+w_1^2w_3^2(w_2+w_4)^2}{w_1^2w_3^2(w_2-w_4)^2+w_2^2w_4^2(w_1+w_3)^2}}$$

$$= a\frac{w_2(w_1+w_3)}{w_1(w_2+w_4)}\sqrt{\frac{N}{M}}$$

Setzt man schliesslich in die Gleichung für w_1 erst die Werte für c und d, dann den eben gefundenen Wert von b ein, so erhält man nach einigen Umformungen:

$$a = \frac{w_2+w_4}{2w_2w_3w_4}\sqrt{M}, \quad \text{analog} \quad b = \frac{w_1+w_3}{2w_1w_3w_4}\sqrt{N}, \quad c = \frac{w_2+w_4}{2w_1w_2w_3}\sqrt{M},$$

$$d = \frac{w_1+w_3}{2w_1w_2w_3}\sqrt{N}$$

Da nun

$$\sqrt{w_1w_2w_3w_4} = \frac{4abcdJ\sqrt{abcd}}{(a+c)(b+d)(ab)(ad)}$$

ist, so wird

$$J = \frac{(a+c)(b+d)(ab)(ad)\sqrt{w_1 w_2 w_3 w_4}}{4abcd\sqrt{abcd}} = \frac{(w_1+w_3)(w_2+w_4)(w_1 w_2)(w_1 w_4)}{4 w_1 w_2 w_3 w_4}$$

8) Für die Halbirungslinien der Winkel Q und P, die zu den Dreiecken ABQ, BCP, CDQ, ADP gehören, findet man:

$$u_1 = \frac{a\sqrt{(ab)(ad)\{a\}\{c\}}}{(b+d)(a^2-c^2)}, \quad u_2 = \frac{b\sqrt{(ab)(ad)\{b\}\{d\}}}{(a+c)(b^2-d^2)},$$

$$u_3 = \frac{c\sqrt{(ab)(ad)\{a\}\{c\}}}{(b+d)(a^2-c^2)}, \quad u_4 = \frac{d\sqrt{(ab)(ad)\{b\}\{d\}}}{(a+c)(b^2-d^2)}$$

also

$$c = a\frac{u_3}{u_1}, \quad d = b\frac{u_4}{u_2};$$

$$u_1 - u_3 = \frac{\sqrt{(ab)(ad)\{a\}\{c\}}}{(a+c)(b+d)}, \quad u_2 - u_4 = \frac{\sqrt{(ab)(ad)\{b\}\{d\}}}{(a+c)(b+d)};$$

$$\frac{u_1-u_3}{u_2-u_4} = \sqrt{\frac{\{a\}\{c\}}{\{b\}\{d\}}} = \sqrt{\frac{(b+d)^2-(a-c)^2}{(a+c)^2-(b-d)^2}}$$

was durch Einsetzen der Werte von c und d eine Gleichung ersten Grades in $\frac{b^2}{a^2}$ liefert, aus der folgt

$$b^2 = a^2 \frac{u_2^2(u_1-u_3)^2[(u_1+u_3)^2+(u_2-u_4)^2]}{u_1^2(u_2-u_4)^2[(u_2+u_4)^2+(u_1-u_3)^2]}$$

setzt man jetzt in den obigen Wert für u_1 erst die Werte von c und d, dann den zuletzt gefundenen Wert für b^2 ein, so ergiebt sich nach den gehörigen Umformungen

$$a = \frac{u_1(u_1+u_3)(u_2^2-u_4^2)^2\sqrt{(u_2+u_4)^2+(u_1-u_3)^2}}{2(u_1u_2)(u_1u_4)};$$

analog

$$b = \frac{u_2(u_2+u_4)(u_1^2-u_3^2)^2\sqrt{(u_1+u_3)^2+(u_2-u_4)^2}}{2(u_1u_2)(u_1u_4)},$$

$$c = \frac{u_3(u_1+u_3)(u_2^2-u_4^2)^2\sqrt{(u_2+u_4)^2+(u_1-u_3)^2}}{2(u_1u_2)(u_1u_4)},$$

$$d = \frac{u_4(u_2+u_4)(u_1^2-u_3^2)^2\sqrt{(u_1+u_3)^2+(u_2-u_4)^2}}{2(u_1u_2)(u_1u_4)}$$

Nun ist

$$\sqrt{u_1 . u_2 . u_3 . u_4} = \frac{(ab)(ad)\,4J\sqrt{abcd}}{(a+c)(b+d)(a^2-c^2)(b^2-d^2)}$$

$$= \frac{(u_1u_2)(u_1u_4)\,4J\sqrt{u_1u_2u_3u_4}}{(u_1+u_3)(u_2+u_4)(u_1^2-u_3^2)(u_2^2-u_4^2)}$$

also

$$J = \frac{(u_1+u_3)(u_2+u_4)(u_1^2-u_3^2)(u_2^2-u_4^2)}{4(u_1u_2)(u_1u_4)}$$

9) Die Verbindungslinien des Schnittpunktes N der Diagonalen mit den Mitten der vier Seiten sind:

$$t_1 = \frac{a}{2h}\sqrt{2b^2+2d^2-h^2}, \quad t_2 = \frac{b}{2h}\sqrt{2a^2+2c^2-h^2},$$

$$t_3 = \frac{c}{2h}\sqrt{2b^2+2d^2-h^2}, \quad t_4 = \frac{d}{2h}\sqrt{2a^2+2c^2-h^2}$$

also

$$c = a\frac{t_3}{t_1}, \quad d = b\frac{t_4}{t_2}$$

und es wird durch diese Substitution

$$h = \sqrt{\frac{(ab)(ad)}{(ac)}} = ab\sqrt{\frac{(t_1t_2)(t_1t_4)}{t_1t_2(a^2t_2t_3+b^2t_1t_4)}}$$

setzt man diesen Wert in die Werte für t_1 und t_2 ein und quadrirt, so gelangt man zu den beiden Gleichungen

$$4t_1^2t_2(t_1t_2)(t_1t_4) = a^2t_2[t_1t_3(t_2^2+t_4^2)-t_2t_4(t_1^2+t_3^2)]+2b^2t_1^2t_4(t_2^2+t_4^2)$$
$$4t_1t_2^2(t_1t_2)(t_1t_4 = 2a^2t_2^2t_3(t_1^2+t_3^2) -b^2t_1[t_1t_3(t_2^2+t_4^2)-t_1t_4(t_1^2+t_3^2)]$$

aus denen durch Elimination von b^2 hervorgeht

$$a^2 = 4t_1^2 . \frac{t_1t_3(t_2^2+t_4^2)-t_2t_4(t_1^2+t_3^2)+2t_2t_4(t_2^2+t_4^2)}{(t_1t_2)(t_1t_4)},$$

analog

$$b^2 = 4t_2^2 . \frac{t_2t_4(t_1^2+t_3^2)-t_1t_3(t_2^2+t_4^2)+2t_1t_3(t_1^2+t_3^2)}{(t_1t_2)(t_1t_4)},$$

$$c^2 = 4t_3^2 . \frac{t_1t_3(t_2^2+t_4^2)-t_2t_4(t_1^2+t_3^2)+2t_2t_4(t_2^2+t_4^2)}{(t_1t_2)(t_1t_4)},$$

$$d^2 = 4t_4 . \frac{t_2t_4(t_1^2+t_3^2)-t_1t_3(t_2^2+t_4^2)+2t_1t_3(t_1^2+t_3^2)}{(t_1t_2)(t_1t_4)}$$

Nun ist

$$4J = \sqrt{[(a+c)^2-(b-d)^2][(b+d)^2-(a-c)^2]}$$

$$= \sqrt{a^2\frac{(t_1+t_3)^2}{t_1^2} - b^2\frac{(t_2-t_4)^2}{t_2^2}\; b^2\frac{t_2+t_4)^2}{t_2^2} - a^2\frac{(t_1-t_3)^2}{t_1^2}}$$

$$= 4\sqrt{\frac{(t_1t_2)(t_1t_4)[(t_2+t_4)^2-(t_1-t_3)^2]}{(t_1t_2)(t_1t_4)}\cdot\frac{(t_1t_2)(t_1t_4)[(t_1+t_3)^2-(t_2-t_4)^2]}{(t_1t_2)(t_1t_4)}}$$

also

$$J = \sqrt{|t_1|\,|t_2|\,|t_3|\,|t_4|}$$

10) Die Verbindungslinien von Q und P mit den Mitten von a, b, c, d sind

$$\tau_1 = \frac{a}{2(a^2-c^2)}\sqrt{2[(ab)]^2+2[(ad)]^2-(a^2-c^2)^2},$$

$$\tau_2 = \frac{b}{2(b^2-d^2)}\sqrt{2[(ab)]^2+2[(ad)]^2-(b^2-d^2)^2},$$

$$\tau_3 = \frac{c}{2(a^2-c^2)}\sqrt{2[(ab)]^2+2[(ad)]^2-(a^2-c^2)^2},$$

$$\tau_4 = \frac{d}{2(b^2-d^2)}\sqrt{2[(ab)]^2+2[(ad)]^2-(b^2-d^2)^2}$$

also

$$c = a\frac{\tau_3}{\tau_1}, \quad d = b\frac{\tau_4}{\tau_2}$$

durch Einführung dieser Werte in τ_1 und τ_2 ergeben sich für b^2 die beiden Ausdrücke

$$b^2 = \frac{\tau_2^2(\tau_1^2-\tau_3^2)^2(a^2+4\tau_1^2)}{2\tau_1^2([(\tau_1\tau_2)]^2+[(\tau_1\tau_4)]^2)}$$

$$= \frac{2a^2\tau_2^2([(\tau_1\tau_2)]^2+[(\tau_1\tau_4)]^2)-4\tau_1^2\tau_2^2(\tau_2^2-\tau_4^2)^2}{\tau_1^2(\tau_2^2-\tau_4^2)^2}$$

aus denen folgt

$$a^2 = \frac{4\tau_1^2(\tau_2^2-\tau_4^2)^2(2[(\tau_1\tau_2)]^2+2[(\tau_1\tau_4)]^2+[\tau_1^2-\tau_3^2]^2)}{4([(\tau_1\tau_2)]^2+[(\tau_1\tau_4)]^2)^2-(\tau_1^2-\tau_3^2)^2(\tau_2^2-\tau_4^2)^2}$$

$$= \frac{4\tau_1^2(\tau_2^2-\tau_4^2)^2(2[(\tau_1\tau_2)]^2+2[(\tau_1\tau_4)]^2+[\tau_1^2-\tau_3^2]^2)}{(2[(\tau_1\tau_2)]^2+2[(\tau_1\tau_4)]^2+[\tau_1^2-\tau_3^2][\tau_2^2-\tau_4^2])(2[(\tau_1\tau_2)]^2+2[(\tau_1\tau_4)]^2-[\tau_1^2-\tau_3^2][\tau_2^2-\tau_4^2])}$$

$$= 4\tau_1^2\cdot\frac{(\tau_2^2-\tau_4^2)^2(2[(\tau_1\tau_2)]^2+2[(\tau_1\tau_4)]^2+[\tau_1^2-\tau_3^2]^2)}{(3[(\tau_1\tau_2)]^2+[(\tau_1\tau_4)]^2)([(\tau_1\tau_2)]^2+3[(\tau_1\tau_4)]^2)};$$

$$c^2 = a^2\frac{\tau_3^2}{\tau_1^2}$$

analog

$$b^2 = 4\tau_2^2 \cdot \frac{(\tau_1^2-\tau_2^2)^2(2[(\tau_1\tau_2)]^2+2[(\tau_1\tau_4)]^2+[\tau_2^2-\tau_4^2]^2)}{(3[(\tau_1\tau_2)]^2+[(\tau_1\tau_4)]^2)([(\tau_1\tau_2)]^2+3[(\tau_1\tau_4)]^2)};$$

$$d^2 = b^2\frac{\tau_4^2}{\tau_2^2}$$

Die Formel für den Inhalt kann auf dieselbe Weise wie unter 9) gefunden werden, ergiebt aber keine einfache Gestalt.

11) Aus

$$\Delta ABN = \frac{a^2bdJ}{(ab)(ad)}, \quad \Delta BCN = \frac{ab^2cJ}{(ab)(ad)}, \quad \Delta CDN = \frac{bc^2dJ}{(ab)(ad)},$$

$$\Delta ADN = \frac{acd^2J}{(ab)(ad)}$$

(s. Nr. 3)) ergiebt sich für die Radien der diesen Dreiecken umgeschriebenen Kreise:

$$\Pi_1 = \frac{a(ac)}{4J}, \quad \Pi_2 = \frac{b(ac)}{4J}, \quad \Pi_3 = \frac{c(ac)}{4J}, \quad \Pi_4 = \frac{d(ac)}{4J}$$

also

$$\Pi_1 : \Pi_2 : \Pi_3 : \Pi_4 = a : b : c : d,$$

$$b = a\frac{\Pi_2}{\Pi_1}, \quad c = a\frac{\Pi_3}{\Pi_1}, \quad d = a\frac{\Pi_4}{\Pi_1};$$

setzt man diese Werte in Π_1 ein, so folgt ohne weiteres

$$a = \Pi_1 \cdot \frac{\sqrt{\{\Pi_1\}\{\Pi_2\}\{\Pi_3\}\{\Pi_4\}}}{(\Pi_1\Pi_3)}$$

analog

$$b = \Pi_2 \cdot \frac{W}{(\Pi_1\Pi_3)}, \quad c = \Pi_3 \cdot \frac{W}{(\Pi_1\Pi_3)}, \quad d = \Pi_4 \cdot \frac{W}{(\Pi_1\Pi_3)};$$

$$J = \frac{W^3}{4[(\Pi_1\Pi_3)]^2}; \quad R = \sqrt{\frac{(\Pi_1\Pi_2)(\Pi_1\Pi_4)}{(\Pi_1\Pi_3)}}$$

12) Die Radien der den Dreiecken ABQ, BCP, CDQ, ADP umgeschriebenen Kreise sind:

$$R_1 = \frac{ahR}{a^2-c^2}, \quad R_2 = \frac{bhR}{b^2-d^2}, \quad R_3 = \frac{chR}{a^2-c^2}, \quad R_4 = \frac{dhR}{b^2-d^2}$$

also

$$c = a\frac{R_3}{R_1}, \quad d = b\frac{R_4}{R_2}; \quad R_1+R_3 = \frac{hR}{a-c}, \quad R_2+R_4 = \frac{hR}{b-d};$$

$$\frac{R_2+R_4}{R_1+R_3} = \frac{a-c}{b-d} = \frac{a}{b}\cdot\frac{R_2(R_1-R_3)}{R_1(R_2-R_4)};$$

also

$$b = a\frac{R_2(R_1^2-R_3^2)}{R_1(R_2^2-R_4^2)}, \quad d = b\frac{R_4}{R_2} = a\frac{R_4(R_1^2-R_3^2)}{R_1(R_2^2-R_4^2)}$$

wir setzen jetzt die Werte von b, c, d in J ein und erhalten

$$4J = \frac{a^2(R_1^2-R_3^2)}{R_1^2(R_2^2-R_4^2)}\sqrt{\{R_1\}\{R_2\}\{R_3\}\{R_4\}} = \frac{a^2(R_1^2-R_3^2)}{R_1^2(R_2^2-R_4^2)}\cdot W$$

endlich führen wir die Werte von b, c, d und J ein in

$$R_1 = \frac{ahR}{a^2-c^2} = \frac{a(ab)(ad)}{4J(a^2-c^2)}$$

und erhalten

$$a = R_1\cdot\frac{(R_2^2-R_4^2)W}{(R_1R_2)(R_1R_4)} \quad \text{analog} \quad b = R_2\cdot\frac{(R_1^2-R_3^2)W}{(R_1R_2)(R_1R_4)}$$

$$c = R_3\cdot\frac{(R_2^2-R_4^2)W}{(R_1R_2)(R_1R_4)} \qquad d = R_4\cdot\frac{(R_1^2-R_3^2)W}{(R_1R_2)(R_1R_4)};$$

$$4J = \frac{(R_1^2-R_3^2)(R_2^2-R_4^2)W^3}{[(R_1R_2)(R_1R_4)]^2},$$

$$R = \sqrt{\frac{R_1R_3(R_2^2-R_4^2)^2+R_2R_4(R_1^2-R_3^2)^2}{(R_1R_2)(R_1R_4)}}$$

13) Derjenige Kreis, welcher a von aussen, b und d von innen berührt, teilt a in zwei Abschnitte, von denen der an b liegende m_1, der an d liegende m_1' heisse; für dieselben gilt

$$m_1 = \frac{a\{b\}}{2(a+c)}, \quad m_1' = \frac{a\{d\}}{2(a+c)}$$

entsprechend gilt für die Abschnitte von b, c und d

$$m_2 = \frac{b\{c\}}{2(b+d)}, \quad m_2' = \frac{b\{a\}}{2(b+d)}; \quad m_3 = \frac{c\{d\}}{2(a+c)}, \quad m_3' = \frac{c\{b\}}{2(a+c)};$$

$$m_4 = \frac{d\{a\}}{2(b+d)}, \quad m_4' = \frac{d\{c\}}{2(b+d)}$$

a. Es gilt

$$m_1+m_2-m_3-m_4 = a-c, \qquad m_2+m_3-m_1-m_4 = b-d,$$
$$am_3+cm_1 = ac, \qquad bm_4+dm_2 = bd$$

hieraus folgt leicht

$$a = \tfrac{1}{2}(m_2+2m_1-m_4+\sqrt{(m_4-m_2)^2+4m_1m_3}\,)$$

analog

$$b = \tfrac{1}{2}(m_3 + 2m_2 - m_1 + \sqrt{(m_1 - m_3)^2 + 4m_2m_4}\ )$$

$$c = \tfrac{1}{2}(m_4 + 2m_3 - m_2 + \sqrt{(m_2 - m_4)^2 + 4m_1m_3}\ )$$

$$d = \tfrac{1}{2}(m_1 + 2m_4 - m_3 + \sqrt{(m_3 - m_1)^2 + 4m_1m_3}\ )$$

Um die Vorzeichen der Wurzeln zu bestimmen, untersuchen wir zunächst, ob in dem Ausdruck für a die Wurzel grösser als $m_2 + 2m_1 - m_4$ sein kann; man findet leicht, dass das der Fall ist, wenn $m_1 + m_2 - m_3 - m_4 < 0$ ist, was jederzeit möglich ist; in diesem Falle kann also nur das positive Wurzelzeichen Geltung haben; dann muss aber auch im Ausdruck für c dasselbe Vorzeichen genommen werden zufolge der Gleichung $a - c = m_1 + m_2 - m_3 - m_4$. Ist jedoch $m_1 + m_2 - m_3 - m_4 > 0$, so ist im Ausdruck für c die Wurzel grösser als $m_4 + 2m_3 - m_2$, die Wurzel darf dann also wiederum nur das positive Vorzeichen erhalten und infolge dessen auch in a. Analog ist es bei b und d, so dass alle vier Wurzeln stets positiv zu nehmen sind (auch wenn $m_1 + m_2 - m_3 - m_4 = 0$, wie sofort zu sehen).

Nun wird

$$\{a\} = m_3 + 2m_4 - m_1 + \sqrt{(m_1 - m_3)^2 + 4m_2m_4}$$

$$\{b\} = m_4 + 2m_1 - m_2 + \sqrt{(m_2 - m_4)^2 + 4m_1m_3}$$

$$\{c\} = m_1 + 2m_2 - m_3 + \sqrt{(m_1 - m_3)^2 + 4m_2m_4}$$

$$\{d\} = m_2 + 2m_3 - m_4 + \sqrt{(m_2 - m_4)^2 + 4m_1m_3}$$

multiplicirt man $\{a\}$ mit $\{c\}$ und $\{b\}$ mit $\{d\}$, so folgt

$$J = \tfrac{1}{2}\sqrt{M \,.\, N}$$

wo

$$M = (m_1 - m_3)(m_4 - m_2) + 4m_2m_4 + (m_2 + m_4)\sqrt{(m_1 - m_3)^2 + 4m_2m_4}$$

$$N = (m_3 - m_1)(m_4 - m_2) + 4m_1m_3 + (m_1 + m_3)\sqrt{(m_2 - m_4)^2 + 4m_1m_3}$$

b. Für die m' gelangt man auf demselben Wege zu folgenden Gleichungen:

$$a = \tfrac{1}{2}(m_4' + 2m_1' - m_2' + \sqrt{(m_2' - m_4')^2 + 4m_1'm_3'}\ ) \quad \text{u. s. w.}$$

$$J = \tfrac{1}{2}\sqrt{M' \,.\, N'}$$

$$M' = (m_1'-m_3')(m_2'-m_4')+4m_2'm_4'+(m_2'+m_4')\sqrt{(m_1'-m_3')^2+4m_2'm_4'}$$

$$N' = (m_2'-m_4')(m_3'-m_1')+4m_1'm_3'+(m_1'+m_3')\sqrt{(m_2'-m_4')^2+4m_1'm_3'}$$

Die m und m' stellen zugleich auch die Abschnitte vor, die von den vier inneren Berührungskreisen des Sehnenvierecks auf den Seiten gebildet werden.

Man beachte noch die Gleichung

$$m_1m_2m_3m_4 = \frac{abcd\,J^2}{(a+c)^2(b+d)^2} = m_1'm_2'm_3'm_4'$$

14) a. Die den Dreiecken ANB, BNC, CND, DNA eingeschriebenen Kreise bilden in diesen Dreiecken Seitenabschnitte bei N, welche die Werte haben,

$$\mu_1 = \frac{a}{2h}(b+d-h), \quad \mu_2 = \frac{b}{2h}(a+c-h), \quad \mu_3 = \frac{c}{2h}(b+d-h),$$

$$\mu_4 = \frac{d}{2h}(a+c-h)$$

demnach

$$c = a\frac{\mu_3}{\mu_1}, \quad d = b\frac{\mu_4}{\mu_2}$$

setzt man diese Werte ein in die Gleichung

$$\mu_1+\mu_3-\mu_2-\mu_4 = \tfrac{1}{2}(b+d-a-c)$$

so erhält man

$$b = \mu_2\frac{a(\mu_1+\mu_3)+2\mu_1(\mu_1+\mu_3-\mu_2-\mu_4)}{\mu_1(\mu_2+\mu_4)} \qquad (B)$$

folglich wird

$$h = \sqrt{\frac{(ab)(ad)}{(ac)}}$$

$$= \frac{ab}{\mu_2}\sqrt{\frac{(\mu_1\mu_2)(\mu_1\mu_4)}{a_1{}^2\mu_1\mu_3+\mu_2\mu_4\left[\frac{a_1(\mu_1+\mu_3)+2\mu_1(\mu_1+\mu_3-\mu_2-\mu_4)}{\mu_2+\mu_4}\right]^2}}$$

nun folgt aber aus dem Wert von μ_1 auch

$$h = \frac{a(b+d)}{2\mu_1+a} = \frac{ab\left(1+\frac{\mu_4}{\mu_2}\right)}{2\mu_1+a}$$

aus der Gleichsetzung der beiden Werte von h ergiebt sich dann

$$(a+2\mu_1)^2 = \frac{a^2\mu_1\mu_3(\mu_2+\mu_4)^2+\mu_2\mu_4[a(\mu_1+\mu_3)+2\mu_1(\mu_1+\mu_3-\mu_2-\mu_4)]^2}{(\mu_1\mu_2)(\mu_1\mu_4)}$$

und hieraus

$$a^2-\frac{a}{\mu_2\mu_3\mu_4}[\mu_1\mu_3(\mu_2-\mu_4)^2+\mu_2\mu_4(\mu_1+\mu_3)(\mu_2+\mu_4)] =$$

$$\frac{\mu_1}{\mu_2\mu_3\mu_4}[\mu_1\mu_3(\mu_2-\mu_4)^2-\mu_2\mu_4(\mu_2+\mu_4)^2+2\mu_2\mu_4(\mu_1+\mu_3)(\mu_2+\mu_4)] \quad (A)$$

also

$$a = \frac{\mu_1\mu_3(\mu_2-\mu_4)^2+\mu_2\mu_4(\mu_1+\mu_3)(\mu_2+\mu_4)+(\mu_2+\mu_4).W}{2\mu_2\mu_3\mu_4}, \quad c = a.\frac{\mu_3}{\mu_1}$$

wo

$$W = \sqrt{\mu_1^2\mu_3^2(\mu_2-\mu_4)^2+2\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4(\mu_1+\mu_3)(\mu_2+\mu_4)+\mu_2^2\mu_4^2(\mu_1-\mu_3)^2}$$

analog

$$b = \frac{\mu_2\mu_4(\mu_1-\mu_3)^2+\mu_1\mu_3(\mu_1+\mu_3)(\mu_2+\mu_4)+(\mu_1+\mu_3).W}{2\mu_1\mu_3\mu_4}, \quad d = b.\frac{\mu_4}{\mu_2}$$

Um das Vorzeichen von W zu bestimmen, untersuchen wir, ob in der obigen Gleichung (A) das absolute Glied negativ werden kann. Schreiben wir dasselbe in der Form

$$\mu_1\mu_3(\mu_2-\mu_4)^2-\mu_2\mu_4(\mu_2+\mu_4)(\mu_2+\mu_4-2\mu_1-2\mu_3)$$

so erkennt man, dass dasselbe nur negativ werden kann, wenn $\frac{1}{2}(\mu_2+\mu_4) > \mu_1+\mu_3$ ist. Bilden wir nun aber die der Gleichung (A) entsprechende Gleichung in b, so wird deren absolutes Glied (abgesehen vom Factor $\frac{\mu_2}{\mu_1\mu_3\mu_4}$) sein

$$\mu_2\mu_4(\mu_1-\mu_3)^2-\mu_1\mu_3(\mu_1+\mu_3)(\mu_1+\mu_3-2\mu_2-2\mu_4)$$

und es ist klar, dass dieser Ausdruck unter obiger Bedingung nur positiv sein kann, daher auch die Wurzel in b und folglich auch die in a, da zufolge der Gleichung (B) in a und b gleiche Vorzeichen vorkommen müssen. Demnach gilt auch in c und d das positive Wurzelzeichen.

Um J durch die μ ausdrücken, setzen wir zunächst

$$\{b\}\{d\} = (a+c)^2-(b-d)^2 = \frac{a^2\mu_2^2(\mu_1+\mu_3)^2-b^2\mu_1^2(\mu_2-\mu_4)^2}{\mu_1^2\mu_2^2}$$

$$= \frac{2(\mu_1\mu_2)(\mu_1\mu_4)}{\mu_1^2\mu\mu_3^2\mu_4}M$$

wo

$$M = \mu_2\mu_4(\mu_1^2+\mu_3^2)+\mu_1\mu_3(\mu_1+\mu_3)(\mu_2+\mu_4)+(\mu_1+\mu_3)\,.\,W$$

analog

$$\{a\}\{c\} \equiv \frac{2(\mu_1\mu_2)(\mu_1\mu_4)}{\mu_1\mu_2^2\mu_3\mu_4^2}\,.\,N$$

wo

$$N = \mu_1\mu_3(\mu_2^2+\mu_4^2)+\mu_2\mu_4(\mu_1+\mu_3)(\mu_2+\mu_4)+(\mu_2+\mu_4)\,.\,W$$

also

$$J = \frac{(\mu_1\mu_2)\,(\mu_1\mu_4)}{2\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}\sqrt{\frac{M\,.\,N}{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}}$$

b. Diejenigen den Dreiecken ANB, BNC, CND, DNA angeschriebenen Kreise, welche a, b, c, d von aussen berühren, bilden auf den (verlängerten) Diagonalen Abschnitte, welche, von N aus gerechnet, die Werte haben

$$\mu_1' = \frac{a}{2h}(b+d+h), \quad \mu_2' = \frac{b}{2h}(a+c+h), \quad \mu_3' = \frac{c}{2h}(b+d+h),$$

$$\mu_4' = \frac{d}{2h}(a+c+d)$$

ganz entsprechend dem Verfahren unter a. ergiebt sich

$$b = \mu_2'\,.\,\frac{a(\mu_1'+\mu_3')-2\mu_1'(\mu_1'+\mu_3'-\mu_2'-\mu_4')}{\mu_1'(\mu_2'+\mu_4')},$$

$$h = \frac{ab\left(1+\dfrac{\mu_4'}{\mu_2'}\right)}{2\mu_1'-a},$$

$$(2\mu_1'-a)^2 = \frac{a^2\mu_1'\mu_3'(\mu_2'+\mu_4')^2+\mu_2'\mu_4'[a(\mu_1'+\mu_3')-2\mu_1'(\mu_1'+\mu_3'-\mu_2'-\mu_4')]^2}{(\mu_1'\mu_2')(\mu_1'\mu_4')}$$

da sich die hieraus hervorgehende quadratische Gleichung von der Gleichung (A) unter a. offenbar nur im Vorzeichen von a unterscheidet, so folgt

$$a = \frac{(\mu_2'+\mu_4')\,W-\mu_1'\mu_3'(\mu_2'-\mu_4')^2-\mu_2'\mu_4'(\mu_1'+\mu_3')(\mu_2'+\mu_4')}{2\mu_2'\mu_3'\mu_4'} \text{ u. s. w.}$$

$$J = \frac{(\mu_1'\mu_2')\,(\mu_1'\mu_4')}{2\mu_1'\mu_2'\mu_3'\mu_4'}\sqrt{\frac{M'\,.\,N'}{\mu_1'\mu_2'\mu_3'\mu_4'}}$$

wo

$$M' = \mu_2'\mu_4'(\mu_1'^2+\mu_3'^2)+\mu_1'\mu_3'(\mu_1'+\mu_3')(\mu_2'+\mu_4')-(\mu_1'+\mu_3')\,W,$$

$$N' = \mu_1'\mu_3'(\mu_2'^2+\mu_4'^2)+\mu_2'\mu_4'(\mu_1'+\mu_3')(\mu_2'+\mu_4')-(\mu_2'+\mu_4')\,W$$

und W dieselbe Function wie oben ist.

15) a. Die den Dreiecken ABC, BCD, CDA, DAB eingeschriebenen Kreise bilden an B, C, D, A Abschnitte auf den Seiten, welche die Werte haben

$$\lambda_1 = \tfrac{1}{2}(a+b-f), \quad \lambda_2 = \tfrac{1}{2}(b+c-g), \quad \lambda_3 = \tfrac{1}{2}(c+d-f),$$
$$\lambda_4 = \tfrac{1}{2}(a+d-g)$$

also

$$\lambda_1 - \lambda_3 = \tfrac{1}{2}(a+b-c-d), \quad \lambda_2 - \lambda_4 = \tfrac{1}{2}(b+c-a+d),$$
$$\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3-\lambda_4 = b-d \quad (1), \qquad \lambda_1+\lambda_4-\lambda_2-\lambda_3 = a-c \quad (2)$$

ferner

$$\lambda_1+\lambda_3-\lambda_2-\lambda_4 = g-f = \frac{(a-c)(b-d)}{h}$$

setzt man in die letzte Gleichung die Werte von c und d aus (1) und (2) ein, so folgt

$$h = \frac{(\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3-\lambda_4)(\lambda_1+\lambda_4-\lambda_2-\lambda_3)}{\lambda_1+\lambda_3-\lambda_2-\lambda_4}$$

ferner ist

$$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4 = a+b+c+d-(f+g) = a+b+c+d-\frac{(a+c)(b+d)}{h} \quad (3)$$

setzt man hier die Werte von c und d aus (1) und (2) und den Wert von h ein, so erhält man

$$(\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3-\lambda_4)[\lambda_1(\lambda_1+\lambda_4-\lambda_2-\lambda_3)-a(\lambda_1-\lambda_2)]$$
$$= b(\lambda_1-\lambda_4)(\lambda_1+\lambda_4-\lambda_2-\lambda_3)-ab(\lambda_1+\lambda_3-\lambda_2-\lambda_4) \quad (I)$$

Nun ist aber

$$4\lambda_1\lambda_3+4\lambda_2\lambda_4 = (a+b)(c+d)+f^2-f(a+b+c+d)$$
$$+ (a+d)(b+c)+g^2-g(a+b+c+d$$
$$= (a+c)(b+d)+(f+g)^2-(f+g)(a+b+c+d)$$

oder nach Einsetzung des Wertes von $f+g$ aus (3)

$$4\lambda_1\lambda_3+4\lambda_2\lambda_4 = (a+c)(b+d)-(a+b+c+d)(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4)$$
$$+(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4)^2)$$

setzt man hier wiederum die Werte von c und d aus (1) und (2) ein, so kommt

$$ab-a(\lambda_1+\lambda_2)-b(\lambda_1+\lambda_4)+\lambda_1(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_4-\lambda_3) = 0 \quad (II)$$

Durch Elimination von ab aus (I) und (II) folgt

$$a+b = \frac{\lambda_1\lambda_3(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_4-\lambda_3)-2\lambda_1\lambda_2\lambda_4}{\lambda_1\lambda_3-\lambda_2\lambda_4} \quad (III)$$

und durch Elimination von b aus (I) und (III) schliesslich

$$a^2 - a\frac{\lambda_1\lambda_3(\lambda_1-\lambda_3+2\lambda_4)-\lambda_2\lambda_4(2\lambda_1-\lambda_2+\lambda_4)}{\lambda_1\lambda_3-\lambda_2\lambda_4} = \frac{\lambda_1\lambda_4(\lambda_2-\lambda_3)(\lambda_1+\lambda_4-\lambda_2-\lambda_3)}{\lambda_1\lambda_3-\lambda_2\lambda_4}$$

woraus

$$a = \frac{\lambda_1\lambda_3(\lambda_1-\lambda_3+2\lambda_4)-\lambda_2\lambda_4(2\lambda_1-\lambda_2+\lambda_4) \pm W}{2(\lambda_1\lambda_3-\lambda_2\lambda_4)}$$

analog

$$b = \frac{\lambda_1\lambda_3(\lambda_1+2\lambda_2-\lambda_3)-\lambda_2\lambda_4(2\lambda_1+\lambda_2-\lambda_4) \mp W}{2(\lambda_1\lambda_3-\lambda_2\lambda_4)}$$

$$c = \frac{\lambda_1\lambda_3(2\lambda_2-\lambda_1+\lambda_3)-\lambda_2\lambda_4(\lambda_2-\lambda_4+2\lambda_3) \pm W}{2(\lambda_1\lambda_3-\lambda_2\lambda_4)}$$

$$d = \frac{\lambda_1\lambda_3(\lambda_3-\lambda_1+2\lambda_4)-\lambda_2\lambda_4(2\lambda_3+\lambda_4-\lambda_2) \mp W}{2(\lambda_1\lambda_3-\lambda_2\lambda_4)}$$

wo

$$W^2 = \lambda_1^2\lambda_3^2(\lambda_1-\lambda_3)^2+\lambda_2^2\lambda_1^2(\lambda_2-\lambda_4)^2+4\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4(\lambda_1\lambda_3) - 2\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4(\lambda_1+\lambda_3)(\lambda_2+\lambda_4)$$

Die Formel für J wird nicht elegant.

b. Diejenigen den Dreiecken ABC, BCD, CDA, DAB angeschriebenen Kreise, welche AC und BD von aussen berühren, bilden an B, C, D, A Abschnitte, welche die Werte haben

$$\lambda_1' = \tfrac{1}{2}(a+b+f), \quad \lambda_2' = \tfrac{1}{2}(b+c+g), \quad \lambda_3' = \tfrac{1}{2}(c+d+f), \quad \lambda_4' = \tfrac{1}{2}(a+d+g)$$

Für die λ' gelangt man auf demselben Wege wie unter a. zu genau denselben Formeln für a, b, c, d.

16) a. Die vier dem Sehnenviereck angeschriebenen Kreise, welche a, b, c, d von aussen berühren, haben folgende Radien:

$$r_1 = \frac{2aJ}{(a+c)\{a\}}, \quad r_2 = \frac{2bJ}{(b+d)\{b\}}, \quad r_3 = \frac{2cJ}{(a+c)\{c\}}, \quad r_4 = \frac{2dJ}{(b+d)\{d\}}$$

Um a, b, c, d und J durch die r darzustellen, drücken wir zunächst die m (Nr. 13) a.) durch die r aus.

Unmittelbar ergiebt sich

$$\frac{r_3r_4}{r_1r_2} = \frac{m_1m_4}{m_2m_3}\cdot\frac{c^2}{a^2}$$

aus Nr. 13) a. aber folgt durch Rationalmachen des Nenners

$$\frac{c}{a} = \frac{m_4+2m_3-m_2+\sqrt{(m_4-m_2)^2+4m_1m_3}}{m_2+2m_1-m_4+\sqrt{(m_4-m_2)^2+4m_1m_3}}$$

$$= \frac{(m_1+m_2-m_3-m_4)(m_4-m_2+\sqrt{(m_4-m_2)^2+4m_1m_3})}{2m_1(m_1+m_2-m_3-m_4)}$$

$$= \frac{m_4-m_2+\sqrt{(m_4-m_2)^2+4m_1m_3}}{2m_1}$$

also

$$\frac{c^2}{a^2} = \frac{(m_4-m_2)^2+2m_1m_3+(m_4-m_2)\sqrt{(m_4-m_2)^2+4m_1m_3}}{2m_1^2}$$

und

$$\frac{r_3r_4}{r_1r_2} = \frac{m_4[(m_4-m_2)^2+2m_1m_3+(m_4-m_2)\sqrt{(m_4-m_2)^2+4m_2m_3}\ ]}{2m_1m_2m_3}$$

oder, wenn man im Nenner rechts für m_1m_3 das gleiche Product r_1r_3 setzt und dann die ganze Gleichung mit der Identität $r_1r_2r_3r_4 = r_1r_3 . m_2m_4$ multiplicirt,

$$r_3^2r_4^2 = \tfrac{1}{2}m_4^2[(m_4-m_2)^2+2m_1m_3+(m_4-m_2)\sqrt{(m_4-m_2)^2+4m_1m_3}\ ]$$

woraus

$$r_3r_4 = \tfrac{1}{2}m_4(m_4-m_2+\sqrt{(m_4-m_2)^2+4m_1m_3}\ )$$

oder, mit Beachtung der Identitäten $m_1m_3 = r_1r_3$, $m_2m_4 = r_2r_4$,

$$2r_3r_4-m_4^2+r_2r_4 = m_4\sqrt{m_4^2-2r_2r_4+m_2^2+4r_1r_3}$$

folgt; quadrirt man, setzt wiederum $m_2m_4 = r_2r_4$ und hebt, so bleibt

$$r_4^2(r_2+r_3) = m_4^2(r_1+r_4)$$

demnach

$$m_4 = r_4\sqrt{\frac{r_2+r_3}{r_1+r_4}} \quad \text{analog} \quad m_2 = r_1\sqrt{\frac{r_3+r_4}{r_1+r_2}},$$

$$m_2 = r_2\sqrt{\frac{r_1+r_4}{r_2+r_3}}, \qquad m_3 = r_3\sqrt{\frac{r_1+r_2}{r_3+r_4}}.$$

Nun wird

$$m_4-m_2 = \frac{r_3r_4-r_1r_2}{\sqrt{(r_1+r_4)(r_2+r_3)}}, \quad m_2+m_4 = \frac{r_1r_2+r_3r_4+2r_2r_4}{\sqrt{(r_1+r_4)(r_2+r_3)}}$$

$$m_1-m_3 = \frac{r_1r_4-r_2r_3}{\sqrt{(r_1+r_2)(r_3+r_4)}}, \quad m_1+m_3 = \frac{r_1r_4+r_2r_3+2r_1r_3}{\sqrt{(r_1+r_4)(r_2+r_3)}},$$

$$\sqrt{(m_1-m_3)^2+4m_2m_4} = \frac{r_1r_4+r_2r_3+2r_2r_4}{\sqrt{(r_1+r_2)(r_3+r_4)}},$$

$$\sqrt{(m_1-m_2)^2+4m_1m_3} = \frac{r_1r_2+r_3r_4+2r_1r_3}{\sqrt{(r_1+r_4)(r_2+r_3)}}$$

also erhält man aus den Formeln unter Nr. 13) a.

$$a = r_1\left(\sqrt{\frac{r_2+r_3}{r_3+r_4}}+\sqrt{\frac{r_3+r_4}{r_1+r_2}}\right),\quad b = r_2\left(\sqrt{\frac{r_3+r_4}{r_1+r_2}}+\sqrt{\frac{r_1+r_4}{r_2+r_3}}\right).$$

$$c = r_3\left(\sqrt{\frac{r_1+r_4}{r_2+r_3}}+\sqrt{\frac{r_1+r_2}{r_3+r_4}}\right),\quad d = {}_4\left(\sqrt{\frac{r_1+r_2}{r_3+r_4}}+\sqrt{\frac{r_2+r_3}{r_1+r_4}}\right)$$

$$J = \sqrt{\left(\frac{A}{N}+2r_1r_3\right)\left(\frac{B}{N}+2r_2r_4\right)}$$

wo

$$A = r_2r_3^2r_4+r_1^2r_2r_4+r_1^2r_2r_3+r_1r_3^2r_4+r_1^2r_3r_4+r_1r_2r_3^2+2r_1^2r_3^2,$$
$$B = r_1r_2^2r_3+r_1r_3r_4^2+r_1r_2r_4^2+r_2^2r_3r_4+r_1r_2^2r_4+r_2r_3r_4^2+2r_2^2r_4^2,$$
$$N = \sqrt{(r_1+r_2)(r_2+r_3)(r_3+r_4)(r_4+r_1)}$$

bringt man in dem Ausdruck für J die Grössen unter der Wurzel auf gleichen Nenner, multiplicirt aus und vereinigt, so ergiebt sich

$$\begin{aligned}
J^2.N^2 &= r_1^3r_2^3r_3^2+2r_1^3r_2^3r_3r_4+r_1^3r_2^3r_4^2+2r_1^3r_2^2r_3^3+7r_1^3r_2^2r_3^2r_4\\
&+6r_1^3r_2^2r_3r_4^2+r_1^3r_2^2r_4^3+4r_1^3r_2r_3^3r_4+7r_1^3r_2r_3^2r_4^2+2r_1^3r_2r_3r_4^3\\
&+2r_1^3r_3^3r_4^2+r_1^3r_3^2r_4^3+r_1^2r_2^3r_3^3+6r_1^2r_2^3r_3^2r_4+7r_1^2r_2^3r_3r_4^2+2r_1^2r_2^3r_4\\
&+7r_1^2r_2^2r_3^3r_4+16r_1^2r_2^2r_3^2r_4^2+7r_1^2r_2^2r_3r_4^3+7r_1^2r_2r_3^3r_4^2+6r_1^2r_2r_3^2r_4^3\\
&+r_1^2r_3^3r_4^3+2r_1r_2^3r_3^3r_4+7r_1r_2^3r_3^2r_4^2+4r_1r_2^2r_3r_4^3+6r_1r_2^2r_3^3r_4^2\\
&+7r_1r_2^2r_3^2r_4^3+2r_1r_2r_3^3r_4^3+r_2^3r_3^3r_4^2+2r_2^3r_2^2r_4^3+r_2^2r_3^3r_4^3\\
&+2(r_1r_2r_3+r_2r_3r_4+r_3r_4r_1+r_4r_1r_2)^2.N\\
&=(r_1r_3r_3+r_2r_3r_4+r_3r_4r_1+r_4r_1r_2)^2(r_1r_2+r_2r_3+r_3r_4+r_4r_1+2r_1r_3+2r_2r_4)\\
&+2(r_1r_2r_3+r_2r_3r_4+r_3r_4r_1+r_4r_1r_2)^2.N\\
&=(r_1r_2r_3+r_2r_3r_4+r_3r_4r_1+r_4r_1r_2)^2(\sqrt{(r_1+r_4^2)(r_2+r_3)}+\sqrt{(r_1+r_2)(r_3+r_4)})^2
\end{aligned}$$

also

$$J=(r_1r_2r_3+r_2r_3r_4+r_3r_4r_1+r_4r_1r_2).\frac{\sqrt{(r_1+r_4)(r_2+r_3)}+\sqrt{(r_1+r_2)(r_3+r_4)}}{N}$$

$$=r_1r_2r_3r_4\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}+\frac{1}{r_4}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{(r_1+r_2)(r_3+r_4)}}+\frac{1}{\sqrt{(r_1+r_4)(r_2+r_3)}}\right)$$

Ferner wird mit Hülfe der zuletzt gefundenen Formeln für a, b, c, d durch einfaches Ausmultipliciren

$$ac+bd=2r_1r_3+2r_2r_4+\frac{1}{N}(2r_1^2r_3^2+r_1^2r_3r_4+r_1r_3^2r_4+r_1r_3r_4^2+r_1^2r_2r_3$$
$$+r_1r_2^2r_3+r_1r_2r_3^2+r_2^2r_3r_4+2r_2^2r_4^2+r_2r_3^2r_4+r_2r_3r_4^2$$
$$+r_1^2r_2r_4+r_1r_2^2r_4+r_1r_2r_4^2)$$
$$=2r_1r_3+2r_2r_4+\frac{1}{N}(N^2+[r_1r_3+r_2r_4]^2-4r_1r_2r_3r_4)$$
$$=\frac{(r_1r_3+r_2r_4+N)^2-4r_1r_2r_3r_4}{N};$$

$$ab+cd=\frac{(r_1+r_2+r_3+r_4)J}{\sqrt{(r_1+r_2)(r_3+r_4)}},\qquad ad+bc=\frac{(r_1+r_2+r_3+r_4)J}{\sqrt{(r_1+r_4)(r_2+r_3)}}$$

folglich

$$f^2=\frac{(r_1r_3+r_2r_4+N)^2-4r_1r_2r_3r_4}{(r_1+r_4)(r_2+r_3)}$$

$$g^2=\frac{(r_1r_3+r_2r_4+N)^2-4r_1r_2r_3r_4}{(r_1+r_2)(r_3+r_4)},\qquad h^2=\frac{(r_1+r_2+r_3+r_4)^2J^2}{(r_1r_3+r_2r_4+N)^2-4r_1r_2r_3r_4},$$

$$R=\frac{(r_1+r_2+r_3+r_4)\sqrt{(r_1r_3+r_2r_4+N)^2-4r_1r_2r_3r_4}}{4N}.$$

b. Dem Sehnenviereck können vier Kreise eingeschrieben werden, so dass jeder von ihnen drei Seiten von innen berührt. Die Werte ihrer Radien sind

$$\varrho_1=\frac{2aJ}{(a+c)\{c\}},\qquad \varrho_2=\frac{2bJ}{(b+d)\{d\}},\qquad \varrho_3=\frac{2cJ}{(a+c)\{a\}},\qquad \varrho_4=\frac{2dJ}{(b+d)\{b\}}$$

In ganz derselben Weise wie unter a. gewinnt man

$$m_1=\varrho_1\sqrt{\frac{\varrho_3-\varrho_2}{\varrho_1-\varrho_4}},\qquad m_2=\varrho_2\sqrt{\frac{\varrho_3-\varrho_4}{\varrho_1-\varrho_2}},\qquad m_3=\varrho_3\sqrt{\frac{\varrho_1-\varrho_4}{\varrho_3-\varrho_2}},$$
$$m_4=\varrho_4\sqrt{\frac{\varrho_1-\varrho_2}{\varrho_3-\varrho_4}}$$

Es ist hier nötig drei Fälle zu unterscheiden.

α) Es sei $\varrho_1>\varrho_2$; dann muss, damit m_2 und m_4 reell werden, auch $\varrho_3>\varrho_4$ sein; zugleich muss aber auch $\varrho_3>\varrho_2$, $\varrho_1>\varrho_4$ sein, denn wäre $\varrho_2>\varrho_3$, so würde zufolge der drei gegebenen Bedingungen $\varrho_1>\varrho_4$, somit m_1 und m_3 imaginär werden. Wir haben dem entsprechend zu schreiben

$$m_4-m_2=\frac{\varrho_1\varrho_4-\varrho_2\varrho_3}{\sqrt{(\varrho_1-\varrho_2)(\varrho_3-\varrho_4)}},\qquad m_2+m_4=\frac{\varrho_1\varrho_4+\varrho_2\varrho_3-2\varrho_2\varrho_4}{\sqrt{(\varrho_1-\varrho_2)(\varrho_3-\varrho_4)}},$$

$$m_1 - m_2 = \frac{\varrho_3\varrho_4 - \varrho_1\varrho_2}{\sqrt{(\varrho_1-\varrho_4)(\varrho_3-\varrho_2)}}, \quad m_1 + m_3 = \frac{2\varrho_1\varrho_3 - \varrho_1\varrho_2 - \varrho_3\varrho_4}{\sqrt{(\varrho_1-\varrho_4)(\varrho_3-\varrho_2)}},$$

$$\sqrt{(m_4-m_2)^2+4m_1m_3} = \frac{2\varrho_1\varrho_3 - \varrho_1\varrho_4 - \varrho_2\varrho_3}{\sqrt{(\varrho_1-\varrho_2)(\varrho_3-\varrho_4)}},$$

$$\sqrt{(m_1-m_3)^2+4m_2m_4} = \frac{\varrho_3\varrho_4 + \varrho_1\varrho_2 - 2\varrho_2\varrho_4}{\sqrt{(\varrho_1-\varrho_4)(\varrho_3-\varrho_2)}}$$

Der Zähler des vorletzten Ausdrucks ist positiv, weil er null wird, sobald man für ϱ_4 das grössere ϱ_3 und für ϱ_2 das grössere ϱ_1 einsetzt; der Zähler des letzten Ausdruckes ist positiv, weil er null wird, sobald man für ϱ_3 das kleinere ϱ_2 und für ϱ_1 das kleinere ϱ_4 einsetzt. Wir erhalten so

$$a = \varrho_1\left(\sqrt{\frac{\varrho_3-\varrho_2}{\varrho_1-\varrho_4}} + \sqrt{\frac{\varrho_3-\varrho_4}{\varrho_1-\varrho_2}}\right), \quad b = \varrho_2\left(\sqrt{\frac{\varrho_3-\varrho_4}{\varrho_1-\varrho_2}} + \sqrt{\frac{\varrho_1-\varrho_4}{\varrho_3-\varrho_2}}\right)$$

$$c = \varrho_3\left(\sqrt{\frac{\varrho_1-\varrho_4}{\varrho_3-\varrho_2}} + \sqrt{\frac{\varrho_1-\varrho_2}{\varrho_3-\varrho_4}}\right), \quad d = \varrho_4\left(\sqrt{\frac{\varrho_1-\varrho_2}{\varrho_3-\varrho_4}} + \sqrt{\frac{\varrho_3-\varrho_2}{\varrho_1-\varrho_4}}\right)$$

Die Formeln für den Inhalt und für R müssen, wie leicht festzustellen, lauten

$$J = \varrho_1\varrho_2\varrho_3\varrho_4\left(\frac{1}{\varrho_4} - \frac{1}{\varrho_3} + \frac{1}{\varrho_2} - \frac{1}{\varrho_1}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{(\varrho_1-\varrho_2)(\varrho_3-\varrho_4)}} + \frac{1}{\sqrt{(\varrho_1-\varrho_4)(\varrho_3-\varrho_2)}}\right),$$

$$R = \frac{(\varrho_1 - \varrho_2 + \varrho_3 - \varrho_4)\sqrt{(\varrho_1\varrho_2 + \varrho_2\varrho_4 + N')^2 - 4\varrho_1\varrho_2\varrho_3\varrho_4}}{4N'}$$

wo

$$N' = \sqrt{(\varrho_1-\varrho_2)(\varrho_3-\varrho_2)(\varrho_3-\varrho_4)(\varrho_1-\varrho_4)}$$

β) Es sei $\varrho_1 < \varrho_2$ und demgemäss $\varrho_3 < \varrho_4$, $\varrho_2 > \varrho_3$, $\varrho_4 > \varrho_1$; dann kehren sich offenbar alle unter α) entstandenen Differenzen um.

γ) Ist $\varrho_1 = \varrho_2$, so muss, damit m_2 endlich bleibt, auch $\varrho_3 = \varrho_4$ sein; dann muss aber auch $\varrho_2 = \varrho_3$ und $\varrho_1 = \varrho_4$ sein, damit m_1 und m_3 reell werden; das Sehnenviereck ist alsdann ein Quadrat.

Man beachte noch die Relationen:

$$r_1r_3 = \frac{ac\{b\}\{d\}}{4(a+c)^2} = \varrho_1\varrho_3 \qquad r_2r_4 = \frac{bd\{a\}\{c\}}{4(b+d)^2} = \varrho_2\varrho_4,$$

$$r_1r_2r_3r_4 = \frac{abcd.J^2}{(a+c)^2(b+d)^2} = \varrho_1\varrho_2\varrho_3\varrho_4$$

$$\varrho_1 = r_3 \cdot \frac{a}{c} = r_1 \sqrt{\frac{(r_2+r_3)(r_3+r_4)}{(r_1+r_2)(r_1+r_4)}} \quad \text{u. s. w.}$$

$$r_1 = \varrho_1 \sqrt{\frac{(\varrho_3-\varrho_4)(\varrho_3-\varrho_2)}{(\varrho_1-\varrho_4)(\varrho_1-\varrho_2)}} \quad \text{u. s. w.}$$

17) a. Die Radien der den Dreiecken *ANB*, *BNC*, *CND*, *DNA* eingeschriebenen Kreise sind

$$\pi_1 = \frac{2abdhJ}{(ab)(ad)(b+d+h)}, \quad \pi_2 = \frac{2abchJ}{(ab)(ad)(a+c+h)},$$

$$\pi_3 = \frac{2bcdhJ}{(ab)(ad)(b+d+h)}, \quad \pi_4 = \frac{2acdhJ}{(ab)(ad)(a+c+h)}$$

Um a, b, c, d und J durch die π darzustellen, drücken wir vorerst die μ (Nr. 14) a.) durch die π aus.

Beachtet man, dass

$$(b+d)^2 - h^2 = \frac{bd\{a\}\{c\}}{(ac)} \quad \text{und} \quad (a+c)^2 - h^2 = \frac{ac\{b\}\{d\}}{(ac)}$$

ist, so erkennt man leicht, dass

$$\mu_1 \cdot \mu_2 = \pi_1 \cdot \pi_2, \quad \mu_1 : \mu_3 = \pi_1 : \pi_3, \quad \mu_2 : \mu_4 = \pi_2 : \pi_4$$

ist, also

$$\mu_2 = \frac{\pi_1\pi_2}{\mu_1}, \quad \mu_3 = \mu_1 \cdot \frac{\pi_3}{\pi_1}, \quad \mu_4 = \mu_2 \cdot \frac{\pi_4}{\pi_2} = \frac{\pi_1\pi_4}{\mu_1}$$

da ferner

$$\frac{\mu_1}{\mu_2} = \frac{\pi_1}{\pi_2} \cdot \frac{\{a\}\{c\}}{\{b\}\{d\}},$$

so wird durch Multiplication dieser Gleichung mit $\mu_1\mu_2 = \pi_1\pi_2$

$$\mu_1^2 = \pi_1^2 \cdot \frac{\{a\}\{c\}}{\{b\}\{d\}} \quad (I)$$

Nun ergiebt sich aus Nr. 14) a.

$$\{a\}\{c\}.\mu_1\mu_2^2\mu_3\mu_4^2 = 2(\mu_1\mu_2)(\mu_1\mu_4)[\mu_1\mu_3(\mu_2^2+\mu_4^2)+\mu_2\mu_4(\mu_1+\mu_3)(\mu_2+\mu_4) + (\mu_2+\mu_4)W],$$

$$\{b\}\{d\}.\mu_1^2\mu_2\mu_3^2\mu_4 = 2(\mu_1\mu_2)(\mu_1\mu_4)[\mu_2\mu_4(\mu_1^2+\mu_3^2)+\mu_1\mu_3(\mu_1+\mu_3)(\mu_2+\mu_4) + (\mu_1+\mu_3)W]$$

dividirt man die erste Gleichung durch die zweite und führt die eben gefundenen Werte für μ_2, μ_3, μ_4 ein, so entsteht

$$\frac{|a|\,|c|}{|b|\,|d|}\,\pi_1^2\pi_2\pi_4 = \mu_1^4\cdot\frac{\pi_3}{\pi_1}$$

$$\frac{\pi_1\pi_3(\pi_2^2+\pi_4^2)+\dfrac{\pi_1^2\pi_2\pi_4}{\mu_1^2}(\pi_1+\pi_3)(\pi_2+\pi_4)+\dfrac{\pi_1}{\mu_1^2}(\pi_2+\pi_4)\,.\,W'}{\pi_2\pi_4(\pi_1^2+\pi_3^2)+\mu_1^2\dfrac{\pi_2}{\pi_1}(\pi_1+\pi_3)(\pi_2+\pi_4)+\dfrac{1}{\pi_1}(\pi_1+\pi_3)\,.\,W'}$$

wo

$$W'^2=\mu_1^4\pi_3^2(\pi_2-\pi_4)^2+2\mu_1^2\pi_1\pi_2\pi_3\pi_4(\pi_1+\pi_3)(\pi_2+\pi_4)+\pi_1^2\pi_2^2\pi_4^2(\pi_1-\pi_3)^2$$

setzt man den letzten Wert von $\frac{|a|\,|c|}{|b|\,|d|}$ in (I) ein, so folgt

$$1=\frac{\pi_1\pi_3}{\pi_2\pi_4}\cdot\frac{\pi_3(\pi_2^2+\pi_4^2)\mu_1^2+\pi_1\pi_2\pi_4(\pi_1+\pi_3)(\pi_2+\pi_4)+(\pi_2+\pi_4).W'}{\pi_3(\pi_1+\pi_3)(\pi_2+\pi_4)\mu_1^2+\pi_1\pi_2\pi_4(\pi_1^2+\pi_3^2)+(\pi_1+\pi_3)W')'}$$

woraus

$$\mu_1^4[\pi_1^2\pi_3^2-M(\pi_1+\pi_3)]-\mu_1^2\pi_1^2[2\pi_1\pi_2\pi_3\pi_4+M(\pi_1+\pi_3-\pi_2-\pi_4)] = -\pi_1^4[\pi_2^2\pi_4^2+M(\pi_2+\pi_4)] \quad \text{(II)}$$

$$\mu_1^2=\pi_1^2\cdot\frac{2\pi_1\pi_2\pi_3\pi_4+M(\pi_1+\pi_3-\pi_2-\pi_4\pm W)}{2[\pi_1^2\pi_3^2-M(\pi_1+\pi_3)]}$$

$$=\pi_1^2\cdot\frac{\pi_2^2+\pi_4^2+(\pi_1+\pi_3)(\pi_2+\pi_4)\mp(\pi_2+\pi_4).W}{\pi_1^2+\pi_3^2+(\pi_1+\pi_3)(\pi_2+\pi_4)\mp(\pi_1+\pi_3).W}=\pi_1^2\cdot\frac{A}{B}$$

wo

$$M=\pi_1\pi_3(\pi_2+\pi_4)-\pi_2\pi_4(\pi_1+\pi_3),$$

$$W=\sqrt{(\pi_1-\pi_3)^2+2(\pi_1+\pi_3)(\pi_2+\pi_4)+(\pi_2-\pi_4)^2} = \sqrt{(\pi_1+\pi_2+\pi_3+\pi_4)^2-4(\pi_1\pi_3)}$$

und A und B auch für das negative Zeichen von W stets positive Grössen sind; denn es wird alsdann

$$A+B=\pi_1^2+\pi_3^2+\pi_2^2+\pi_4^2+2(\pi_1+\pi_3)(\pi_2+\pi_4)-(\pi_1+\pi_2+\pi_3+\pi_4)W$$

was stets positiv ist, weil

$$[\pi_1^2+\pi_3^2+\pi_2^2+\pi_4^2+2(\pi_1+\pi_3)(\pi_2+\pi_4)]^2 = (\pi_1+\pi_2+\pi_3+\pi_4)^2W^2+4(\pi_1\pi_3+\pi_2\pi_4)^2 \text{ ist.}$$

Die Gleichung (II) kann offenbar nicht dazu dienen, das Vorzeichen von W zu bestimmen. Wir sind jetzt aber im Stande das Verhältniss $\frac{a}{b}$ auf doppelte Weise durch die π auszudrücken und durch Gleichsetzung beider Werte das Vorzeichen von W zu finden.

Es ist

$$\mu_1^2 = \pi_1^2 \cdot \frac{A}{B}$$

und nach (I)

$$\mu_1^2 = \pi_1^2 \cdot \frac{\{a\}\{c\}}{\{b\}\{d\}}$$

folglich

$$\frac{A}{B} = \frac{(b+d)^2-(a-c)^2}{(a+c)^2-(b-d)^2}$$

berücksichtigt man nun, dass

$$c = a\frac{\pi_3}{\pi_1} \quad \text{und} \quad d = b\frac{\pi_4}{\pi_2}$$

was sich aus den Gleichungen für die π ohne weiteres ergiebt, so wird

$$\frac{A}{B} = \frac{\pi_1^2(\pi_2+\pi_4)^2 - \frac{a^2}{b^2}\pi_2^2(\pi_1-\pi_3)^2}{\frac{a^2}{b^2}(\pi_1+\pi_3)^2\pi_2^2 - \pi_1^2(\pi_2-\pi_4)^2}$$

woraus

$$\frac{a}{b} = \frac{\pi_1}{\pi_2}\sqrt{\frac{A(\pi_2-\pi_4)^2+B(\pi_2+\pi_4)^2}{A(\pi_1+\pi_3)^2+B(\pi_1-\pi_3)^2}}$$

Setzt man andererseits

$$c = a\frac{\pi_3}{\pi_1} \quad \text{und} \quad d = b\frac{\pi_4}{\pi_2}$$

ein in h, so folgt

$$h = a\sqrt{\frac{(\pi_1\pi_2)(\pi_1\pi_4)}{\pi_1\pi_2\left(\frac{a^2}{b^2}\pi_2\pi_3+\pi_1\pi_4\right)}}$$

oder mit Benutzung des eben gefundenen Wertes von $\frac{a}{b}$

$$h = \frac{a}{\pi_1}\sqrt{\frac{A(\pi_1+\pi_3)^2+B(\pi_1-\pi_3)^2}{A+B}}$$

Nun folgt aus

$$\pi_1 = \frac{2abdhJ}{(ab)(ad)(b+d+h)} = \frac{a(b+d-h)}{2h}\sqrt{\frac{\{b\}\{d\}}{\{a\}\{c\}}}$$

weiter:

$$a = \frac{2\pi_1}{\frac{b+d}{h}-1}\sqrt{\frac{\{a\}\{c\}}{\{b\}\{d\}}} = \frac{2\pi_1}{\frac{b}{h}\left(1+\frac{\pi_4}{\pi_2}\right)-1}\sqrt{\frac{A}{B}}$$

setzt man jetzt den zuletzt gefundenen Wert für h, alsdann wiederum den Wert von $\frac{a}{b}$ ein, so ergiebt sich

$$a = 2\pi_1 \sqrt{\frac{A}{B}} \cdot \frac{1}{(\pi_2+\pi_4)\sqrt{\frac{A+B}{A(\pi_2-\pi_4)^2+B(\pi_2+\pi_4)^2}-1}}$$

analog

$$b = 2\pi_2 \sqrt{\frac{A}{B}} \cdot \frac{1}{(\pi_1+\pi_3)\sqrt{\frac{A+B}{A(\pi_1+\pi_3)^2+B(\pi_1-\pi_3)^2}-1}}$$

also

$$\frac{a}{b} = \frac{\pi_1}{\pi_2} \cdot \frac{A}{B} \cdot \frac{(\pi_2+\pi_3)\sqrt{\frac{A+B}{A(\pi_1+\pi_3)^2+B(\pi_1-\pi_3)^2}-1}}{(\pi_1+\pi_4)\sqrt{\frac{A+B}{A(\pi_2-\pi_4)^2+B(\pi_2+\pi_4)^2}-1}}$$

setzt man diesen Wert für $\frac{a}{b}$ gleich dem obigen, so erhält man

$$\frac{A}{B} = \frac{(\pi_2+\pi_4)\sqrt{A+B}-\sqrt{A(\pi_2-\pi_4)^2+B(\pi_2+\pi_4)^2}}{(\pi_1+\pi_3)\sqrt{A+B}-\sqrt{A(\pi_1+\pi_3)^2+B(\pi_1-\pi_3)^2}}$$

$$\cdot \frac{\pi_2\pi_4 A\left[(\pi_1+\pi_3)\sqrt{A+B}+\sqrt{A(\pi_1+\pi_3)^2+B(\pi_1-\pi_3)^2}\right]}{\pi_1\pi_3 B\left[(\pi_2+\pi_4)\sqrt{A+B}+\sqrt{A(\pi_2-\pi_4)^2+B(\pi_2+\pi_4)^2}\right]}$$

folglich

$$\pi_1\pi_3(\pi_2+\pi_4)\sqrt{A+B}+\pi_2\pi_3\sqrt{A(\pi_2-\pi_4)^2+B(\pi_2+\pi_4)^2} =$$
$$\pi_2\pi_4(\pi_1+\pi_3)\sqrt{A+B}+\pi_2\pi_4\sqrt{A(\pi_1+\pi_3)^2+B(\pi_1-\pi_3)^2}$$

oder

$$M\sqrt{2(A+B)} = \pi_2\pi_4\sqrt{2[A(\pi_1+\pi_3)^2+B(\pi_1-\pi_3)^2]}$$
$$-\pi_2\pi_3\sqrt{2[A(\pi_2-\pi_4)^2+B(\pi_2+\pi_4)^2]} \quad \text{(III)}.$$

Nun ist zunächst

$$\sqrt{2(A+B)} = \frac{1}{2}(\pi_1+\pi_2+\pi_3+\pi_4+M)$$

denn wie man sich leicht überzeugen kann, ist stets $\pi_1+\pi_2+\pi_3+\pi_4 > M$; die Gleichung (III) kann aber im besondern nur dann bestehen, wenn

a) $\sqrt{2(A+B)} = \pi_1+\pi_2+\pi_3+\pi_4-M$

$$\sigma_1 = \frac{2abJ}{(ab)(a+b+f)}, \quad \sigma_2 = \frac{2bcJ}{(ad)(b+c+g)}, \quad \sigma_3 = \frac{2cdJ}{(ab)(c+d+f)},$$

$$\sigma_4 = \frac{2adJ}{(ad)(a+d+g)}$$

Wir drücken die σ durch die π aus. Indem wir beachten, dass

$$ac+bd = 2(\pi_1\pi_2)(\pi_1\pi_4)\frac{A+B}{A\,.\,B}$$

also

$$f = (\pi_1\pi_4)\sqrt{\frac{2(A+B)}{A\,.\,B}}, \quad g = (\pi_1\pi_2)\sqrt{\frac{2(A+B)}{A\,.\,B}}$$

ist, erhalten wir

$$\sigma_1 = \frac{4\pi_1\pi_2(\pi_1\pi_4)}{\pi_1[(\pi_2+\pi_4)W-(\pi_1+\pi_3)(\pi_2+\pi_4)-(\pi_2-\pi_4)^2]+\pi_2[(\pi_1+\pi_3)W} \\ -(\pi_1+\pi_3)(\pi_2+\pi_4)-(\pi_1-\pi_3)^2]+(\pi_1\pi_4)\sqrt{2(A+B)}$$

$$= \frac{2(\pi_1\pi_4)}{\pi_3+\pi_4-\pi_1-\pi_2+W}$$

da aber

$$W^2-(\pi_3+\pi_4-\pi_1-\pi_2)^2 = 4(\pi_1\pi_4)$$

ist, so wird

$\sigma_1 = \frac{1}{2}(W+\pi_1+\pi_2-\pi_3-\pi_4)$; analog $\sigma_2 = \frac{1}{2}(W+\pi_2+\pi_3-\pi_4-\pi_1)$,
$\sigma_3 = \frac{1}{2}(W+\pi_3+\pi_4-\pi_1-\pi_2)$, $\sigma_4 = \frac{1}{2}(W+\pi_1+\pi_4-\pi_2-\pi_3)$

also

$$\sigma_1+\sigma_3 = W = \sigma_2+\sigma_4$$

Ausserdem bemerke man

$$\sigma_1\sigma_3 = (\pi_1\pi_4), \quad \sigma_2\sigma_4 = (\pi_1\pi_2)$$

b. Die Radien derjenigen den Dreiecken *ABC*, *BCD*, *CDA*, *DAB* angeschriebenen Kreise, welche je eine Diagonale von aussen berühren, haben die Werte:

$$\sigma_1' = \frac{2abJ}{(ab)(a+b-f)}, \quad \sigma_2' = \frac{2bcJ}{(ad)(b+c-g)}, \quad \sigma_3' = \frac{2cdJ}{(ab)(c+d-f)}$$

$$\sigma_4' = \frac{2adJ}{(ad)(a+d-g)}$$

in ganz derselben Weise wie unter a. findet man:

$$\sigma_1' = \tfrac{1}{2}(W+\pi_3'+\pi_4'-\pi_1'-\pi_2') \quad \text{u. s. w.}$$

$$\sigma_1'+\sigma_3' = W = \sigma_2'+\sigma_4'$$

VII.

Miscellen.

1.

Zur Construction der Kegelschnittslinien.

Im Jahrgange 1886 veröffentlichte Herr Prof. Schiffner in Pola eine praktische, in ihrer Ausführung sehr einfache Construction von Punkten samt den dazugehörigen Tangenten einer durch die Achsen oder zwei conjugirte Durchmesser bestimmten Ellipse; die Ableitung derselben erfolgt mittelst analytischer Geometrie.

Eine andere, naturgemässere Ableitung (jene analytische lässt doch an keiner Stelle die Notwendigkeit des eingeschlagenen Weges erkennen) ergibt sich durch Specialisirung des Pascal'schen Satzes für den besonderen Fall auf folgende Weise.

Sind AB und CD die beiden Achsen, bzhw. conjugirten Durchmesser der Ellipse, und bezeichnen wir die fünf bekannten Ecken des Pascal'schen Sechsecks mit 1, 2, 3, 4, 5, so verlegen wir 1 und 2 nach A, 3 nach C und 4 und 5 nach B. Die Seiten $\overline{12}$ und $\overline{45}$ (die Tangenten der Ellipse in A und B) schneiden sich in dem fixen Punkte III, durch den bei der getroffenen Annahme sämtliche Pascal'schen Geraden σ gehen müssen. Wegen $\overline{12} \parallel \overline{45}$ liegt der Punkt III in dieser Richtung im Unendlichen, die Pascal'schen Geraden sind somit zu CD parallel. Ziehen wir eine solche Gerade $\sigma \parallel CD$, so schneidet sie die Seiten $\overline{23}$ und $\overline{34}$ (AC und CB) des Pascal'schen Sechsecks in den Punkten IV und V, die mit 5 (B), bzhw. mit 1 (A) verbunden jene zwei Seiten liefern, deren Schnittpunkt 6 ein Punkt P der Ellipse ist.

Behufs Bestimmung der Tangente t in P nehmen wir eine andere Anordnung der Ecken des Pascal'schen Sechsecks an. Wir bezeichnen A mit 1, C mit 2, 3, B mit 4 und den vorhin gefundenen Punkt P mit 5, 6. Den Schnittpunkt III′ der Seiten $\overline{12}$ und $\overline{45}$ (früher

IV) mit dem Schnittpunkte V′ der Seiten $\overline{3\,4}$ und $\overline{6\,1}$ (früher V) verbunden liefert die Pascal'sche Gerade σ', welche mit der früheren σ offenbar identisch ist. σ schneidet die Seite $\overline{2\,3}$ (Tangente der Ellipse in C) in dem Punkte IV′, dessen Verbindungsgerade mit 5, 6 (P) die Tangente t der Ellipse in P ist.

Der Punkt IV′, der Schnittpunkt der Pascal'schen Geraden mit der Ellipsentangente in C, wird schon bei der ersten Operation, der Bestimmung des Ellipsenpunktes P, erhalten. Dadurch wird die Anzahl der Hilfslinien auf ein Minimum reducirt.

Für die Hyperbel gestaltet sich unter derselben Voraussetzung wie bei der Ellipse die Ableitung der Construction in ähnlicher Weise wie vorhin.

Bezeichnen wir mit AB den reellen und mit CD den conjugirten imaginären Durchmesser, so verlegen wir die Ecken 1 und 2 des Pascal'schen Sechsecks nach A, 3 in den unendlich fernen Punkt einer (z. B. der zu AD parallelen) Asymptote und 4 und 5 in den zweiten Endpunkt des reellen Durchmessers AB. Es fällt dann — bei Gebrauch der früheren Bezeichnung — III mit dem unendlich fernen Punkte des imaginären Durchmessers CD zusammen, die Pascal'sche Gerade σ wird zu CD parallel und schneidet die Seiten $\overline{2\,3}$ und $\overline{3\,4}$ (AB und CB) in den Punkten IV und V, deren Verbindungsgeraden mit 5 (B) und 1 (A) sich in einem Punkte 6 (P) der Hyperbel schneiden.

Um die Tangente t in dem soeben erhaltenen Hyperbelpunkte P zu bestimmen, bezeichnen wir die Endpunkte A und B des reellen Durchmessers mit 1 und 2, den unendlich fernen Punkt der vorhin benutzten Asymptote mit 2, 3 und den Hyperbelpunkt P mit 5, 6. Die Schnittpunkte III′ und V′ sind mit den vorigen IV und V identisch, weshalb auch die jetzige Pascal'sche Gerade σ' mit der früheren σ zusammenfällt. σ' schneidet die Gerade $\overline{2\,3}$, d. i. die Asymptote in dem Punkte IV′ der mit P verbunden die gesuchte Tangente t liefert. Auch in diesem Falle erfordert die Construction eines Hyperbelpunktes samt der zugehörigen Tangente das Minimum der Hilfsmittel.

Auch für die Parabel können wir auf analogem und ebenfalls kürzestem Wege eine hübsche und zweckmässige Construction von Punkten samt den dazugehörigen Tangenten ableiten.

Es seien ein Durchmesser AB und eine demselben conjugirte Sehne CD als gegeben vorausgesetzt. Wir bezeichnen alsdann den

Parabelpunkt A des Durchmessers mit 1, 2, den einen Endpunkt C der Sehne mit 3 und den unendlich fernen Punkt des Durchmessers mit den Ecken 4 und 5 des Pascal'schen Sechsecks. Bei dieser Annahme ist der Punkt III der unendlich ferne Punkt der Sehne CD, die Pascal'schen Geraden σ sind somit zu CD parallel; jede derselben schneidt die fixen Geraden $\overline{2\ 3}$ (AC) und $\overline{3\ 4}$ (durch $C \parallel AB$) in zwei Punkten IV und V, deren Verbindungsgeraden mit 5 (dem unendlich fernen Punkte von AB), bzhw. mit 1 (A), wobei die erste offenbar zum Durchmesser AB parallel sein muss, sich in einem Parabelpunkte 6 (P) schneiden.

Auch für die Bestimmung der Tangente t in dem erhaltenem Punkte P ist bereits vorgesorgt. Sie ist die Verbindungsgerade von P mit dem Schnittpunkte T der Pascal'schen Geraden und der fixen Parabeltangente τ in C, welche vorher ein für allemal auf bekannte Weise zu ermitteln ist.

Um diese Tangentenconstruction abzuleiten, bezeichnen wir A mit 1, C mit 2, 3, den unendlich fernen Punkt des Durchmessers AB mit 4 und den bereits bekannten Punkt P mit 5, 6. Bei dieser Annahme entsprechen die Punkte III′ und V′ den früheren IV und V, die Pascal'sche Gerade ist somit dieselbe wie vorhin und schneidet die Gerade $\overline{2\ 3}$ des Pascal'schen Sechsecks, d. i. die Tangente τ in C, in dem Punkte IV′, dessen Verbindungsgerade mit P die gesuchte Tangente t ist. Der wichtige Punkt IV′ ist aber offenbar bereits bei der Ermittlung des Parabelpunktes P erhalten worden.

Triest. Karl Schober.

2.

Eine einfache Ableitung der Bedingungen, welche die Coefficienten einer Rotationsfläche zweiten Grades erfüllen müssen.

Soll die Entfernung eines Punktes von der festen Ebene

$$lx + my + nz = 0$$

eine Function seiner Entfernung vom Anfangspunkte sein (dies ist die Definition einer Rotationsfläche, deren Rotationsaxe durch den Anfangspunkt geht), so hat man:

$$lx + my + nz - \varphi(x^2 + y^2 + z^2) = 0$$

Hieraus, durch partielle Differentiation nach x und y, sowie durch Elimination von φ':

$$\begin{vmatrix} l+n\frac{\partial z}{dx} & x+z\frac{\partial z}{\partial x} \\ m+n\frac{\partial z}{\partial y} & y+z\frac{\partial z}{\partial y} \end{vmatrix} = 0;$$

$$\text{A} \ldots . (ly-mx)+(lz-nx)\frac{\partial z}{\partial y}+(ny-mz)\frac{\partial z}{\partial x}=0$$

Durch Benutzung von

$$\frac{df}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=0; \quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\partial f}{\partial y}:\frac{\partial f}{\partial z};$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=0; \quad \frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\partial f}{\partial x}:\frac{\partial f}{\partial z}$$

verwandelt sich *A* in die „Bedingungsgleichung einer allgemeinen Rotationsfläche“:

$$\text{B} \ldots (mx-ly)\frac{\partial f}{\partial x}+(lz-nx)\frac{\partial f}{\partial y}+(ny-mz)\frac{\partial f}{\partial z}=0$$

Für eine Fläche zweiten Grades sei nun der Schnitt mit der unendlich fernen Ebene:

$$\text{C} \ldots a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2+2a_{23}x_2x_3+2a_{31}x_3x_1+2a_{12}x_1x_2=0$$

Diese Gleichung kann gedeutet werden als die eines Kegels durch den Anfangspunkt der Coordinaten — er hat zur vorgegebenen Fläche zweiten Grades die Beziehung, dass er parallel läuft (in den Richtungen seiner Strahlen) mit dem Asymptotenkegel der vorgegebenen Fläche. Er wird also ein Rotationskegel, wenn die vorgegebene Fläche zweiten Grades eine Rotationsfläche. Und umgekehrt ist letztere Fläche eine Rotationsfläche, sobald der Kegel *C* der Bedingung *B* genügt.

Wenden wir auf *C* die Bedingungsgleichung *B* an; wir erhalten:

$$\begin{aligned} \text{D} \ldots . & (mx_1-lx_2)(a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3) \\ & +(lx_3-nx_1)(a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3) \\ & +(nx_2-mx_3)(a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13})=0. \end{aligned}$$

Diese Gleichung muss eine Identität sein für alle Punkte x_1 x_2x_3 des Raumes; denn sie stellt wiederum eine Fläche zweiten Grades vor, und wird erfüllt von den Coordinaten sämtlicher Punkte des Kegels *C*, ohne doch auf die Gleichung letzten Kegels überführbar zu sein. Ein solches Verhalten ist nur möglich, wenn in *D* die Coefficienten der sämtlichen 6 Verbindungen: x_1^2, x_2^2, x_3^2, x_2x_3, x_3x_1, x_1x_2 einzeln verschwinden. Demnach herrschen zwischen den Grössen a_{ik} folgende 6 Beziehungen:

$$\left.\begin{array}{llll} 1) & a_{13}m & -a_{12}n & = 0 \\ 2) & -a_{23}l & +a_{12}n & = 0 \\ 3) & a_{23}l + a_{13}m & & = 0 \end{array}\right\} \text{ Summe } = 0$$

$$\begin{array}{llll} \text{I)} & (a_{33}-a_{22})l + a_{12}m & & -a_{13}n = 0 \\ \text{II)} & a_{12}l & +(a_{33}-a_{11})m & -a_{23}n = 0 \\ \text{III)} & a_{13}l & -a_{23}m & +(a_{22}-a_{11})\,n = 0 \end{array}$$

Das Bestehen dieser 5 Gleichungen legt den a_{ik} gewisse Bedingungen auf (eine der drei ersten Gleichungen kann weggelassen werden); die man folgendermaassen erhält: „Man wähle 2 mal eine Combination von dreien der fünf Gleichungen und eliminire aus jeder Combination die homogen vorkommenden l, m, n“

$$\text{1, 2, III gibt } \begin{vmatrix} & a_{13} & -a_{12} \\ -a_{23} & & a_{12} \\ a_{13} & -a_{23} & a_{22}-a_{11} \end{vmatrix} = 0 \text{ oder}$$

$$\text{E} \ldots\ldots a_{12}a_{13}^{\,2} - a_{12}a_{23}^{\,2} + a_{23}a_{13}(a_{22}-a_{11}) = 0$$

$$\text{1, 2, II gibt } \begin{vmatrix} & a_{13} & -a_{12} \\ -a_{23} & & a_{12} \\ a_{12} & a_{33}-a_{11} & -a_{23} \end{vmatrix} = 0 \text{ oder}$$

$$\text{F} \ldots\ldots a_{12}^{\,2}a_{13} + a_{12}a_{23}(a_{33}-a_{11}) - a_{13}a_{23}^{\,2} = 0$$

$$\text{1, 2, I gibt } \begin{vmatrix} & a_{13} & -a_{12} \\ -a_{23} & & a_{12} \\ a_{33}-a_{22} & a_{12} & -a_{13} \end{vmatrix} = 0 \text{ oder}$$

$$\text{G} \ldots\ldots a_{12}a_{13}(a_{33}-a_{22}) + a_{12}^{\,2}a_{23} - a_{13}^{\,2}a_{23} = 0$$

Es ist bekannt [1]), dass bereits das Bestehen von zweien dieser Gleichungen genügt, um auch alle übrigen ähnlich entstandenen erfüllt sein zu lassen.

Wir unternehmen beispielsweise den Nachweis dafür, dass die Bedingungen E und F auch G mit sich bringen.

Aus E und F schliesst man durch Elimination von a_{11}:

$$a_{23}^{\,2} \cdot a_{12} \cdot a_{13}(a_{33}-a_{22}) = 0$$

Es sei nun

1) $a_{23} = 0$, dann muss entweder auch $a_{12} = 0$, oder $a_{13} = 0$ sein (E, F)

---

1) Hesse, Geometrie des Raumes pagg. 255, 374, 376–378; ferner Salmon-Fiedler, Algebra der lin. Transformationen Art. 214 (unsere Bedingungen haben den directesten Zusammenhang mit jenen für die doppelte Berührung zweier Kegelschnitte, sowie mit jenen für die Existenz von zwei Doppelwurzeln einer biquadratischen Gleichung).

2) $a_{23} \gtrless 0$, $a_{12} = 0$; dann muss $a_{13} = 0$ sein (F); demnach G erfüllt

3) $a_{23} \lessgtr 0$, $a_{12} \gtrless 0$, $a_{13} = 0$ ist eine unmögliche Annahme wegen E

4) $a_{33} - a_{22} = 0$ liefert nach Ausrechnung von $a_{12}.E - a_{13}.F$: $a_{23}^2(a_{13}^2 - a_{12}^2) = 0$; demnach entweder $a_{23} = 0$, oder $a_{13} = a_{12}$ u. s. w.

Wir erhalten zusammenfassend als Resultat: „Die Bedingungen dafür, dass eine Fläche zweiter Ordnung eine Rotationsflsche vorstelle, können als Determinanten E, F, G ... geschrieben werden. Diese Determinanten liefern das Mittel die Coordinaten l, m, n jener Ebene darzustellen, auf welcher die Rotationsaxe senkrecht steht".

Denn aus irgend zweien der Gleichungen 1—3, I—III (welche die Bedingungen für die a_{ik} lieferten durch Elimination von l, m, n), kann man das Verhältniss $l : m : n$ berechnen, wenn eben die a_{ik} so beschaffen sind, dass sie eine Rotationsfläche C anzeigen.

Vergl. noch Salmon-Fiedler, Raumgeometrie I pag. 136, II pag. 256; Clebsch-Lindemann, Geometrie pag. 298, 138; Kummer in Crelle's Journal Bnd. 26.

München, Januar 1888.

Fritz Hofmann.

3.

Untersuchungen über eine Fläche 3. Ordnung, welche von Kreisen erzeugt wird, die durch zwei Punkte gehen und eine Gerade treffen.

Wie schon in dem Artikel „Ueber den geometrischen Ort der Mittelpunkte von Kreisen, welche durch zwei Punkte gehen und eine Gerade treffen" (Archiv 2. R. Tl. V. S. 442 — 448) hervorgehoben wurde, kann man für die folgenden Untersuchungen unbeschadet der Allgemeinheit das Coordinatensystem so annehmen, dass die gegebenen Punkte A und B beziehungsweise die Coordinaten $(0, 0, m)$, $(0, 0, -m)$ haben und die gegebene Gerade G durch die Gleichungen $(x = ax + b,\ y = c)$ dargestellt wird. Es hat dann der Kreis K, welcher durch die Punkte A und B geht und den Punkt $C \ldots (x_1, y_1, z_1)$ der Geraden G enthält, die Gleichungen:

$(x^2 + y^2 + z^2 - m^2)x_1 - (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - m^2)x = 0, \qquad yx_1 - xy_1 = 0$

dabei ist $y_1 = c$, $z_1 = ax_1 + b$. Eliminirt man aus diesen vier Gleichungen die drei Grössen x_1, y_1, z_1, so erhält man als Ausdruck für die Gesamtheit der Kreise ABC die Gleichung:

$$cy^3 + cx^2y + cyz^2 - c^2(1 + a^2)x^2 - (b^2 + c^2 - m^2)y^2 - 2abcxy - cm^2y = 0$$

Sie ist vom dritten Grade, die durch sie dargestellte Fläche F ist somit von der dritten Ordnung.

Die Fläche F geht durch den Coordinatenursprung O, hat mit der yz-Ebene die Gerade AB und den Kreis

$$cy^2 + cz^2 - (b^2 + c^2 = m^2)y - cm^2 = 0$$

mit der xz-Ebene drei Gerade (von denen zwei nach AB fallen, die dritte im Unendlichen liegt) gemein, und schneidet die xy-Ebene in der Curve 3. Ordnung:

$$cy(x^2 + y^2) - c^2(1 + a^2)x^2 - (b^2 + c^2 - m^2)y^2 - 2abcxy - cm^2y = 0$$

letztere Coordinatenebene ist Symmetrieebene der Fläche.

Für A ... $(0, 0, m)$ oder B ... $(0, 0, -m)$ als Ursprung des Coordinatensystems ergibt sich eine Flächengleichung ohne absolute Glieder und ohne Glieder der ersten Ordnung: A und B sind also Doppelpunkte der Fläche F. Da der Kegel

$$c^2(1 + a^2)x^2 + (b^2 + c^2 - m^2)y^2 + 2abcxy = 0$$

dessen Erzeugende mit der Fläche F in A und B drei zusammenfallende Punkte gemein haben, in die zwei Ebenen

$$c(1 + a^2)x + [ab \pm \sqrt{(1 + a^2)(m^2 - c^2) - b^2}]y = 0$$

oder auch

$$c[ab \mp \sqrt{(1 + a^2)(m^2 - c^2) - b^2}]x + (b^2 + c^2 - m^2)y = 0$$

zerfällt, so sind A und B biplanare Doppelpunkte. Hieraus folgt wieder, dass die Gerade AB oder die z-Achse auf F liegt. Ausserdem wird die Fläche, nach ihrer Entstehung zu schliessen, die Gerade G ... $(y = c,\ z = ax + b)$ enthalten, wie ihr auch wegen der symmetrischen Lage zur xy-Ebene die Gerade G' ... $(y = c,\ z + ax + b = 0)$ angehören muss. In der Tat ergiebt sich dies aus der Gleichung der Fläche durch Einsetzen von $y = c$ ebenfalls; nebenbei zeigt es sich zugleich, dass wegen $c = 0$ die unendliche Gerade G_∞ der Ebene $y = c$ den Schnitt von $y = c$ und F zur vollständigen Curve 3. Ordnung ergänzt. Die unendliche Ebene muss aber F ebenfalls nach einer Curve der 3. Ordnung schneiden: es wird also noch ein Kegelschnitt von F im Unendlichen liegen. Man findet, dass dies der imaginäre Kugelkreis J des Raumes ist. (Führt man nämlich in $F = 0$ $\frac{x}{w}$, $\frac{y}{w}$, $\frac{z}{w}$ ein und setzt $w = 0$, so for-

dert dies: $y = 0$ und $y^2+y^2+z^2 = 0$, welch letztere Gleichung J vorstellt). Auf F liegen sonach vier Gerade: AB, G, G' und G_∞. Jede durch eine solche Gerade gelegte Ebene schneidet F in einem Kegelschnitte. So enthalten z. B. die durch G_∞ gehenden oder zur xz-Ebene parallelen Ebenen $y = d$ die Curven 2. Ordnung C_2:

$$c(c+a^2c-d)x^2-cdz^2+2abcdx-cd^3+(b^2+c^2-m^2)d^2+cdm^2 = 0,$$

unter denen kein Kreis vorkommt, wohl aber die Doppel-Gerade AB (für $d = 0$), die zwei Geraden G und G' (für $d = c$) und eine Parabel (für $d = c+ca^2$), ferner unendlich viele Ellipsen (für $d > c(1+a^2)$ und $d < 0$) und Hyperbeln (für $0 < d < c+ca^2$). Die Mittelpunkte aller C_2 erfüllen die gleichseitige Hyperbel

$$xy-c(1+a^2)x-aby = 0$$

welche in ... ($x = ab$, $y = c+ca^2$) den Mittelpunkt hat, und deren Asymptoten zu den Coordinatenachsen parallel sind.

Die durch AB gelegten Ebenen schneiden, wie aus der Entstehung der Fläche hervorgeht, F in den Kreisen K. Es lässt sich nun zeigen, dass F von Ebenen, welche G oder G' enthalten, ebenfalls nach Kreisen k und k' geschnitten wird. Die Flächengleichung kann nämlich auch in der Form:

$$(y-c)(cx^2+cy^2+cz^2+m^2y) = (acx+by+cz)(acx+by+cz)$$

geschrieben werden, welche F als das Erzeugniss des Ebenenbüschels E ... $\lambda(y-c)-acx+by-cz) = 0$ und des Kugelbüschels $\mathfrak{K}$ ... $cx^2+cy^3+cz^2+m^2y-\lambda(acx+by+cz) = 0$ oder auch als das Erzeugniss des Ebenenbüschels E' ... $\mu(y-c)-(acx+by+cz) = 0$ und des Kugelbüschels $\mathfrak{K}'$ ... $cx^2+cy^2+cz^2+m^2y-\mu(acx+by-cz) = 0$ zu erkennen giebt. Alle Ebenen E gehen durch G, alle Ebenen E' durch G'; die Schnitte der Fläche F mit den durch G oder G' gelegten Ebenen erscheinen somit als Kugelschnitte, sind also Kreise. Die einer gegebenen Ebene E entsprechende Kugel $\mathfrak{K}$ aufzufinden, ist nicht schwer. E und $\mathfrak{K}$ begegnen sich in demselben Punkte der z-Achse, denn E schneidet auf der z-Achse immer das Stück λ ab, und die entsprechende Kugel $\mathfrak{K}$ begrenzt auf der z-Achse gleichfalls die Strecke λ. Die Kugel $\mathfrak{K}$ geht ausserdem immer durch den Anfangspunkt O des Coordinatensystems; ihr Mittelpunkt M ist bestimmt durch ... $\left(x = \frac{\lambda a}{2}, y = \frac{\lambda b-m^2}{2c}, z = \frac{\lambda}{2}\right)$, weshalb der Aufriss von OM mit dem Aufrisse von G parallel ist $\left(\frac{z}{x}\right.$ ist nämlich gleich $\left.a\right)$. Ebenso lassen sich die Ebenen E' und die Kugeln $\mathfrak{K}'$ leicht auf einander beziehen. Beide schneiden die z-Achse im Abstande $(-\mu)$ von O, E' geht immer durch G', $\mathfrak{K}'$ immer durch O.

Der Mittelpunkt M' von $\mathfrak{K}'$ hat die Coordinaten:

$$x = \frac{\mu a}{2}, \quad y = \frac{\mu b - m^2}{2c}, \quad z = -\frac{\mu}{2}$$

Von den Ebenen E und E' sind jene besondere wichtig, welche zugleich die ihnen entsprechende Kugel $\mathfrak{K}$ oder $\mathfrak{K}'$ berühren, für die also λ oder μ so beschaffen ist, dass der Abstand (M, E) oder (M', E') gleich dem Halbmesser von $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}'$ wird. Stellt man die diesbezügliche Bedingung aus den Gleichungen von E und $\mathfrak{K}$ auf, so zeigt es sich, dass $\lambda = \pm m$ sein muss, und infolge dessen die durch G gehenden Ebenen

$$acx + (b \mp m)y - cz \pm mc = 0$$

die Kugeln

$$(x^2 + y^2 + z^2)c + m^2 y \mp m^2(acx + by + cz) = 0$$

und daher auch die Fläche F berühren und zwar erfolgt die Berührung in den Punkten ... $(x = 0, \; y = 0, \; z = \pm m)$. Die durch G' legbaren Berührungsebenen der Fläche sind zu den vorigen symmetrisch.

Die bisherigen Untersuchungen lieferten das Resultat, dass durch jeden Punkt P der Fläche F drei Kreise K, k, k' und ein Kegelschnitt C_2 gehen: K enthält die Punkte P, A und B, k gehört der Ebene $(P, G) \equiv E$ und der ihr entsprechenden Kugel $\mathfrak{K}$, k' der Ebene $(P, G') \equiv E'$ und der ihr entsprechenden Kugel $\mathfrak{K}'$ an, C_2 liegt in der Ebene $y = d$. Hiervon kann man bei verschiedenen Aufgaben Anwendungen machen: bei der Construction von Schnittlinien der Fläche F mit Ebenen oder anderen Flächen, bei der Bestimmung der Berührungsebene eines Flächenpunktes P, u. a. m.

Die Flächengleichung nimmt, wenn für die Coordinaten x, y, z des Flächenpunktes P beziehungsweise die Werte $r\cos\alpha$, $r\cos\beta$, $r\cos\gamma$ eingeführt werden, und die Gleichung

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

Berücksichtigung findet, die folgende Gestalt an:

$$cr^2\cos\beta - c^2(1 + a^2)r\cos^2\alpha - (b^2 + c^2 - m^2)r\cos^2\beta - 2abcr\cos\alpha\cos\beta - cm^2\cos\beta = 0$$

Ersetzt man hierin r durch $\left(-\frac{m^2}{r_1}\right)$, dann erhält man die Gleichung des geometrischen Ortes jener Punkte $P_1 \ldots'(x_1, y_1, z_1)$, welche auf dem Strahle OP so liegen, dass $\overline{OP} \times \overline{OP_1} = -m^2$ ist, und zwar in einer Form, die mit der obigen Flächengleichung identisch ist. Die Punkte P_1 liegen also auch alle auf der Fläche F oder mit anderen Worten: die Fläche F ist ihre eigene Inverse für das Inversions-Centrum O und dte Potenz $(-m^2)$.

Wählt man den Punkt A ... $(0, 0, m)$ als Ursprungspunkt eines parallelen Coordinatensystems, so lautet die Flächengleichung:

$$cy^3+cx^2y+cyz^2-c^2(1+a^2)x^2-(b^2+c^2-m^2)y^2-2abcxy+2cmyz=0$$

oder:

$$cr\cos\beta-c^2(1+a^2)\cos^2\alpha-(b^2+c^2-m^2)\cos^2\beta-2abc\cos\alpha\cos\beta+2cm\cos\beta\cos\gamma=0$$

und deshalb hat die inverse Fläche von F für A als Centrum und $2p^2$ als Potenz (da $r\varrho=2p^2$ sein muss) die Gleichung:

$$2cp^2\cos\beta-c^2(1+a^2)\varrho\cos^2\alpha-(b^2+c^2-m^2)\varrho\cos^2\beta-2abc\varrho\cos\alpha\cos\beta+2cm\varrho\cos\beta\cos\gamma=0$$

oder in Bezug auf das alte Coordinatensystem:

$$c^2(1+a^2)x^2+(b^2+c^2-m^2)y^2+2abcxy-2cmyz+2cm^2y-2cp^2y=0$$

welche einem Kegel entspricht, dessen Scheitel in ... $\left(x=0,\ y=0,\ z=\frac{m^2-p^2}{m}\right)$ liegt. Der Symmetrieverhältnisse wegen wird man sagen können: Die Fläche F kann durch Inversion aus den zwei Kegeln

$$c^2(1+a^2)x^2+(b^2+c^2-m^2)y^2+2abcxy\mp2cmyz+2cm^2y-2cp^2y=0$$

abgeleitet werden. Diese Kegel enthalten, weil sie keine Rotationskegel sind, zwei Systeme von Kreisen; letztere und die Kegel-Erzeugenden erscheinen im inversen Bilde als Kreise, somit findet das frühere Resultat von den Kreissystemen auf F seine Bestätigung.

Weil eine Ebene (die das Centrum nicht enthält) durch Inversion in eine Kugel übergeht, so folgern wir die weitere Eigenschaft, dass F längs jedes erzeugenden Kreises von einer Kugel berührt wird, nämlich der Ableitung jener Ebene, welche den inversen Kegel in der Geraden berührt, die dem entsprechenden Kreise entspricht. Die Kugel, welche das inverse Abbild einer Ebene ist, hat ihren Mittelpunkt in der Senkrechten aus dem Centrum der Ebene: die Mittelpunkte aller Kugeln, welche F längs erzeugenden Kreisen berühren, liegen deshalb auf dem Kegel aus A, dessen Mantellinien normal zu den Berührungsebenen des inversen Kegels der Fläche sind. Nachdem die Kreise K ihre Centra in der xy-Ebene haben und auf derselben senkrecht stehen, so liegen auch die Mittelpunkte der durch die K gelegten Kugeln in der xy-Ebene, weshalb die Mittelpunkte der längs erzeugenden Kreisen K berührenden Kugeln die Schnittcurve vorerwähnten Normalkegels mit der xy-Ebene bilden müssen. Die einfachste Gleichung hat der Inversions-Kegel für das Centrum A und $p=m$, nämlich

$$c^2(1+a^2)x^2+(b^2+c^2-m^2)y^2+2abcxy-2cmyz=0$$

Die Normalen aus A zu seinen Berührungsebenen sind:

$$cmy\xi + [c^2(1+a^2)x + abcy](\zeta - m),$$
$$cmy\eta + [(b^2+c^2-m^2)y + abcx - cmz](\zeta - m)$$

und dieselben schneiden die xy-Ebene in der Parabel P_2:

$$\xi^2 - 2ab\xi + 2c(1+a^2)\eta + a^2b^2 - (1+a^2)(b^2+c^2-m^2) = 0$$

Die Fläche F kann somit auch als die Umhüllende aller jener Kugeln betrachtet werden, welche durch A und B gehen und ihre Mittelpunkte auf der Parabel P_2 liegen haben. P_2 ist dieselbe Parabel, deren Fusspunktscurve für den Pol O die in dem eingangs citirten Artikel besprochene Linie 3. Ordnung C_3 ist; es werden also zwischen F und C_3 nicht nur auf Grund ihrer Entstehung aus A, B, G, sondern auch im Hinblicke auf die Parabel P_2 Beziehungen abgeleitet werden können.

Pola, im Februar 1888.

Fr. Schiffner.

4.

Beweis eines Dreieckssatzes.

Im Dreieck ABC halbirt die Linie CD den Winkel $ACD = \gamma$. Die Linie AO halbirt den Winkel $CAB = \beta$, also ist O der Mittelpunkt des einbeschriebenen Kreises, während M der Mittelpunkt des umbeschriebenen Kreises sein möge.

Wkl. $OAB = \beta/2$, Wkl. $BAD = BCD = \gamma/2$, also

$$\text{Wkl. } OAD = \frac{\beta+\gamma}{2}.$$

Wkl. AOD ist als Aussenwinkel des Dreiecks AOC

$$= \frac{\beta+\gamma}{2}, \text{ also}$$

$$\text{Wkl. } OAD = AOD, \text{ also } AD = OD \qquad \text{I.}$$

Lehrsatz: Der um D mit DA beschriebene Bogen ist der geometrische Ort des Mittelpunktes des einbeschriebenen Kreises. (Vgl. Spieker, Geometrie, § 126.)

Die zweite und dritte Gleichung sind nichts anderes, als Anwendungen des sog. erweiterten Pyth. Lehrsatzes auf die Dreiecke ADM und ODM.

$$MA = MD = r; \quad OE = FG = \varrho; \quad OM = d; \quad FM = x.$$

Im Dreieck ADM ist $AD^2 = MA^2 + MD^2 - 2.MD.MG$, oder

$$AD^2 = 2r^2 - 2r.(\varrho \pm x) \qquad \text{II.}$$

Im Dreieck ODM ist $OD^2 = OM^2 + MD^2 \mp 2.MD.MF$, oder

$$OD^2 = d^2 + r^2 \mp 2r.x \qquad \text{III.}$$

(Die Doppelzeichen, je nachdem F auf den Radius MD oder auf dessen Verlängerung fällt.)

Da nach I. $AD = OD$, so ist nun auch

$$2r^2 - 2r(\varrho \pm x) = d^2 + r^2 \mp 2rx$$

$$r^2 - 2r\varrho = d^2$$

Bonn, Juli 1888. Prof. Dr. R. Caspar.

5.

Reduction einiger Integrale.

Zur Reduction des Integrals $\int \frac{dt}{\sqrt{t^6 + \alpha t^3 + 1}}$ hat man:

$$t^6 + \alpha t^3 + 1 = (t^2 + \beta_1 t + 1)(t^2 + \beta_2 t + t_1)(t^2 + \beta_3 t + 1)$$

wobei $\beta_1 \beta_2 \beta_3$ die Wurzeln der Gleichung

$$\beta^3 - 3\beta = \alpha$$

bezeichnen. Setzt man

$$t = \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$$

so wird

$$dJ = \frac{dt}{\sqrt{t^6 + \alpha t^3 + 1}}$$

$$= \tfrac{1}{2} \frac{\cos \frac{\varphi}{2} d\varphi}{\sqrt{\left(1 + \frac{\beta_1}{2} \sin\varphi\right)\left(1 + \frac{\beta_2}{2} \sin\varphi\right)\left(1 + \frac{\beta_3}{2} \sin\varphi\right)}}$$

Da nun

$$2\cos\frac{\varphi}{2} = \sqrt{1 + \sin\varphi} + \sqrt{1 - \sin\varphi}$$

so folgt weiter

$$dJ = \tfrac{1}{4}\,\frac{d\varphi[\sqrt{1+\sin\varphi}+\sqrt{1-\sin\varphi}]}{\sqrt{\left(1+\frac{\beta_1}{2}\sin\varphi\right)\left(1+\frac{\beta_2}{2}\sin\varphi\right)\left(1+\frac{\beta_3}{2}\sin\varphi\right)}}$$

Wird nun

$$\xi = 1+\sin\varphi \qquad \eta = 1-\sin$$

$$m_k = \frac{\beta_k - 2}{\beta_k} \qquad n_k = \frac{\beta_k + 2}{\beta_k}$$

gesetzt, so folgt:

$$\frac{4J}{\sqrt{\alpha}} = \int \frac{d\xi}{\sqrt{(\xi+z)(\xi-m_1)(\xi-m_2)(\xi-m_3)}}$$

$$-\int \frac{d\eta}{\sqrt{(\eta-z)(\eta-n_1)(\eta-n_2)(\eta-n_3)}}$$

Seien u, v, u_1, v_1 Constanten, über die wir nach Belieben verfügen können, und setzen wir

$$\xi = \frac{u+2x'}{v+x'} \qquad \eta = \frac{u_1+2x_1'}{v_1+x_1'}$$

$$p_k = \frac{u - v m_k}{2 - m_k} \qquad q_k = \frac{u_1 - v_1 n_k}{2 - n_k}$$

so wird, da

$$(2-m_1)(2-m_2)(2-m_3) = \frac{2+\alpha}{\alpha}$$

$$(2-n_1)(2-n_2)(2-n_3) = \frac{2-\alpha}{\alpha}$$

$$\frac{4J}{\sqrt{\alpha}} = \frac{1}{i}\sqrt{\frac{\alpha}{2+\alpha}}\int \frac{dx'}{\sqrt{(p_1-x')(p_2-x')(p_3-x')}}$$

$$-\sqrt{\frac{\alpha}{2-\alpha}}\int \frac{dx_1'}{\sqrt{(q_1-x_1')(q_2-x_1')(q_3-x_1')}}$$

Wendet man nun die Substitutionen

$$x' = p_1 - 2\,\frac{p_1-p_3}{1-\cos\theta}$$

$$x_1' = q_1 - 2\,\frac{q_1-q_3}{1-\cos\theta'}$$

an, so folgt weiter

$$\frac{4}{\sqrt{\alpha}} J = 2 \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{(2+\alpha)(p_3-p_1)}} \int \frac{d\frac{\theta}{2}}{\sqrt{1-\frac{p_1-p_2}{p_1-p_3}\sin^2\frac{\theta}{2}}}$$

$$-2 \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{(2-\alpha)(q_1-q_3)}} \int \frac{d\frac{\theta'}{2}}{\sqrt{1-\frac{q_1-q_2}{q_1-q_3}\sin^2\frac{\theta'}{2}}}$$

Zur Reduction des Integrals $\int \frac{dt}{\sqrt{t^8+\alpha t^4+1}}$ [1]) hat man:

$$\frac{dt}{\sqrt{t^8+\alpha t^4+1}} = \frac{dt}{t^2} \frac{1}{\sqrt{\left(t^2+\frac{t}{t^2}\right)^2-(2-\alpha)}}$$

setzt man $\frac{1}{t} = z$ so wird

$$\frac{dt}{\sqrt{t^8+\alpha t^4+1}} = -\frac{dz}{\sqrt{\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)^2-(2-\alpha)}}$$

Substituiren wir nun $z = \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$, so folgt weiter

$$\frac{dt}{\sqrt{t^8+\alpha t^4+1}} = -\frac{2\,d\varphi \sin\varphi}{\sqrt{2+\alpha}\sqrt{1+2\frac{6-\alpha}{2-\alpha}\cos^2\varphi+\cos^4\varphi}}$$

oder wenn

$$\cos\varphi = x \qquad 2\frac{6-\alpha}{2+\alpha} = \beta$$

gesetzt wird:

$$\frac{dt}{\sqrt{t^8+\alpha t^4+1}} = \frac{2\,dx}{\sqrt{2+\alpha}\sqrt{1+\beta x^2+x^4}}$$

Die weitere Reduction liegt an der Hand.

Prag, im Juni 1887. W. Láska.

---

1) Die Reduction von $\int \frac{dt}{\sqrt{\pm(1-t^3)}}$ gibt Richelot, Crelle XXXII. p. 213.

VIII.

Ueber die Schaaren von Flächen vierten Grades mit sechzehn singulären Punkten, welche durch eine Lemniskate gehen.

Von

Dr. **W. Schjerning** in Barmen.

Capitel I.

Die Aufstellung der Flächengleichung.

Kummer (Berliner Monatsberichte 1864, S. 255) beweist den Satz:

Durch jede gegebene Curve vierten Grades kann man sechs verschiedene vierfach unendliche Schaaren von Flächen vierten Grades mit sechzehn singulären Punkten legen, und lehrt gleichzeitig die Gleichung dieser Flächen aufstellen. Es ist von Interesse, diesen allgemeinen Satz auf einen speciellen Fall anzuwenden, und im Folgenden sollen einige der Resultate angegeben werden; zu denen man geführt wird, wenn man als Curve vierten Grades die Lemniskate mit der Gleichung

$$(1) \qquad (x^2+y^2)^2 - 2w^2(x^2-y^2) = 0$$

wählt.

Kummer geht von folgender Form der Curvengleichung aus

$$(2)\qquad \sqrt{p_0(Ap_0+A_1q_0+A_2r_0)}+\sqrt{q_0(Bp_0+B_1q_0+B_2r_0}+\sqrt{r_0(Cp_0+C_1q_0+C_2r_0)}=0$$

und verweist auf die gleichbedeutende rationale Hesse'sche Form (C. J. 49, 301):

$$(3)\qquad \nabla = r^2\Delta = F_{32}^2F_{34}^2+F_{23}^2F_{14}^2+F_{13}^2F_{24}^2-2F_{23}F_{14}F_{13}F_{24}$$
$$-2F_{13}F_{24}F_{12}F_{34}-2F_{12}F_{34}F_{23}F_{14}=0$$

die für folgende Werte der F mit der Kummer'schen Form übereinstimmt:

$$(4)\qquad \begin{aligned} F_{12} &= Ap_0+A_1q_0+A_2r_0 & F_{34} &= p_0\\ F_{23} &= Bp_0+B_1q_0+B_2r_0 & F_{14} &= q_0\\ F_{13} &= Cp_0+C_1q_0+C_2r_0 & F_{24} &= r_0 \end{aligned}$$

und eine Folge der Hesse'schen Determinante

$$(5)\qquad \begin{vmatrix} 0 & F_{12} & F_{13} & F_{14}\\ F_{21} & 0 & F_{23} & F_{24}\\ F_{31} & F_{32} & 0 & F_{34}\\ F_{41} & F_{42} & F_{43} & 0 \end{vmatrix} = 0$$

für $F_{ik}=F_{ki}$ ist.

In die Form einer solchen symmetrischen Determinante ist also die Gleichung der Lemniskate zu bringen; dazu muss man jedoch ihre Doppeltangenten kennen (in der Determinante sind $F_{12}=0$ u. s. w. Gleichungen von Doppeltangenten der durch sie repräsentirten Curve).

Das Problem der Doppeltangenten an Curven vierten Grades, allgemein noch ungelöst, lässt sich jedoch für Curven vom Geschlecht 0, bei denen die Coordinaten sich als rationale Functionen eines Parameters ausdrücken lassen, behandeln. Bei der Lemniskate sind die Ausdrücke für die Coordinaten:

$$(6)\qquad x=\frac{\lambda^2+1}{\lambda^2-1} \qquad y=\frac{2\lambda}{\lambda^2-1}$$

und die Berührungspunkte der Doppeltangenten lassen sich dann nach einem von Schwering (Mathematische Miscellen, Programm, Coesfeld 1881) angegebenen Verfahren bestimmen.

Auf unsere Form der Lemniskatengleichung angewendet, führt dies Verfahren zu den Gleichungen der folgenden vier Doppeltangenten

$$(7)\qquad \begin{aligned} &1)\quad y-\frac{w}{2}=0 \qquad 3)\quad x+\frac{iw}{2}=0\\ &2)\quad y+\frac{w}{2}=0 \qquad 4)\quad x-\frac{iw}{2}=0 \end{aligned}$$

mit deren Hülfe wir folgende Determinante aufstellen können:

$$(8)\qquad \begin{vmatrix} 0 & w & y-\frac{w}{2} & ix-\frac{w}{2}\\ w & 0 & ix+\frac{w}{2} & y+\frac{w}{2}\\ y-\frac{w}{2} & ix+\frac{w}{2} & 0 & -w\\ ix-\frac{w}{2} & y+\frac{w}{2} & -w & 0 \end{vmatrix} = 0$$

welche ausgerechnet unsere Lemniskatengleichung (1) ergiebt.

Vergleichen wir die Glieder dieser Determinante mit den F aus (5), so können wir aus (4) die Werte der ABC für unseren Fall finden. Es wird

$$(9)\quad A=-1,\ A_1=0,\ A_2=0,\ B=-1,\ B_3=+1,\ B_2=0,\ C=1,\ C_1=0,\ C_2=1$$

Hier muss ich wieder auf Kummer (Berl. Monatsber. 1864, 255) verweisen. Er führt die elf Grössen $\beta\gamma\delta\alpha'\gamma'\delta'\alpha''\beta''\delta''mn$ durch die elf Gleichungen ein

$$(10)\qquad \begin{aligned} &A=\delta && B=\delta'+\alpha' && C=\delta''+\alpha''\\ &A_1=m\delta+\beta && B_1=m\delta' && C=m\delta''+\beta'';\\ &A_2=n\delta+\gamma && B_2=n\delta'+\gamma' && C_2=n\delta''\\ &\alpha'\gamma+\alpha''\beta-\beta\gamma=0 && \alpha''\gamma'+\beta''\gamma-\alpha''\beta''=0 \end{aligned}$$

und benutzt zu ihrer Berechnung die Hülfsgrösse

$$(11)\quad u=-\frac{\gamma}{\alpha''},\quad \text{also}\quad \frac{u+1}{u}=\frac{\alpha'}{\beta};\quad u+1=\frac{\gamma'}{\beta''}$$

welche sich aus der kubischen Gleichung

$$(12)\qquad \begin{vmatrix} 2uA & , & uB-(u+1)A_1, & A_2+uC\\ uB-(u+1)A_1 & , & -2(u+1)B_1 , & B_2-(u+1)C_1\\ A_2+uC & , & B_2-(u+1)C_1, & 2C_2 \end{vmatrix} = 0$$

finden lässt. Diese kubische Gleichung führt uns bei unseren Werten der A, B, C zu

$$(13)\qquad \begin{aligned} u_1 &= 0 \\ u_{\substack{2\\3}} &= -2 \end{aligned}$$

Im allgemeinen führt ein jeder Wert von u zu zwei Werten der durch die Gleichungen (10) definirten 11 Grössen, und es ergeben sich aus den drei Werten von u die sechs verschiedenen Flächenschaaren. In unserem Fall liefert der Wert $u = 0$ nur einen Wert der 11 Grössen, zb. $m = n = 0$ und für einzelne der α, β, γ, δ sofort unendliche Werte; dieser Fall soll einer späteren besonderen Betrachtung vorbehalten bleiben. Von den vier noch übrigen Schaaren von Flächen fallen ferner je zwei zusammen. Also:

1. „Von den sechs verschiedenen Schaaren von Flächen vierten „Grades mit sechszehn singulären Punkten, welche durch eine Lem„niskate hindurchgehen, fallen je zwei zusammen."

2. „Eine dieser drei Schaaren besitzt zum Teil unendliche Coef„ficienten."

Der Wert $u = -2$ liefert uns für die 11 Grössen aus (10) folgende Ausdrücke:

$$(14)\qquad \begin{array}{lll} m = -1 \pm i & n = 1 \pm i & \\ \beta = -1 \pm i & \gamma = 1 \pm i & \delta = -1 \\ \alpha' = -\frac{1}{2}(1 \mp i) & \gamma' = \pm i & \delta' = -\frac{1}{2}(1 \pm i) \\ \alpha'' = \frac{1}{2}(1 \pm i) & \beta'' = \mp i & \delta'' = \frac{1}{2}(1 \mp i) \end{array}$$

Mit diesen Werten wird die verlangte Flächengleichung

$$(15)\qquad \sqrt{p(\beta q + \gamma r + \delta s)} + \sqrt{q(\alpha' p + \gamma' r + \delta' s)} + \sqrt{r(\alpha'' p + \beta'' q + \delta'' s)} = 0$$

wobei noch

$$(16)\qquad \begin{aligned} p &= p_0 + az \\ q &= q_0 + bz \\ r &= r_0 + cz \\ s &= p_0 + mq_0 + nr_0 + dz \end{aligned}$$

in unserem Falle

$$(17)\qquad \begin{aligned} p &= -w + az \\ q &= ix - \frac{w}{2} + bz \end{aligned}$$

(17)

$$r = y + \frac{w}{2} + cz$$

$$s = \mp x + y + dz + i(-x \pm y)$$

bedeuten. a, b, c, d bleiben willkürliche Constanten. Führen wir alle diese Werte ein, so erhalten wir als Flächengleichung:

(18)

$$\sqrt{-z^2a(b-c+d)+zw(a+b-c+d)-w^2+i[\pm z^2a(b+c)\mp zw(b+c)]}$$
$$+\sqrt{\left\{-x^2\mp xz\frac{a+2c-d}{2}-z^2\frac{b(a+d)}{2}+zw\frac{a+2b+d}{4}-\frac{w^2}{4}\right.}$$
$$\left.+i\left[-xz\frac{a-2b+d}{2}\pm z^2\frac{b(a+2c-d)}{2}\mp zw\frac{a+2c-d}{4}\right]\right\}$$
$$+\sqrt{\left\{y^2+xz\frac{a+2c+d}{2}+z^2\frac{c(a+d)}{2}+zw\frac{a-2c+d}{4}-\frac{w^2}{4}\right.}$$
$$\left.+i\left[\pm yz\frac{a-2b-d}{2}\pm z^2\frac{c(a-2b-d)}{2}\pm zw\frac{a-2b-d}{4}\right]\right\}=0$$

und in eine rationale Form entwickelt:

(19)

$$z^4(a^2bc+a^2bd-a^2cd+a^2d^2-2ab^2c-ab^2d+2abc^2-abd^2-ac^2d$$
$$+acd^2-4b^2c^2+2b^2cd-2bc^2d+bcd^2)$$
$$+\tfrac{1}{2}z^3w(a^2b-a^2c-2a^2d-2ab^2+4abc-2abd-2ac^2$$
$$+2acd-2ad^2-4b^2c+4b^2d+4bc^2-8bcd+3bd^2+4c^2d-3cd^2)$$
$$-\tfrac{1}{4}z^2w^2(a^2-2ab+2ac-6ad-4bc+6bd-6cd+d^2)$$
$$+x^2z^2(4ac-3ad-b^2+2bd+c^2)$$
$$+y^2z^2(4ab+3ad-b^2+c^2+2cd)+x^2zw(2a+b-3c+2d)$$
$$-y^2zw(2a+3b-c+2d)$$
$$-2x^2w^2+2y^2w^2+x^4+2x^2y^2+y^4\pm 2xyz^2(a-b+c)(b+c)$$
$$\mp xzw^2(a+2c-d)\pm x^3z(a+2c-d)$$
$$+x^2yz(a+2c+d)+yzw^2(a+2c+d)+y^3z(a+2c+d)\pm xy^2z(a+2c-d)$$
$$\mp xz^3(a^2b+a^2d-ab^2-4abc-3ac^2+4acd-ad^2$$
$$+4b^2c-b^2d-2bcd+bd^2-c^2d)$$
$$+yz^3(3a^2b+a^2d-3ab^2+4abc-ac^2+2acd+ad^2-4b^2c$$
$$+b^2d-2bcd+bd^2+c^2d)$$
$$\pm\tfrac{1}{2}xz^2w(a^2+6ab+2ac-6b^2-6c^2+8cd-d_1)$$
$$-\tfrac{1}{2}yz^2w(3a^2+2ab+6ac+2ad-2b^2+4bd-2c^2+3d^2)$$

(19)

$$
\left.\begin{array}{l}
\mp\tfrac{1}{2}z^4(a^2b^2+2a^2bd-a^2c^2+2a^2cd+4ab^2c+4abc^2+2abd^2 \\
\qquad +2acd^2+4b^2cd-b^2d^2+4bc^2d+c^2d^2) \\
\pm\tfrac{1}{2}z^3w(a^2b+a^2c+4abd+4acd+4b^2c-2b^2d+4bc^2+bd^2 \\
\qquad +2c^2d+cd^2) \\
+xz^3(3a^2c-a^2d+ab^2-4abc+2abd+3ac^2-ad^2-b^2d-4bc^2 \\
\qquad +2bcd-c^2d+cd^2) \\
\mp yz^3(a^2c-a^2d+3ab^2+4abc+4abd+ac^2+ad^2+b^2d+4bc^2 \\
\qquad +2bcd+c^2d+cd^2) \\
\mp\tfrac{1}{2}x^2w^2(b+c)(a-b+c+d)\pm\tfrac{1}{2}x^2z^2(a^2+8ac-12bc+4bd-d^2) \\
\qquad \pm\tfrac{1}{2}y^2z^2(a^2-8ab-12bc-4cd-d^2) \\
+\tfrac{1}{2}xz^2w(3a^2-6ab-2ac+2ad-2b^2-2c^2-4cd+3d^2) \\
\qquad -xzw^2(a-2b+d) \\
\mp\tfrac{1}{2}yz^2w(a^2-2ab-6ac-6b^2-8bd-6c^2-d^2) \\
\qquad \pm yzw^2(a-2b-d) \\
\pm x^2zw(a-3b-c-d)+x^3z(a-2b+d)\pm x^2yz(a-2b-d) \\
\qquad +xyz^2(a^2-2ab+2ac-4bc+d^2) \\
\pm y^2zw(a+b+3c-d)\pm y^3z(a-2b-d)+xy^2z(a-2b+d)
\end{array}\right\}
+i\left\{\begin{array}{l}\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\end{array}\right\}=0
$$

Der Schnitt dieser Flächen mit der Ebene $z=0$ ist, da nur die unterstrichenen Glieder stehen bleiben, die Lemniskate.

Die beiden noch übrigen Schaaren von Flächen sind vierfach unendlche, da die Constanten a, b, c, d ganz willkürliche sind. Um die Gleichung zu einer reellen zu machen, müssen wir die Constanten complex annehmen, und haben dann zu ihrer Bestimmung aus den in a, b, c, d linearen Coefficienten der in z linearen Glieder folgende 4 Gleichungen:

Coefficient von

$$
\begin{array}{ccc}
x^2zw & & \\
y^2zw & & \\
x^3z, & xy^2z, & -xzw^2 \\
y^3z, & x^2yz, & yzw^2
\end{array}
$$

Schaar I (oberes Vorzeichen):

$$
\begin{aligned}
2a+b-3c+2d+i(a-3b-c-d) &= A \\
-2a-3b+c-2d+i(a+b+3c-d) &= B
\end{aligned}
\qquad (20)
$$

(20)
$$\begin{aligned} a+2c-d+i(a-2b+d) &= C \\ a+2c+d+i(a-2b-d) &= D \end{aligned}$$

Schaar II (unteres Vorzeichen):

$$\begin{aligned} 2a+b-3c+2d-i(a-3b-c-d) &= A \\ -2a-3b+c-2d-i(a+b+3c-d) &= B \\ -a-2c+d+i(a-2b+d) &= C \\ a+2c+d-i(a-2b-d) &= D \end{aligned}$$

woraus sich die Ausdrücke ergeben:

(21)

Schaar I:	Schaar II:
$a = \frac{1}{8}[A(1-2i)-B(1+2i)]$	$a = \frac{1}{8}[A(1+2i)-B(1-2i)]$
$b = \frac{1}{16}(-A-3B+4Ci)$	$b = \frac{1}{16}(-A-3B+4Ci)$
$c = \frac{1}{16}(-3A-B+4D)$	$c = \frac{1}{16}(-3A-B+4D)$
$d = \frac{1}{4}(-C+D)(1+i)$	$d = \frac{1}{4}(C+D)(1-i)$

Durch Einsetzen dieser Ausdrücke wird die Flächengleichung (19) reell, und zwar erhält man überraschender Weise für beide Schaaren von Flächen gleiche Ausdrücke. Ersetzt man in der gleicherweise aus beiden Ausdrucksgruppen resultirenden Gleichung noch A durch $8a$, B durch $8b$, C durch $8c$ und D durch $8d$, so ergiebt sich als Gleichung der einen übrigen Flächenschaar:

(22)
$$\begin{aligned} &x^4+2x^2y^2+y^4-2x^2w^2+2y^2w^2+32cdxyz^2+2x^2z^2(-7a^2-6ab \\ &\quad -3b^2+12c^2+4d^2) \\ &+2y^2z^2(3a^2+6ab+7b^2+4c^2+12d^2)+32acxz^2w+32bdyz^2w \\ &\quad +8ax^2zw+8cx^3z+8cxy^2z \\ &-8cxzw^2+8by^2zw+8dy^3z+8dx^2yz+8dyzw^2+8cxz^3(-7a^2 \\ &\quad -6ab-3b^2+4c^2+4d^2) \\ &+8dyz^3(3a^2+6ab+7b^2+4c^2+4d^2)+4z^2w^2((a+b)^2-(c^2-d^2)) \\ &+4z^4((a^2-b^2)^2+4(c^2+d^2)^2+6(a^2d^2-b^2c^2)-14(a^2c^2-b^2d^2) \\ &\quad -12ab(c^2-d^2)) \\ &+8z^3w(-a^3-a^2b+ab^2+b^3+4ac^2+4bd^2) \\ &=0 \end{aligned}$$

in homogenen Coordinaten. Wir haben:

3. „Die beiden Flächenschaaren, bei denen alle Bestimmungs-„constanten endlich blieben (Satz 1. und 2.), fallen in eine zusam-„men."

a, b, c, d bleiben willkürliche Constanten.

Capitel II.

Die Gleichungen der singulären Ebenen und die Coordinaten der singulären Punkte.

Der Anfangspunkt der Coordinaten ist ein singulärer Punkt unserer Flächen, da jede durch ihn hindurch gehende Gerade die Fläche in zwei in ihm zusammenfallenden Punkten schneidet:

4. „Der reelle Doppelpunkt der Lemniskate ist ein singulärer „Punkt der Flächen."

Für diesen Fall können wir noch eine Betrachtung von Caylay (Proceed. of the London Math. Soc. III, 241) die Gleichung des von diesem Punkte aus der Fläche umschriebenen Kegels sechsten Grades finden. Ist nämlich die Gleichung einer Fläche vierten Grades mit sechszehn singulären Punkten, deren einer der Anfangspunkt ist:

$$Aw^2+2Bw+C=0 \tag{23}$$

so ist die Gleichung des aus dem Anfangspunkte der Fläche umschriebenen Kegels (vgl. auch Kummer, Berl. Monatsber. 1864, 246):

$$AC-B^2=0 \tag{24}$$

und wenn man dies aus unserer Gleichung (22) berechnet:

$$\begin{aligned}
&x^6+x^4y^2-x^2y^4-y^6+12cx^5z+4dx^4yz+8cx^3y^2z-8dx^2y^3z\\
&\quad -4cxy^4z-12dy^5z\\
&+4x^4z^2(-2(a+b)^2+15c^2+d^2)+32cdx^3yz^2+8x^2y^2z^2(2(a+b)^2\\
&\quad +3(c^2-d^2))-32cdxy^3z^2+4y^4z^2(-2(a+b)^2-c^2-15d^2)\\
&+32cx^3z^3(-2(a+b)^2+5c^2+d^2)+32dx^2yz^3(2(a+b)^2\\
&\quad +3c^2-d^2)+32cxy^2z^3(2(a+b)^2+c^2-3d^2)\\
&\quad +32dy^3z^3(-2(a+b)^2-c^2-5d^2)\\
&+16x^2z^4((a+b)^4-4(a+b)^2(3c^2-d^2)+15c^4+6c^2d^2-d^4)\\
&\quad +128cdxyz^4(2(a+b)^2+c^2-d^2)+16y^2z^4(-(a+b)^4\\
&\quad +4(a+b)^2(c^2-3d^2)+c^4-6c^2d^2-15d^4)
\end{aligned} \tag{25}$$

$$(25)\quad \left\{\begin{array}{l} +64cxz^5((a+b)^4-4(a+b)^2(c^2-d^2)+3c^4+2c^2d^2-d^4) \\ \quad +64dyz^5(-(a+b)^4+4(a+b)^2(c^2-d^2)+c^4-2c^2d^2-3d^4) \\ +64z^6((a+b)^4(c^2-d^2)-2(a+b)^2(c^2-d^2)^2 \\ \quad +c^6+c^4d^2-c^2d^4-d^6) = 0 \end{array}\right.$$

Dieser Kegel zerfällt für unsere Flächen in 6 singuläre Ebenen, welche durch den Anfangspunkt gehen und die Flächen längs Kegelschnitten berühren; die Gleichung des Kegels muss sich also in 6 lineare Factoren zerlegen lassen. Man findet als die Gleichungen der 6 durch den Anfangspunkt gehenden singulären Ebenen die folgenden:

$$(26)\quad \begin{array}{rl} x-iy+2z(a+b+c-di)=0 & 6) \\ -x+iy+2z(a+b-c+di)=0 & 7) \\ x+iy+2z(-a-b+c+di)=0 & 8) \\ -x-iy+2z(-a-b-c-di)=0 & 9) \\ x+y+2z(c+d)=0 & 1) \\ x-y+2z(c-d)=0 & 13) \end{array}$$

Gleichungen, deren Product in der Tat die Kegelgleichung (25) ergiebt.

Nennen wir den Anfangspunkt den singulären Punkt 1, so haben wir diese Ebenen mit 1, 6, 7, 8, 9, 13 zu bezeichnen, wie aus der folgenden, von Cayley aufgestellten Tabelle hervorgeht, aus der sowol zu ersehen ist, welche singulären Ebenen durch einen singulären Punkt gehen, und welche singulären Punkte in einer singulären Ebene liegen, als auch, welche beiden singulären Ebenen durch die Verbindungslinie je zweier singulären Punkte gehen, und welche beiden singulären Punkte auf der Scheitellinie je zweier singulären Ebenen liegen.

Cayleys Tabelle.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16						
1	*	7,8	6,8	6,7	9.13	1,6	1,7	1,8	1,9	6,13	7,13	8,13	1,13	6.9	7,9	8,9	1	9	13	8	7	6
2	7,8	*	5,8	5,7	2,5	10,14	2,7	2,8	5,14	2,10	7,14	8,14	5,10	2,14	7,10	8,10	2	10	14	7	8	5
3	6,8	5,8	*	5,6	3,5	3,6	11,15	3,8	5,15	6,15	3,11	8,15	5,11	6,11	3,15	8,11	3	11	15	6	5	8
4	6,7	5,9	5,6	*	4,5	4,6	4,7	12,16	5,16	6.16	7,16	4,12	5,12	6,12	7,12	4,16	4	12	16	5	6	7
5	9,13	2,5	3,5	4,5	*	3,4	2,4	2,3	5,9	2,13	3,13	4,13	5,13	2,9	3,9	4,9	5	13	9	4	3	2
6	1,6	10,14	3,6	4,6	3,4	*	1,4	1,3	1,14	6,10	3,14	4,14	1,10	6.14	3,10	4,10	6	14	10	3	4	1
7	1,7	2,7	11.15	4,7	2,4	1,4	*	1,2	1,15	2,15	7,11	4,15	1,11	2,11	7,15	4,11	7	15	11	2	1	4
8	1,8	2,8	3,8	12,16	2,3	1,3	1,2	*	1,16	2,16	3,16	8,12	1,12	2,12	3,12	8,16	8	16	12	1	2	3
9	1,9	5,14	5,15	5,16	5,9	1,14	1,15	1,16	*	15,16	14,16	14,15	1,5	9,14	9,15	9,16	9	1	5	16	15	14
10	6,13	2,10	6,15	6,16	2,13	6,10	2,15	2,16	15,16	*	13,16	13,15	10,13	2,6	10,15	10,16	10	2	6	15	16	13
11	7,13	7,14	3,11	7,16	3,13	3,14	7,11	3,16	14,16	13,16	*	13,14	11,13	11,14	3,7	11,16	11	3	7	14	13	16
12	8,13	8,14	8,15	4,12	4,13	4,14	4,15	8,12	14,15	13,15	13,14	*	12,13	12,14	12,15	4,8	12	4	8	13	14	15
13	1,13	5,10	5,11	5,12	5,13	1,10	1,11	1,12	1,5	10,13	11,13	12,13	*	11,12	10,12	10,11	13	5	1	12	11	10
14	6,9	2,14	6,11	6,12	2,9	6,14	2,11	2,12	9,14	2,6	11,14	12,14	11,12	*	9,12	9,11	14	6	2	11	12	9
15	7,9	7,10	3,15	7,12	3,9	3,10	7,15	3,12	9,15	10,15	3,7	12,15	10,12	9,12	*	9.10	15	7	3	10	9	12
16	8,9	8,10	8,11	4,16	4,9	4,10	4,11	8,16	9,16	10,16	11,16	4,8	10,11	9,11	9,10	*	16	8	4	9	10	11

Auf der Schnittlinie von je zwei singulären Ebenen liegen zwei singuläre Punkte; unsere 6 singulären Ebenen, unter die wir die Zahlen 1, 6, 7, 8, 9, 13, wie oben hinter ihren Gleichungen angegeben, verteilen wollen, besitzen 15 Schnittlinien. Jede Schnittlinie enthält den sigulären Punkt 1, also können wir die Coordinaten der 15 anderen singulären Punkte dadurch finden, dass wir die Gleichungen je zweier Ebenen mit der Flächengleichung combiniren. Die Nummer des gefundenen singulären Punktes finden wir aus der Cayleyschen Tabelle, z. B. liefert die Schnittlinie der Ebenen 6 und 7 den singulären Punkt 4.

Aus den Coordinaten endlich von drei in derselben singulären Ebene liegenden singulären Punkten lässt sich mit leichter Mühe die Gleichung der betreffenden singulären Ebene bilden, und es sollen daher im Folgenden nur die Coordinaten der singulären Punkte und die Gleichungen der singulären Ebenen in tabellarischer Form zusammengestellt werden.

Tabelle der singulären Ebenen.

Nr.	Gleichung.
1	$x+y+2z(c+d) = 0$
2	$2y+z(3a+b+4d)-1=0$
3	$2ix+z(a+3b+4ic)+1=0$
4	$z(a-b+2ai+2bi)-1=0$
5	$-x+iy+z(-a+b-2c+2di)+1=0$
6	$x-iy+2z(a+b+c-di) = 0$
7	$-x+iy+2z(a+b-c+di) = 0$
8	$x+iy+2z(-a-b+c+di) = 0$
9	$-x-iy+2z(-a-b-c-di) = 0$
10	$-x-iy+z(-a+b-2c-2di)+1=0$
11	$x+iy+z(-a+b+2c+2di)+1=0$
12	$x-iy+z(-a+b+2c-2di)+1=0$
13	$x-y+2z(c-d) = 0$
14	$2y+z(-3a-b+4d)+1=0$
15	$2ix+z(-a-3a+4ci)-1=0$
16	$z(a-b-2ai-2bi)-1=0$

Tabelle der singulären Punkte.

Nr.	Aus der Schnittlinie der Ebenen.	x	y	z
1	Anfangspunkt.	0	0	0
2	7,8	$\frac{2a+2b-2c}{3a+b}$	$\frac{-2d}{3a+b}$	$\frac{1}{3a+b}$
3	6,8	$\frac{2c}{a+3b}$	$\frac{2ai+2bi+2d}{a+3b}$	$-\frac{1}{a+3b}$
4	6,7	∞i	∞	
		unendlich ferner Kreispunkt I der xy ebene.		
5	9,13	$\frac{-a-b+ai+bi-2c}{a-b+2ai+2bi}$	$\frac{-a-b+ai+bi-2d}{a-b+2ai+2bi}$	$\frac{1}{a-b+2ai+2bi}$
6	1,6	$\frac{-a-b+ai+bi-2c}{a-b+2ai+2bi}$	$\frac{a+b-ai-bi-2d}{a-b+2ai+2bi}$	$\frac{1}{a-b+2ai+2bi}$
7	1,7	$\frac{a+b-ai-bi-2c}{a-b+2ai+2bi}$	$\frac{-a-b+ai+bi-2d}{a-b+2ai+2bi}$	$\frac{1}{a-b+2ai+2bi}$
8	1,8	$\frac{a+b+ai+bi-2c}{a-b-2ai-2bi}$	$\frac{-a-b-ai-bi-2d}{a-b-2ai-2bi}$	$\frac{1}{a-b-2ai-2bi}$
9	1,9	$\frac{-a-b-ai-bi-2c}{a-b-2ai-2bi}$	$\frac{a+b+ai+bi-2d}{a-b-2ai-2bi}$	$\frac{1}{a-b-2ai-2bi}$
10	6,13	$\frac{-a-b-ai-bi-2c}{a-b-2ai-2bi}$	$\frac{-a-b-ai-bi-2d}{a-b-2ai-2bi}$	$\frac{1}{a-b-2ai-2bi}$
11	7,13	$\frac{a+b+ai+bi-2c}{a-b-2ai-2bi}$	$\frac{a+b+ai+bi-2d}{a-b-2ai-2bi}$	$\frac{1}{a-b-2ai-2bi}$
12	8,13	$\frac{a+b-ai-bi-2c}{a-b+2ai+2bi}$	$\frac{a+b-ai-bi-2d}{a-b+2ai+2bi}$	$\frac{1}{a-b+2ai+2bi}$
13	1,13	$\frac{-2c}{a-b}$	$\frac{-2d}{a-b}$	$\frac{1}{a-b}$
14	6,9	$\frac{-2a-2b-2c}{3a+b}$	$\frac{-2d}{3a+b}$	$\frac{1}{3a+b}$
15	7,9	$\frac{2c}{a+3b}$	$\frac{-2ai-2bi+2d}{a+3b}$	$-\frac{1}{a+3b}$
16	8,9	$-\infty i$	∞	
		unendlich ferner Kreispunkt J der xy ebene.		
Nr.	Ebenen.	x	y	z

Aus diesen Tabellen, wenn wir dabei die Cayleysche Tabelle mit in Betracht ziehen, können wir folgende Sätze ableiten, bei denen die Einschränkung nicht erst stets erwähnt werden soll, dass sie nur für diejenige Flächenschaar gelten, in welche die vier mit nur endlichen Bestimmungsconstanten zusammengefallen sind.

5a. „Die Flächen vierter Ordnung mit sechszehn singulären Punkten, welche eine Lemniskate als gemeinschaftliche Schnittcurve haben, besitzen 4 reelle und 12 imaginäre singuläre Punkte."

5b. „Die Flächen vierter Ordnung mit sechszehn singulären Punkten, welche eine Lemniskate als gemeinschaftliche Schnittcurve haben, besitzen 4 reelle und 12 imaginäre singuläre Ebenen."

6a. „In 12 der singulären Ebenen liegen 2 reelle singuläre Punkte; in den übrigen 4 singulären Ebenen, die sämtlich imaginär sind, liegt überhaupt kein reeller singulärer Punkt."

6b. „Durch 12 der singulären Punkte gehen 2 reelle singuläre Ebenen; durch die übrigen 4 singulären Punkte, die sämtlich imaginär sind, geht überhaupt keine reelle singuläre Ebene."

Es sind also sowol die vier singulären Punkte 1, 2, 13, 14, als auch die vier singulären Ebenen 1, 2, 13, 14 reell, während die übrigen paarweise conjugirt imaginär sind.

Die singulären Punkte 4 und 16 sind die Kreispunkte im Unendlichen der xy ebene als solche also auch Doppelpunkte der Lemniskate, daher:

7. „Auch die beiden imaginären Doppelpunkte der Lemniskate, die Kreispunkte im Unendlichen der xy ebene, sind singuläre Punkte der Flächen."

Capitel III.

Die vierundzwanzig Kernpunkte.

Betrachten wir die Gleichungen der vier reellen singulären Ebenen 1, 2, 13, 14 genauer, so sehen wir, dass diese vier Ebenen sich in einem Punkte schneiden, dessen Coordinaten sind

$$x = -\frac{2c}{3a+b}, \quad y = -\frac{2d}{3a+b}, \quad z = \frac{1}{3a+b}$$

und den wir einen „Kernpunkt" der Flächen nennen wollen. Er hat noch die Eigentümlichkeit, die Strecke zwischen den beiden singulären

Punkten 2 und 14 zu halbiren. Auch die übrigen 12 singulären Ebenen liefern, zu je 4 zusammengefasst, drei solche Kernpunkte, in denen sich die betreffenden vier Ebenen schneiden, und zwar

7) 8) 11) 12) $x = \frac{-2a-2b+2c}{a+3b}$, $y = \frac{2d}{a+3b}$, $z = -\frac{1}{a+3b}$

5) 6) 9) 10) $x = \frac{2a+2b+2c}{a+3b}$, $y = \frac{2d}{a+3b}$, $z = -\frac{1}{a+3b}$

3) 4) 15) 16) sind sämtlich der y axe parallel, haben also im Unendlichen einen gemeinsamen Schnittpunkt.

Wir nehmen sämtliche Combinationen von vier Ebenen vor, von denen nicht drei durch denselben singulären Punkt gehen. Es sind im Ganzen 60 solcher Combinationen, die wir folgendermassen in 15 Gruppen teilen (der Grund für die durch Klammern angedeutete Zusammengehörigkeit je zweier Systeme wird später erhellen).

Gruppe *A*	Gruppe *B*	Gruppe *C*	Gruppe *D*
1 2 13 14	1 4 5 8	1 2 5 6	1 2 9 10
3 4 15 16	10 11 14 15	11 12 15 16	3 4 11 12
5 6 9 10	2 3 6 7	3 4 7 8	5 6 13 14
7 8 11 12	9 12 13 16	9 10 13 14	7 8 15 16

Gruppe *E*	Gruppe *F*	Gruppe *G*	Gruppe *H*
1 3 5 7	1 3 9 11	1 3 13 15	1 4 9 12
10 12 14 16	2 4 10 12	2 4 14 16	2 3 10 11
2 4 6 8	5 7 13 15	5 7 9 11	5 8 13 16
9 11 13 15	6 8 14 16	6 8 10 12	6 7 14 15

Gruppe *J*	Gruppe *K*	Gruppe *L*	Gruppe *M*
1 4 13 16	1 6 11 16	1 6 12 15	1 7 10 16
2 3 14 15	2 5 12 15	2 5 11 16	3 5 12 14
5 8 9 12	3 8 9 14	3 8 10 13	2 8 9 15
6 7 10 11	4 7 10 13	4 7 9 14	4 6 11 13

Gruppe *N*	Gruppe *O*	Gruppe *P*
1 7 12 14	1 8 10 15	1 8 11 14
3 5 10 16	4 5 11 14	4 5 10 15
2 8 11 13	2 7 9 16	2 7 12 13
4 6 9 15	3 6 12 13	3 6 9 16

Bei näherer Untersuchung finden wir, dass in Gruppen *A*, *B*, *G*, *H*, *K*, *M* die jedesmal in einem System vereinigten vier Ebenen

sich in einem Punkte schneiden, während das bei den Systemen der übrigen Gruppen nicht der Fall ist. Wir erhalten also 24 Kernpunkte und den Satz:

8a. „Ausser 16 mal zu je 6 in den 16 singulären Punkten der „Flächen schneiden sich die 16 singulären Ebenen noch 24 mal zu „je 4 in 24 anderen Punkten, den 24 Kernpunkten der Flächen."

Die Coordinaten der Kernpunkte, die wir mit α, β, γ, δ,' α_1 u. s. f. bezeichnen, sind folgende:

Gruppe A: (1, 2, 13, 14) α $x = \frac{-2c}{3a+b}$ $y = \frac{-2d}{3a+b}$ $z = \frac{1}{3a+b}$

(3, 4, 15, 16) β Im Unendlichen. Richtung der y axe.

(5, 6, 9, 10) γ $x = \frac{2a+2b+2c}{a3+b}$ $y = \frac{2d}{3a+b}$

$$z = -\frac{1}{a+3b}$$

(7, 8, 11, 12) δ $x = \frac{-2a-2b+2c}{a+3b}$ $y = \frac{2d}{a+3b}$

$$z = -\frac{1}{a+3b}$$

Gruppe B: (1, 4, 5, 8) α_1 $x = \frac{a+b+ai+bi-2c}{a-b+2ai+2bi}$

$$y = \frac{-a-b-ai-bi-2d}{a-b+2ai+2bi} \quad z = \frac{1}{a-b+2ai+2bi}$$

(10, 11, 14, 15) β_1 $x = \frac{-ai-bi-2c}{a-b}$ $y = \frac{a+b-2d}{a-b}$

$$z = \frac{1}{a-b}$$

(2, 3, 6, 7) γ_1 $x = \frac{i}{2}$ $y = \frac{1}{2}$ $z = 0$

(9, 12, 13, 16) δ_1 $x = \frac{-a-b+ai+bi-2c}{a-b-2ai-2bi}$

$$y = \frac{-a-b+ai+bi-2d}{a-b-2ai-2bi} \quad z = \frac{1}{a-b-2ai-2bi}$$

Gruppe G: (1, 3, 13, 15) α_2 $x = \frac{2c}{a+3b}$ $y = \frac{2d}{a+3b}$ $z = -\frac{1}{a+3b}$

(2, 4, 14, 16) β_2 Im Unendlichen. Richtung der x axe.

(5, 7, 9, 11) γ_2 $x = \dfrac{-2c}{3a+b}$ $y = \dfrac{2ai+2bi-2d}{3a+b}$

$$z = \frac{1}{3a+b}$$

(6, 8, 10, 12) δ_2 $x = \dfrac{-2c}{3a+b}$ $y = \dfrac{-2ai-2bi-2d}{3a+b}$

$$z = \frac{1}{3a+b}$$

Gruppe H: (1, 4, 9, 12) α_3 $x = \dfrac{-a-b-ai-2c}{a-b+2ai+2bi}$

$$y = \frac{a+b+ai+bi-2d}{a-b+2ai+2bi} \qquad z = \frac{1}{a-b+2ai+2bi}$$

(2, 3, 10, 11) β_3 $x = \dfrac{ai+bi-2c}{a-b}$ $y = \dfrac{-a-b-2d}{a-b}$

$$z = \frac{1}{a-b}$$

(6, 7, 14, 15) γ_3 $x = -\dfrac{i}{2}$ $y = -\frac{1}{2}$ $z = 0$

(5, 8, 13, 16) δ_3 $x = \dfrac{a+b-ai-bi-2c}{a-b-2ai-2bi}$

$$y = \frac{a+b-ai-bi-2d}{a-b-2ai-2bi} \qquad z = \frac{1}{a-b-2ai-2bi}$$

Gruppe K: (1, 6, 11, 16) α_4 $x = \dfrac{-a-b+at+bi-2c}{a-b-2ai-2bi}$

$$y = \frac{a+b-ai-bi-2d}{a-b-2ai-2bi} \qquad z = \frac{1}{a-b-2ai-2bi}$$

(2, 5, 12, 15) β_4 $x = \dfrac{-ai-bi-2c}{a-b}$ $y = \dfrac{-a-b-2d}{a-b}$

$$z = \frac{1}{a-b}$$

(3, 8, 9, 14) γ_4 $x = \dfrac{i}{2}$ $y = -\frac{1}{2}$ $z = 0$

(4, 7, 10, 13) δ_4 $x = \dfrac{a+b+ai+bi-2c}{a-b+2ai+2bi}$

$$y = \frac{a+b+ai+bi-2d}{a-b+2ai+2bi} \qquad z = \frac{1}{a-b+2ai+2bi}$$

Gruppe M: (1, 7, 10, 16) α_5 $x = \dfrac{a+b-ai-bi-2c}{a-b-2ai=2bi}$

$$y = \frac{-a-b+ai+bi-2d}{a-b-2ai-2bi} \qquad z = \frac{1}{a-b-2ai-2bi}$$

(3, 5, 12, 14) β_5 $x = \dfrac{ai+bi-2c}{a-b}$ $y = \dfrac{a+b-2d}{a-b}$

$$z = \frac{1}{a-b}$$

(2, 8, 9, 15) γ_5 $x = -\dfrac{i}{2}$ $y = \frac{1}{2}$ $z = 0$

(4, 6, 11, 13) δ_5 $x = \dfrac{-a-b-ai-bi-2c}{a-b+2ai+2bi}$

$$y = \frac{-a-b-ai-bi-2d}{a-b+2ai+2bi} \qquad z = \frac{1}{a-b+2ai+2bi}$$

Fassen wir die Reellitätsverhältnisse ins Auge, so ergiebt sich

9a. „Von den 24 Kernpunkten sind 6 reell."

Die vier Kernpunpkte γ_1, γ_3, γ_4, γ_5 und ebenso die beiden im Unendlichen liegenden Kernpunkte β und β_2 sind in ihrer Lage vollkommen unabhängig von den willkürlichen Constanten a, b, c, d, also Fixpunkte unserer Flächen; die beiden unendlich fernen Kernpunkte gehören, weil in der Richtung der x- und y-xe liegend, ebensowol der xy-ebene an als die 4 übrigen, also:

10. „Es giebt in der xy-ebene sechs feste Punkte, in welchen „sich für jede Fläche unserer vielfach unendlichen Schaar je vier „singuläre Ebenen schneiden"

Gehen wir auf die in Gleichung (7) des ersten Capitels angeführten Doppeltangenten unserer Lemniskate zurück und setzen in ihnen beim Uebergang von homogenen zu Cartesischen Coordinaten $w = 1$, so sehen wir, dass die 6 in der xy-ebene liegenden Fixpunkte nichts anderes sind als die Durchschnittspunkte der Doppeltangenten der Lemniskate, und zwar

γ_2 von 1) und 4); γ_3 von 2) und 4); β von 3) und 4)
γ_5 von 1) und 3); γ_4 von 2) und 3); β_2 von 1) und 2)

11. „Diese 6 Fixpunkte sind die 6 Durchschnittspunkte der 4 „Doppeltangenten an die zu Grunde gelegte Lemniskate."

Dass die singulären Ebenen der Flächen vierter Ordnung mit 16 singulären Punkten aus jeder beliebigen Ebene die Doppeltangenten

ihrer Schnittcurve mit der Fläche ausschneiden, darauf hat schon Kummer hingewiesen (Berl. Monatsber. 1864, 256); und wir finden hier eine Bestätigung seiner Bemerkung; denn setzen wir in den Gleichungen der singulären Ebenen $z = 0$, so zeigt sich:

12. „Es schneiden aus die singulären Ebenen 2, 3, 14, 15 aus „der xy-ebene der Reihe nach die Doppeltangenten 1, 4, 2, 3."

Die beiden reellen Doppeltangenten 1) und 2) werden also auch von den reellen singulären Ebenen 2 und 14 ausgeschnitten; die beiden anderen reellen singulären Ebenen 1 und 13 schneiden aus der xy-ebene die beiden reellen Wendetangenten der Lemniskate aus.

13. „Die vier reellen singulären Ebenen der Flächen schneiden „aus der xy-ebene die beiden reellen Doppeltangenten und die bei- „den reellen Wendetangenten der Lemniskate aus."

Die beiden im Unendlichen liegenden Kernpunkte kann man bei der Unbestimmtheit ihrer z-Coordinate auch statt der Ebene $z = 0$ den beiden Ebenen $z = \frac{1}{3a + b}$ und $z = -\frac{1}{a + 3b}$ zuteilen; dann ergiebt sich bei der Betrachtung der z-Coordinaten aller Kernpunkte der Satz:

14. „Die 24 Kernpunkte liegen zu je vieren in der xy-ebene „und 5 ihr parallelen Ebenen."

Zu erinnern ist hierbei, dass auch in jeder singulären Ebene 6 Kernpunkte liegen; z. B. in der singulären Ebene 1 die Kernpunkte $\alpha\, \alpha_1\, \alpha_2\, \alpha_3\, \alpha_4\, \alpha_5$.

In den Gruppen *A* bis *P* waren sämtliche Systeme von je 4 Ebenen, von denen nicht 3 durch denselben singulären Punkt gehen, aufgeführt. In den 4 zu einem solchen System gehörigen Ebenen liegen nun jedesmal 12 singuläre Punkte; es giebt also jedesmal 4 singuläre Punkte, welche auf keiner der vier Ebenen des Systems liegen. Die diesen 4 Punkten in der Zahlenbezeichnung entsprechenden singulären Ebenen gehen nur dann durch einen Punkt, wenn die ursprüglichen vier Ebenen durch einen Punkt gehen, und schneiden sich in 4 Punkten, wenn die ursprünglichen 4 Ebenen sich in 4 Punkten schneiden. Beispielsweise schneiden sich die 4 Ebenen 2, 3, 6, 7 im Punkte γ_1. Es liegen auf ihnen die singulären Punkte:

auf 2:	2	10	14	7	8	5
- 3:	3	11	15	6	5	8
- 6:	6	14	10	3	4	1
- 7:	7	15	11	2	1	4

In keiner dieser 4 Ebenen liegt einer der vier Punkte 9, 12, 13, 16; es gehen also die 4 Ebenen 9, 12, 13, 16 durch einen Punkt (δ_1). Rückwärts kommt man von dem System 9, 12, 13, 16 wieder auf das System 2, 3, 6, 7. Je zwei solche sich entsprechenden Systeme gehören zu derselben Gruppe und sind in der Tabelle der Gruppen bereits durch eine Klammer zusammengefasst (siehe ferner Cap. VII, S. 141).

Capitel IV.

Das Kerntetraeder.

Durch je drei Kernpunkte einer Gruppe, zunächst der Gruppen *B*, *H*, *K*, *M* legen wir eine Ebene. In jeder solchen Ebene liegen dann noch zwei fernere Kernpunkte. Wir erhalten so die Ebenen:

$[\alpha_1\beta_1\delta_1\beta_3\gamma_3]$: $\quad -ix+y+z(-a+b-2ci+2d)+1=0$

$[\alpha_3\beta_3\delta_3\beta_1\gamma_1]$: $\quad ix-y+z(-a+b+2ci-2d)+1=0$

$[\alpha_4\beta_4\delta_4\beta_5\gamma_5]$: $\quad -ix-y+z(-a+b-2ci-2d)+1=0$

$[\alpha_5\beta_5\delta_5\beta_4\gamma_4]$: $\quad ix+y+z(-a+b+2ci+2d)+1=0$

$[\alpha_1\beta_1\gamma_1\alpha_5\delta_5]$: $\quad 2x+2y+z(-a-3b+3ai+bi+4c+4d)-1-i=0$

$[\alpha_3\beta_3\gamma_3\alpha_1\delta_1]$: $\quad -2x-2y+z(-a-3b+3ai+bi-4c-4d)-1-i=0$

$[\alpha_4\beta_4\gamma_4\alpha_5\delta_5]$: $\quad -2x-2y+z(-a-3b-3ai-bi-4c-4d)-1+i=0$

$[\alpha_5\beta_5\gamma_5\alpha_4\delta_4]$: $\quad 2x+2y+z(-a-3b-3ai-bi+4c+4d)-1+i=0$

$[\alpha_1\gamma_1\delta_1\beta_3\gamma_3]$: $\quad ix+y+2z(a+b+ci+d)=0$

$[\alpha_3\gamma_3\delta_3\beta_1\gamma_1]$: $\quad ix+y+2z(-a-b+ci+d)=0$

$[\alpha_4\gamma_4\delta_4\beta_5\gamma_5]$: $\quad ix-y+2z(a+b+ci-d)=0$

$[\alpha_5\gamma_5\delta_5\beta_4\gamma_4]$: $\quad ix-y+2z(-a-b+ci-d)=0$

$[\beta_1\gamma_1\delta_1\alpha_3\delta_3]$ $\quad -2x+2y+z(-a-3b-3ai-bi-4c+4d)-1+i=0$

$[\beta_3\gamma_3\delta_3\alpha_1\delta_1]$: $\quad 2x-2y+z(-a-3b-3ai-bi+4c-4d)-1+i=0$

$[\beta_4\gamma_4\delta_4\alpha_5\delta_5]$: $\quad 2x-2y+z(-a-3b+3ai+bi+4c-4d)-1-i=0$

$[\beta_5\gamma_5\delta_5\alpha_4\delta_4]$: $\quad -2x+2y+z(-a-3b+3ai+bi-4c+4d)-1-i=0$

Es liegen also in einer Ebene die Kernpunkte

$\alpha_1\delta_1\beta_3\gamma_3$ sowol mit α_3 als mit δ_3 als mit β_1 als mit γ_1;

$\alpha_3\delta_3\beta_1\gamma_1$ „ „ α_1 „ δ_1 „ β_3 „ γ_3;

$\alpha_4\delta_4\beta_5\gamma_5$ „ „ α_5 „ δ_5 „ β_4 „ γ_4;

$\alpha_5\delta_5\beta_4\gamma_4$ „ „ α_4 „ δ_4 „ β_5 „ γ_5.

Da nun z. B. die 4 Punkte $\alpha_1\alpha_3\delta_1\delta_3$ nicht in einer Ebene liegen, so müssen jedesmal die 4 Punkte

$$\begin{cases} \alpha_1\,\delta_1\,\beta_3\,\gamma_3 : \text{C} \\ \alpha_3\,\delta_3\,\beta_1\,\gamma_1 : \text{D} \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha_4\,\delta_4\,\beta_5\,\gamma_5 : \text{E} \\ \alpha_5\,\delta_5\,\beta_4\,\gamma_4 : \text{F} \end{cases}$$

in einer geraden Linie liegen, und es ist zunächst schon ersichtlich, dass die durch eine Klammer verbundenen Paare von Geraden sich nicht schneiden. Die Geraden mögen, wie oben angegeben, C, D, E, F heissen. Jede derselben ist als Schnittlinie von 4 der obigen Ebenen gegeben.

Es schneiden sich nun C und D nicht, und E und F nicht; dagegen schneiden sowol C als D beide Geraden E und F. Wir erhalten also 4 Punkte, in deren jedem sich 8 der obigen Ebenen schneiden, und deren Coordinaten sind:

Punkt C, E = (I): $x = \dfrac{-2ai-2bi+2c}{a+3b}$, $y = \dfrac{2d}{a+3b}$, $z = -\dfrac{1}{a+3b}$

Punkt C, F = (II): $x = \dfrac{-2c}{3a+b}$, $y = \dfrac{-2a-2b-2d}{3a+b}$, $z = \dfrac{1}{3a+b}$

Punkt D, E = (III): $x = \dfrac{-2c}{3a+b}$, $y = \dfrac{2a+2b-2d}{3a+b}$, $z = \dfrac{1}{3a+b}$

Punkt D, F = (IV): $x = \dfrac{2ai+2bi+2c}{a+3b}$, $y = \dfrac{2d}{a+3b}$, $z = -\dfrac{1}{a+3b}$

Von je 4 in einer Geraden liegenden Kernpunkten gehören jedesmal 2 zu einer der Gruppen B, H, K, M und die beiden anderen zu der dieser entsprechenden Gruppe, wobei B und H, K und M einander entsprechen. Jetzt stellen wir auch die Gruppen A und G anders zusammen:

1	2	13	14		1	3	13	15
3	4	15	16		2	4	14	16
				und				
5	7	9	11		5	6	9	10
6	8	10	12		7	8	11	12

und wir sehen bei einem Blick auf die in der Tabelle der Kernpunkte zusammengestellten Ordinaten, dass die Punkte (1, 2, 13, 14), (5, 7, 9, 11), (6, 8, 10, 12) auf einer Geraden A mit den Gleichungen

$$x + \frac{2c}{3a+b} = 0, \quad z - \frac{1}{4a+b} = 0$$

und die Punkte (1, 3, 13, 15), (5, 6, 9, 10), (7, 8, 11, 12) auf einer Geraden B mit den Gleichungen

$$y - \frac{2d}{a+3b} = 0, \quad z + \frac{1}{a+3b} = 0$$

liegen. Die erste dieser Geraden ist der y-axe parallel, und da dies auch die vier in dem unendlich fernen Kernpunkte (3, 4, 15, 16) sich schneidenden Ebenen sind, liegt auch dieser Punkt auf der Geraden. Ebenso liegt der Punkt (2, 4, 14, 16) auf der zur x-axe parallelen Geraden B. Also:

15a. „Die 24 Kernpunkte liegen zu je 4 in 6 geraden Linien."

Es schneiden sich nun die Geraden A und B untereinander nicht, wol aber schneidet jede von beiden alle 4 Geraden C, D, E, F, und zwar in den Punkten (I), (II), (III), (IV) der vorigen Seite:

16a. „Diese 6 Geraden bilden ein Tetraeder."

In diesem Tetraeder sind A und B, C und D, E und F Gegenkanten, (I), (II), (III), (IV) die Eckpunkte. Die Gleichungen der Seitenflächen sind:

[I] durch (II), (III), (IV): $2ix+z(-3a-b+4ci)+1=0$
[II] durch (III), (IV), (I): $2y+z(-a-3b+4d)-1=0$
[III] durch (IV), (I), (II): $2y+z(a+3b+4d)+1=0$
[IV] durch (I), (II), (III): $2ix+z(3a+b+4ci)-1=0.$

Das Tetraeder heisse das Kerntetraeder unserer Flächen. Es folgen die Sätze:

17. „Zwei der Seitenflächen dieses Kerntetraeders sind der x-„axe, die beiden andern der y-axe parallel."

18. „Im Kerntetraeder sind reell:

1) „Zwei Gegenkanten (A) und (B)"

2) „die in der einen von ihnen (A) liegenden Eckpunkte „(II) und (III)"

3) „die durch die andere von ihnen (B) gehenden Seitenflächen [III] und [II].

19) „Von den beiden reellen Gegenkanten des Kerntetraeders „ist die eine der x-axe, die andere der y-axe parallel."

Aus den Coordinaten der Kernpunkte lässt sich ferner noch nachweisen:

20a. „Die 4 auf einer Kante des Kerntetraeders liegenden „Kernpunkte besitzen ein constantes Doppelverhältniss, das für die

„der x- und y-axe parallelen Kanten den Wert -1, für die übrigen „den Wert $+2$ besitzt."

Es werde noch die Bemerkung angefügt:

21a. „In jeder Seitenfläche des Kerntetraeders liegen 12 Kernpunkte."

und darauf hingewiesen, dass jede der 6 parallelen Ebenen, in welchen nach Satz 14. die Kernpunkte liegen, jede der Tetraederkanten in einem Kernpunkte schneidet; also:

22. „Die Schnittpunkte der 6 Tetraederkanten mit der xy-„ebene sind die 6 Fixpunkte unserer Flächen."

Capitel V.

Die vierundzwanzig Kernebenen.

Bei dem reciprok polaren Verhalten der singulären Ebenen und singulären Punkte der Flächen vierter Ordnung mit 16 singulären Punkten liegt die Vermutung nahe, es werden, ebenso wie sich von unseren singulären Ebenen 24 mal je 4 in einem Punkte schnitten, auch die entsprechenden singulären Punkte 24 mal zu je 4 in einer Ebene liegen. Und in der Tat zeigt sich, dass, wenn diesmal die Zahlen in den Gruppen A bis P die singulären Punkte bedeuten, jedesmal vier zu einem System vereinigte Punkte in den Gruppen A, B, G, H, K, M in einer Ebene liegen, während das für die übrigen nicht der Fall ist:

8b. „Ausser 16 mal zu je 6 in den 16 singulären Ebenen liegen „die 16 singulären Punkte noch 24 mal zu je 4 in 24 anderen Ebe-„nen, den 24 Kernebenen unserer Flächen."

Die Gleichungen der Kernebenen sind:

$$\text{A} \begin{cases} [1,\ 3,\ 13,\ 15]: & x+2cz=0 \\ [2,\ 4,\ 14,\ 16]: & z(3a+b)-1=0 \\ [5,\ 6,\ 9,\ 10]: & 2x+z(3a+b+4c)-1=0 \\ [7,\ 8,\ 11,\ 12]: & 2x+z(-3a-b+4c)+1=0 \end{cases}$$

$$\text{B} \begin{cases} [1,\ 2,\ 13,\ 14]: & y+2dz=0 \\ [3,\ 4,\ 15,\ 16]: & z(a+3b)+1=0 \\ [5,\ 7,\ 9,\ 11]: & 2iy+z(a+3b+4di)+1=0 \\ [6,\ 8,\ 10,\ 12]: & 2iy+z(-a-3b+4di)-1=0 \end{cases}$$

$$
\text{C}\quad\begin{cases}
[1,\ 4,\ 5,\ 8]: & ix+y+2z(a+b+ci+d)=0\\
[9,\ 12,\ 13,\ 16]: & ix-y+z(a-b+2ci-2d)-1=0\\
[2,\ 3,\ 10,\ 11]: & 2x-2y+z(-a-3b-3ai-bi+4c-4d)\\
 & \qquad -1+i=0\\
[6,\ 7,\ 14,\ 15]: & 2x+2y+z(a+3b-3ai-bi+4c+4d)\\
 & \qquad +1+i=0
\end{cases}
$$

$$
\text{D}\quad\begin{cases}
[1,\ 4,\ 9,\ 12]: & ix+y+2z(-a-b+ci+d]=0\\
[5,\ 8,\ 13,\ 16]: & ix-y+z(-a+b+2ci-2d)+1=0\\
[2,\ 3,\ 6,\ 7]: & 2x+2y+z(-a-3b+3ai+bi+4c+4d)\\
 & \qquad -1-i=0\\
[10,\ 11,\ 14,\ 15]: & 2x-2y+z(a+3b+3ai+bi+4c-4d)\\
 & \qquad +1-i=0
\end{cases}
$$

$$
\text{E}\quad\begin{cases}
[1,\ 6,\ 11,\ 16]: & ix-y+2z(a+b+ci-d)=0\\
[4,\ 7,\ 10,\ 13]: & ix+y+z(a-b+2ci+2d)-1=0\\
[2,\ 8,\ 9,\ 15]: & 2x+2y+z(-a\ \ 3b-3ai-bi+4c+4d)\\
 & \qquad -1+i=0\\
[3,\ 5,\ 12,\ 14]: & 2x-2y+z(a+3b-3ai\ \ bi+4c-4d)\\
 & \qquad +1+i=0
\end{cases}
$$

$$
\text{F}\quad\begin{cases}
[1,\ 7,\ 10,\ 16]: & ix-y+2z(-a-b+ci-d)=0\\
[4,\ 6,\ 11,\ 13]: & ix+y+z(-a+b+2ci+2d)+1=0\\
[2,\ 5,\ 12,\ 15]: & 2x-2y+z(-a-3b+3ai+bi+4c-4d)\\
 & \qquad -1-i=0\\
[3,\ 8,\ 9,\ 14]: & 2x+2y+z(a+3b+3ai+bi+4c+4d)\\
 & \qquad +1-i=0
\end{cases}
$$

9b. „Von den 24 Kernebenen sind 6 reell."

Vergleichen wir die Gleichungen der Kernebenen mit denen der im Beginn des vorigen Capitels aufgestellten Ebenen, so sehen wir, dass sie mit diesen identisch sind. Es folgen daraus weiter die Sätze:

15b. „Die 24 Kernebenen schneiden sich zu 4 in 6 geraden „Linien."

16b. „Diese 6 geraden Linien bilden ein Tetraeder."

23. „Das Tetraeder aus den singulären Ebenen ist mit dem „Tetraeder aus den singulären Punkten identisch (Kerntetraeder)."

21b. „In jedem Eckpunkte des Kerntetraeders schneiden sich „12 Kernebenen."

24a. „In jeder Kernebene liegen 5 Kernpunkte."

24b. „Durch jeden Kernpunkt gehen 5 Kernebenen."

25. „Durch den Coordinatenanfang gehen 6 Kernebenen, deren „jede eine Kante des Kerntetraeders enthält."

26. „Die 4 in einer Kante des Kantentetraeders sich schneiden- „den Kernebenen schneiden die Gegenkante in deren 4 Kernpunkten."

20b. „Die 4 in einer Kante des Kerntraeders sich schneiden- „den Kernebenen besitzen ein constantes Doppelverhältniss, das für „die der x- und y-axe parallelen Kanten den Wert -1, für die „übrigen den Wert $+2$ besitzt."

Capitel VI.

Die sechs in einer singulären Ebene liegenden singulären Punkte.

Setzen wir in unserer Flächengleichung (22) $w = 1$, und eliminiren aus ihr und der Gleichung einer unserer singulären Ebenen eine Unbekannte, so erhalten wir die Gleichung der Projection auf eine der Coordinatenebenen der Schnittcurve der singulären Ebene mit der Fläche. Da die singulären Ebenen die Flächen vierter Ordnung mit 16 singulären Punkten längs eines Kegelschnitts berühren, müssen wir die Gleichung eines doppelt zählenden Kegelschnitts erhalten. Beispielsweise hat die Projection der Schnittcurve der singulären Ebene 1 mit der Fläche auf die yz-ebene die Gleichung:

$$(2y^2+8dyz-2z^2(a^2-b^2+4d^2)+2z(a+b))^2=0$$

und es genügen dieser Gleichung auch die Coordinaten der singulären Punkte 1, 6, 7, 8, 9, 13.

Wir fassen die in der singulären Ebene 1 liegenden 6 singulären Punkte 1, 6, 7, 8, 9, 13 näher ins Auge. Ihre 15 Verbindungslinien können wir auf folgende 15 Arten zu je dreien zusammenstellen:

1, 6; 7, 8; 9, 13	1, 7; 6, 13; 8, 9 : α_5
1, 6; 7, 9; 8, 13	1, 8; 6, 7; 9, 13 : α_1
1, 6; 7, 13; 8, 9 : α_4	1, 8; 6, 9; 7, 13
1, 7; 6, 8; 9, 13	1, 8; 6, 13; 7, 9
1, 7; 6, 9; 8, 13	1, 9; 6, 7; 8, 13 : α_3

1, 9; 6, 8; 7, 13
1, 9; 6, 13; 7, 8
1, 13; 6, 7; 8, 9
1, 13; 6, 8; 7, 9 : α_2

1, 13; 6, 9; 7, 8 : α

Jede Verbindungslinie zweier singulären Punkte ist die Schnittlinie zweier singulären Ebenen; aus der im Capitel II. mitgeteilten Cayleyschen Tabelle ist zu entnehmen, welche beiden singulären Ebenen das jedesmal sind. Für jede Zusammenstellung von drei Verbindungslinien findet man 4 singuläre Ebenen, und zwar sind diese in den unterstrichenen Fällen solche 4 singulären Ebenen, die sich in einem Punkte, also einem Kernpunkte schneiden. Die Kernpunkte sind der Reihe nach α_4, α_5, α_1, α_3, α_2, α. Wir können also auf 6 verschiedene Weisen die 6 singulären Punkte in der singulären Ebene 1 so zusammenstellen, dass die 3 Verbindungslinien von je zwei Punkten einen gemeinschaftlichen Schnittpunkt haben. Ist dies aber der Fall, so ist das Sechseck, in welchem je zwei verbundene Punkte gegenüberliegende Eckpunkte sind, einem Kegelschnitt umschrieben, also ein Brianchonsches Sechseck, und der gemeinschaftliche Schnittpunkt seiner Diagonalen heisst dann ein Brianchonscher Punkt. Für jeden Brianchonschen Punkt lassen sich aber aus den 6 Eckpunkten 4 verschiedene Sechsecke bilden, die Kegelschnitten umschrieben sind; unsere 6 singulären Punkte in der singulären Ebene 1 lassen sich also auf 24 verschiedene Weisen zu einem Brianchonschen Sechseck zusammensetzen. Dasselbe Verhalten zeigen auch die jedesmal 6 singulären Punkte in den übrigen singulären Ebenen; wir erhalten also die Sätze:

27a. „Die 6 in einer singulären Ebene liegenden singulären „Punkte liegen nicht nur in einem Kegelschnitte, sondern bilden „auch ein Brianchonsches Sechseck, und zwar schneiden sich unter „ihren 15 Verbindungslinien 6 mal je 3 in einem Punkte. — Wir „erhalten also in jeder singulären Ebene 24 Kegelschnitte, um welche „sich aus den 6 singulären Punkten in derselben Ebene ein Brian„chonsches Sechseck bilden lässt, und 6 Brianchonsche Punkte."

28a. „Die 6 Brianchonschen Punkte in jeder singulären Ebene „sind mit den 6 in derselben Ebene liegenden Kernpunkten iden„tisch."

Betrachten wir nun die Lage der 6 Kernpunkte α, α_1, α_2, α_3, α_4, α_5 in der singulären Ebene 1. Es stellt sich heraus, dass stets in einer Geraden liegen die Punkte

$$\begin{array}{lll} \alpha & \alpha_1 & \alpha_4 \\ \alpha & \alpha_3 & \alpha_5 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_5 \\ \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \end{array}$$

oder, dass die 6 Punkte in den Ecken eines vollständigen Vierseits liegen, wobei α und α_2, α_1 und α_3, α_4 und α_5 Gegenecken sind. Auch dies Resultat können wir auf die übrigen singulären Ebenen ausdehnen:

29a. „Die 6 Brianchonschen Punkte (Kernpunkte) in jeder sin„gulären Ebene sind die Eckpunkte eines vollständigen Vierseits."

Wir hatten oben die Gruppen A und G, B und H, K und M als entsprechende bezeichnet. Es liegt nun in jeder singulären Ebene je ein Kernpunkt aus jeder Gruppe, und die beiden Kernpunkte aus entsprechenden Gruppen sind Gegenecken des Vierseits.

Die beiden Kernpunkte aus entsprechenden Gruppen haben aber noch besondere Eigenschaften; wie aus der Tabelle für die singuläre Ebene 1 auf voriger Seite sich ergiebt, liegen sie mit 2 singulären Punkten auf derselben geraden Linie. Auch dies lässt sich verallgemeinern:

30. „In jeder singulären Ebene liegt ein Kernpunkt aus jeder „Gruppe."

31. „Die beiden Kernpunkte aus entsprechenden Gruppen sind „Gegenecken des vollständigen Vierseits."

32. „Die 6 singulären Punkte jeder singulären Ebene liegen zu „je zweien auf den 3 Diagonalen des durch die 6 Kernpunkte in „derselben Ebene bestimmten vollständigen Vierseits."

Wie die 4 in einer Kante des Kerntetraeders liegenden 4 Kernpunkte haben nun auch die 4 in einer Diagonale liegenden ausgezeichneten Punkte ein constantes Doppelverhältniss, und zwar können wir den Satz aufstellen:

33. „Die in jeder Diagonale eines der vollständigen Vierseite „liegenden beiden singulären Punkte und beiden Kernpunkte be„sitzen ein constantes Doppelverhältniss, das für die zur x- und y„axe parallelen Diagonalen den Wert -1, für die übrigen den Wert „$+2$ hat."

Die Punkte, die so ein constantes Doppelverhältniss besitzen, sind in der singulären Ebene

1:	1	13	α	α_2	6	7	α_1	α_3	8	9	α_4	α_5
2:	2	14	α	β_2	5	8	γ_1	β_3	7	10	β_4	γ_5
3:	3	15	β	α_2	5	8	γ_1	β_3	6	11	γ_4	β_5
4:	4	16	β	β_2	6	7	α_1	α_3	5	12	δ_4	δ_5
5:	5	9	γ	γ_2	2	3	α_1	δ_3	4	13	β_4	β_5
6:	6	10	γ	δ_2	1	4	γ_1	γ_3	3	14	α_4	δ_5
7:	7	11	δ	γ_2	1	4	γ_1	γ_3	2	15	δ_4	α_5
8:	8	12	δ	δ_2	2	3	α_1	δ_3	1	16	γ_4	γ_5
9:	9	5	γ	γ_2	14	15	δ_1	α_3	1	16	γ_4	γ_5
10:	10	6	γ	δ_2	13	16	β_1	β_3	2	15	δ_4	α_5
11:	11	7	δ	γ_2	13	16	β_1	β_3	3	14	α_4	δ_5
12;	12	8	δ	δ_2	14	15	δ_1	α_3	4	13	β_4	β_5
13:	13	1	α	α_2	10	11	δ_1	δ_3	5	12	δ_4	δ_5
14:	14	2	α	β_2	9	12	β_1	γ_3	6	11	γ_4	β_5
15:	15	3	β	α_2	9	12	β_1	γ_3	7	10	β_4	γ_5
16:	16	4	β	β_2	10	11	δ_1	δ_3	8	9	α_4	α_5

Nur die Gerade 2 14 α β_2 ist der x-axe, und 3 15 β α_2 der y-axe parallel.

Wir können zu den in diesem Capitel aufgeführten Sätzen die reciprok polaren Sätze aufstellen, ausgehend von den 6 durch einen singulären Punkt gehenden singulären Ebenen. Es mögen nur folgende Sätze angeführt werden:

27b. „Die 6 durch einen singulären Punkt gehenden singulären „Ebenen umhüllen nicht nur einen Kegel zweiten Grades, sondern „sie lassen sich auch auf 6 verschiedene Arten so in drei Paare „ordnen, dass die beiden Ebenen jedes Paares Gegenseiten in einer „einem Kegel zweiten Grades von der Spitze aus eingeschriebenen „sechsseitigen Pyramide sind. Da sich nun für jede solche Anord-„nung 4 verschiedene einem Kegel zweiten Grades eingeschriebene „Pyramiden finden lassen, und da sich für jeden Kegel nach dem „Pascalschen Satze die drei Paar Gegenebenen in drei Geraden „schneiden, welche in einer Ebene liegen (Pascalsche Ebene), so er-„halten wir aus jedem singulären Punkte 24 Kegel zweiten Grades, „in welche sich aus den singulären Ebenen sechsseitige Pyramiden „einschreiben lassen, und 6 Pascalsche Ebenen."

28b. „Die 6 Pascalschen Ebenen durch jeden singulären Punkt „sind mit den 6 Kernebenen durch denselben Punkt identisch."

29b. „Eine beliebige Ebene schneidet diese 6 Pascalschen Ebe„nen (Kernebenen) durch jeden singulären Punkt in einem vollstän„digen Viereck."

Capitel VII.

Die Flächen sind Tetraedroide. — Schluss.

Das Tetraedroid, ein von Cayley entdeckter Specialfall der allgemeinen Kummerschen Fläche, hat folgende besonderen Eigenschaften:

1) nach Cayley (Liouville's Journ. Bd. 11, S. 291; 1846): Die vier Seitenflächen eines gewissen Tetraeders schneiden das Tetraedroid in Curven vierter Ordnung, die in zwei Kegelschnitte zerfallen; die Schnittpunkte je zweier solchen Kegelschnitte in jeder der 4 Tetraederebenen sind singuläre Punkte der Fläche. Die Kegel, die der Fläche von den Eckpunkten des Tetraeders aus umschrieben werden, sind Kegel vierten Grades, die in zwei Kegel zweiten Grades zerfallen, und die jedesmal 4 Ebenen, welche diese beiden Kegel berühren, also zusammen 16, sind singuläre Tangentialebenen der Fläche.

2) Aus dem letzten Satze geht hervor, dass die singulären Ebenen sich zu je vieren in den Eckpunkten des Tetraeders schneiden müssen. und ferner folgt aus 1), dass die 16 singulären Ebenen zu je vieren in die Seitenflächen des Tetraeders rücken müssen. (vgl. Rohn, Math. Ann. 18, 131).

3) nach Klein (Math. Ann. 2, 217): Die 6 singulären Punkte in jeder singulären Ebene bilden ein Brianchonsches Sechseck.

Von diesen Forderungen ist bereits bewiesen, dass die 6 singulären Punkte ein Brianchonsches Sechseck bilden, und zwar lassen sie sich bei unseren Flächen auf 6 verschiedene Weisen zu einem solchen verbinden (Cap. VI).

Ferner ist gezeigt worden, dass sich die 16 singulären Ebenen auf 6 verschiedene Weisen zu je vieren in den Eckpunkten eines Tetraeders schneiden (Cap. III.), in dessen Seitenflächen zu je vieren die 16 singulären Punkte liegen (Cap. V.); die Eckpunkte dieser 6 Tetraeder sind in unserer Tabelle der Kernpunkte zusammengestellt; die 4 Eckpunkte jedes Tetraeders gehören zu einer Gruppe. Die Seitenflächen dieser 6 Tetraeder sind unsere Kernebenen, die jedoch im Cap. V. anders zusammengestellt sind; die Seitenflächen eines Tetraeders sind so zu finden, dass z. B. für das durch die 4 Kern-

punkte der Gruppe *A* bestimmte Tetraeder dem Eckpunkte (1, 2, 13, 14) die Seitenfläche [3, 4, 15, 16] gegenüberliegt, dem Eckpunkte (3, 4, 15, 16) die Seitenfläche [1, 2, 13, 14], dem Eckpunkte (5, 6, 9, 10) die Seitenfläche [7, 8, 11, 12] und dem Eckpunkte (7, 8, 11, 12) die Seitenfläche [5, 6, 9, 10]; kurz so, dass beim Uebergange von Eckpunkten zu den gegenüberliegenden Seitenflächen und umgekehrt für das eine System das mit ihm in den Gruppen des Cap. III durch eine Klammer verbundene gesetzt wird.

Es bleibt noch nachzuweisen, dass die Kernebenen die Flächen Curven vierten Grades schneiden, welche in zwei Kegelschnitte zerfallen, und dass die 4 Schnittpunkte dieser beiden Kegelschnitte singuläre Punkte der Flächen sind. Dass dann auch die der Fläche aus den Kernpunkten umschriebenen Kegel in zwei Kegel zweiten Grades zerfallen, und dass die Ebenen, welche zwei solche Kegel zweiten Grades berühren, singuläre Ebenen der Flächen sind, geht dann aus dem reciprok polaren Verhalten der singulären Punkte und singulären Ebenen, sowie der Kernpunkte und Kernebenen hervor.

Das Zerfallen der Schnittcurven der Flächen mit den Kernebenen lässt sich auf folgende Weise zeigen: Jeder singuläre Punkt muss in der Schnittcurve einer durch ihn gehenden Ebene mit der Fläche ein Doppelpunkt sein. Unsere Kernebenen gehen nun jede durch vier singuläre Punkte unserer Flächen. Es muss also die Schnittcurve auf einer Kernebene 4 Doppelpunkte haben. Da unsere Flächen als Flächen vierter Ordnung von einer Ebene nur in Curven vierter Ordnung geschnitten werden, Curven vierter Ordnung aber, wenn sie nicht zerfallen sollen, und drei Doppelpunkte haben dürfen, so zerfallen die Schnittcurven auf den Kernebenen, und, da sie vier Doppelpunkte haben sollen, notwendig in 2 Kegelschnitte, deren Schnittpunkte die 4 in der Kernebene liegenden singulären Punkte sind. Unsere Flächen besitzen daher alle angeführten Eigenschaften der Tetraedroide; also:

34. „Die Flächen vierter Ordnung mit 16 singulären Punkten, „welche durch eine Lemniskate gehen, sind Tetraedroide."

35. „Es giebt jedoch nicht nur ein, sondern 6 Tetraeder, auf „welche sich alle von Cayley angeführten Eigenschaften des Tetra„edroids beziehen lassen."

36. „Nur eins dieser Tetraeder ist völlig reell."

37 „Ein jedes dieser 6 Tetraeder hat 4 Kernpunkte zu Eck„punkten und 4 Kernebenen zu Seitenflächen."

Es lässt sich zeigen, dass zwar die Seitenflächen der 6 Tetraeder die Flächen in zerfallenden Curven schneiden, dass aber die Seitenflächen unseres Kerntetraders diese Eigenschaft nicht besitzen.

Es sei noch die Bemerkung angefügt, dass bei jedem der 6 Tetraeder $\alpha_i \beta_i \gamma_i \delta_i$ ein Paar Gegenkanten ($\alpha_i \delta_i$ und $\beta_i \gamma_i$) mit einem Paar Kanten des Kerntetraeders in dieselben Geraden fällt.

38. „In jedem dieser 6 Tetraeder fallen zwei gegenüberliegende „Kanten mit je 2 Gegenkanten des Kerntetraeders in dieselben ge„raden Linien."

39. „In jeder Kante des Kerntetraeders oder in ihrer Verlän„gerung liegt je eine Kante von zwei verschiedenen der 6 Tetra„eder."

Es würde wenig Mühe machen, noch weitere Eigenschaften der betrachteten Flächen aufzufinden; es möge hier der gelieferte Nachweis genügen, dass unsere Flächen einen Specialfall des Cayleyschen Tetraedroids darstellen. Ist schon die Configuration von 16 Punkten und 16 Ebenen bei der allgemeinen Kummerschen Fläche eine merkwürdige (vgl. Reye, Acta mathem. Bd. I), und geht das Tetraedroid schon in der Mannigfaltigkeit seiner Eigenschaften weit darüber hinaus, so sind doch die Beziehungen zwischen den singulären Punkten und Ebenen der hier betrachteten Flächen noch bei weitem merkwürdiger, um so mehr, als man nicht aus den Augen verlieren möge, dass alle diese Beziehungen für alle Flächen einer vierfach unendlichen Schaar gelten, Flächen, die nur durch eine allen gemeinsame Schnittcurve, die zu Grunde gelegte Lemniskate, einen Zusammenhang mit einander haben.

November 1887.

IX.

Die sphärische Curve vierter Ordnung als Einhüllende von Kreisschaaren.

Von

Emanuel Czuber.

Im 29. Bande der Zeitschr. für Mathem. u. Phys. [1]) hat Prof. J. Thomae eine Reihe von Problemen der Cyklographie nach einem Verfahren behandelt, welches sich durch grosse Anschaulichkeit auszeichnet [2]). Das ebene Kreissystem wird mit Hilfe der stereographischen Projection auf eine Kugel abgebildet und das sphärische Kreissystem auf den Raum, indem jedem Kreise desselben der Pol seiner Ebene bezüglich der Kugel als Abbild zugeordnet wird. Eine Configuration von Punkten im Raume führt dann zunächst zu einer Configuration von Kreisen auf der Kugel und aus dieser ergibt sich durch stereographische Projection eine Configuration von Kreisen in der Ebene.

In den folgenden Blättern soll nur die Beziehung zwischen der räumlichen Abbildung und dem sphärischen Kreissystem im Auge behalten und dazu benutzt werden, um mit ihrer Hilfe die Eigenschaften der sphärischen Curve vierter Ordnung nachzuweisen; die gewonnenen Resultate können dann durch collineare Transformation leicht auf die allgemeine Curve vierter Ordnung erster Species übertragen werden.

1) Das ebene Kreissystem und seine Abbildung auf den Raum.

2) Vgl. Dr. W. Fiedler's Cyklographie, pag. 242 flg.

Bevor auf den eigentlichen Gegenstand eingegangen wird, sollen die allgemeinen Ergebnisse des angewandten Abbildungsverfahrens in einer dem vorliegenden Zwecke entsprechenden Form zusammengestellt werden.

§. 1.

1. Es sei K die Kugel, P ein Punkt des Raumes, K der ihm zugeordnete Kreis. Liegt P ausserhalb, innerhalb, auf K, so ist K beziehungsweise reell, imaginär, ein Nullkreis. Einem unendlich fernen P enspricht ein grösster Kreis; fällt P in den Mittelpunkt von K, so geht K in den unendlich fernen imaginären Kugelkreis über. Ein imaginärer Kreis soll durch jenen reellen Kreis vertreten werden, welcher P zum Mittelpunkte hat. Der Kürze halber möge P der Pol zu K heissen.

2. Es seien P, P_1 zwei Punkte im Raume, p die sie verbindende Gerade. Die zugeordneten Kreise K, K_1 haben die reciproke Polare q von p in Bezug auf K zur Potenzaxe; sie schneiden sich reell, imaginär, berühren sich, jenachdem p die Kugel imaginär, reell schneidet oder sie berührt. Sind die Punkte P, P_1 conjugirt bezüglich K, so schneiden sich K, K_1 orthogonal; ist einer dieser Kreise imaginär, so wird sein reeller Vertreter von dem andern diametral geschnitten.

3. Es seien P_1, P_2, P_3 drei nicht in gerader Linie liegende Punkte, P die durch sie bestimmte Ebene, p_1, p_2, p_3 die Geraden durch P_2P_3, P_3P_1, P_1P_2. Die zugeordneten Kreise K_1, K_2, K_3 bilden drei Paare mit den Potenzaxen q_1, q_2, q_3 und haben den Pol P von P in Bezug auf K zum Potenzcentrum. Der Kreis K, welcher durch P abgebildet wird, ist ihr gemeinsamer Orthogonalkreis; er geht in einen Nullkreis über, wenn P die Kugel berührt; wird er imaginär, so ist sein reeller Vertreter gemeinsamer Diametralkreis von K_1, K_2, K_3.

4. Die einfach unendliche Gesamtheit von Kreisen, welche den Punkten einer Linie entsprechen, werde als Kreisschaar bezeichnet.

Die einer Geraden p zugeordnete oder die lineare Kreisschaar nennt man ein Kreisbüschel, die Gerade q ist seine Potenzaxe, während p als Polaraxe bezeichnet werden soll. Jenachdem p die Kugel imaginär, reell schneidet oder berührt, ist das Kreisbüschel ein solches mit Grundpunkten, mit Grenzpunkten oder ein Berührungsbüschel.

Zwei Kreisbüschel, deren Polaraxen p, q reciprok sind in Bezug auf K, heissen conjugirte Kreisbüschel; weil jeder Punkt von p zu jedem Punkt von q conjugirt ist, so schneidet jeder Kreis des einen Büschels jeden des andern rechtwinklig, daher die zweite Benennung Orthogonalkreisbüschel. Von zwei conjugirten Büscheln hat das eine Grundpunkte, das andere Grenzpunkte und beide Punktepaare fallen zusammen, oder es sind beide Büschel Berührungsbüschel.

Die einer Curve C zugeordnete oder allgemeine Kreisschaar hat C zur Polarcurve, die Rückkehrkante C^* der reciproken developpabeln Regelfläche F* zur Potenzcurve in dem Sinne, dass jeder Punkt von C^* Potenzcentrum für drei benachbarte Kreise der Schaar ist*). Der Durchschnitt von F* und K, die sphärische Curve T, ist die Einhüllende der Kreisschaar. Sie kann auch als Ort der Grundpunkte, resp. Grenzpunkte der Kreisbüschel erklärt werden, welche den Tangenten von C entsprechen, und erscheint nach dieser Auffassung als Selbstschattengrenze der Kugel bei Beleuchtung derselben durch C.

Ist die Polarcurve C eine Plancurve und P ihre Ebene, dann reducirt sich C^* auf einen Punkt, den Pol P^* von P in Bezug auf K, welcher das Potenzcentrum der Kreisschaar bildet; die Fläche F* geht sonach in eine Kegelfläche mit P^* als Scheitel über. Aus diesem Grunde möge eine Kreisschaar mit ebener Polarcurve als konische Kreisschaar bezeichnet werden.

Bei der linearen Kreisschaar, wo C durch die Polaraxe p vertreten ist, degeneriren C^* und F* in die Gerade q, die Einhüllende T in dasjenige (reelle oder imaginäre) Punktepaar, welches q mit K gemein hat.

5. Die zweifach unendliche Gesamtheit von Kreisen, welche die Punkte einer Fläche zu Bildern haben, werde Kreisnetz genannt.

Das einer Ebene P zugeordnete oder planare Kreisnetz wird als Kreisbündel bezeichnet; P ist seine Polarebene, ihr Pol P^* das Potenzcentrum. P schneidet K entweder reell, imaginär oder berührt sie; im ersten Falle ist der dem Bündel nicht angehörende Kreis K, welchen P mit K gemein hat, gemeinsamer Orthogonalkreis, im zweiten Falle ist sein reeller Vertreter,

*) Die Potenz kann auch, wie beim Kreisbüchel, constant bleiben, wenn die Tangentendeveloppable von C einer zu K concentrischen Kugel umschrieben ist.

gleichzeitig der kleinste Kreis des Bündels, gemeinsamer Diametralkreis der Kreise des Bündels; im dritten Falle zieht sich der Orthogonalkreis in einen Nullkreis zusammen, durch welchen alle Kreise des Bündels hindurchgehen.

Einer krummen Fläche F entspricht das allgemeine Kreisnetz. F ist seine Polarfläche, die in Bezug auf K reciproke Fläche F* seine Potenzfläche in dem Sinne, als jeder Punkt derselben Potenzcentrum für eine Schaar unendlich benachbarter Kreise des Netzes ist*). In dem speciellen Falle des planaren Netzes ist F durch P, F* durch P^* vertreten.

Aus einem Kreisnetz wird eine Kreisschaar herausgehoben, indem man seiner Polarfläche eine Curve aufschreibt und diese als Polarcurve ansieht. Ein planares Kreisnetz enthält nur lineare und konische Kreisschaaren; es lässt sich insbesondere auf zweifach unendlichviele Arten in Kreisbüschel zerlegen entsprechend den ∞^2 Strahlenbüscheln, welche in seiner Polarebene verzeichnet werden können. Im allgemeinen Kreisnetz treten allgemeine und konische Kreisschaaren auf, lineare nur dann, wenn seine Polarfläche gerade Linien enthält.

6. Die dreifach unendliche Gesamtheit von Kreisen, welche den unendlichen Raum zur Abbildung haben, heisst sphärisches Kreissystem.

§. 2.

7. Die Einhüllende einer konischen Kreisschaar, deren Polarcurve eine Kegelschnittslinie ist, ist eine sphärische Curve vierter Ordnung T^4, als Durchschnitt eines Kegels zweiter Ordnung mit der Kugel.

In der Figur Taf. III., welche die folgenden Untersuchungen erläutern soll, dient die Ebene P_0 des Polarkegelschnitts C_0 als Bildebene, ihr Pol in Bezug auf K, zugleich die Spitze jenes Kegels und Potenzcentrum der Kreisschaar, als Projectionscentrum; der durch P_0 aus K geschnittene Kreis K_0 begrenzt zugleich die Projection der Kugel. Da die Entfernung des Projectionscentrums von der Bildebene bei den folgenden Betrachtungen keine Rolle spielt, so genügt die Angabe seiner Orthogonalprojection P_0', welche mit dem Mittelpunkt von K_0 zusammenfällt.

---

*) Die Potenz bleibt hier, wie beim Kreisbündel, constant, wenn F eine mit K concentrische Kugel ist.

Die Polaren der Punkte von C_0 in Bezug auf K_0 sind die Spuren der Berührungsebenen, die Pole der Tangenten von C_0 in Bezug auf K_0 die Spuren der Kanten des Kegels $P_0 T^4$, mit andern Worten: als Spur dieses der Curve doppelt umschriebenen Kegels, zugleich als Projection von T^4 in P_0 ergibt sich der zur Polarcurve C_0 in Bezug auf K_0 reciproke Kegelschnitt $\mathfrak{C}_0$, u. zw. soweit er innerhalb K_0 liegt, dem reellen, und soweit er ausserhalb K_0 liegt, dem imaginären Teil von T^4 entsprechend.

Es sei P_1 ein solcher Punkt in P_0, welchem in Bezug auf K_0 und $\mathfrak{C}_0$ dieselbe Gerade p_{01} als Polare zugeordnet ist; dann ist $P_0 p_{01}$ die Polarebene von P_1 sowol bezüglich der Kugel als auch bezüglich des Kegels $P_0 \mathfrak{C}_0$, trennt somit die Schnittpunkte eines jeden aus P_1 gezogenen Strahls mit den beiden Flächen harmonisch von P_1; geht also ein solcher Strahl durch einen beiden Flächen gemeinschaftlichen, d. h. durch einen Punkt von T^4, so muss er noch einen zweiten derartigen Punkt enthalten. Mithin ist P_1 der Scheitel eines der Curve T^4 doppelt umschriebenen Kegels, der ebenso wie der Kegel aus P_0 von zweiter Ordnung ist, weil jede durch P_1 gelegte Ebene vier Punkte der Curve und daher zwei doppelt projicirende Strahlen enthält. Die Berührungsebenen dieses neuen Kegels schneiden aus der Kugel eine zweite durch T^4 eingehüllte konische Kreisschaar aus, deren Polarcurve ein in der Ebene $P_0 p_{01}$ oder P_1 gelegener Kegelschnitt C_1 und deren Potenzcentrum P_1 ist.

Da nun zwei Kegelschnitte in einer Ebene im allgemeinen drei Punkte von der Beschaffenheit besitzen, wie sie bei P_1 vorausgesetzt wurde, nämlich die Ecken des gemeinsamen Polardreiecks, so gibt es ausser dem ursprünglichen Kegel aus P_0 noch drei T^4 doppelt umschriebene Kegel zweiter Ordnung. Die Scheitel dieser vier Kegel, $P_0 P_1 P_2 P_3$, und die Ebenen $P_1 P_2 P_3$, welche die Seiten jenes Polardreiecks mit P_0 bestimmen, im Verein mit P_0 bilden Ecken und Seitenflächen eines Polartetraeders der Kugel, das sie wie mit dem Kegel aus P_0 auch mit den drei andern gemein hat. Fasst man die Resultate zusammen, so ergibt sich der Satz:

„Der sphärischen Curve T^4 lassen sich im allgemeinen vier „Kegel zweiter Ordnung doppelt umschreiben, oder, was dasselbe „ist, sie hüllt vier konische Kreisschaaren ein; die Scheitel jener „Kegel oder die Potenzcentra dieser Schaaren sind die Ecken eines „bestimmten Polartetraeders der Kugel, dessen Seitenebenen die „Polarkegelschnitte der Kreisschaaren enthalten."

Wir werden dieses Tetraeder das **Fundamentaltetraeder** von T^4 nennen. Dem obigen ist leicht zu entnehmen, wie dasselbe

durch die Annahme von C_0 bestimmt ist; die Ebene P_0 von C_0 und ihr Pol P_0 in Bezug auf K bilden eine Ecke und die ihr gegenüberliegende Seitenfläche, die andern Ecken und Seitenflächen liefert das gemeinsame Polardreieck von $\mathfrak{C}_0$ und K_0, welches identisch ist mit dem von C_0 und K_0, weil C_0 und $\mathfrak{C}_0$ reciprok sind in Bezug auf K_0.

Die Kreise K_0, K_1, K_2, K_3, welche die Seitenebenen des Fundamentaltetraeders aus K ausschneiden, sind Orthogonalkreise der zugehörigen Schaaren der T^4 doppelt berührenden Kreise und stehen in solcher Beziehung zu einander, dass jeder von ihnen der gemeinsame Orthogonalkreis der drei andern ist; für den imaginären unter ihnen übernimmt der reelle Vertreter die Rolle eines Diametralkreises.

8. Legt man durch eine Kante des Fundamentaltetraeders, z. B. durch P_0P_2, eine Ebene, deren Spur e sein möge, so schneidet sie aus der Kugel einen Kreis K und aus T^4 vier Punkte 1 1* 2 2*; zwei Seitenpaare des durch die letzteren bestimmten vollständigen Vierecks schneiden sich in den Punkten P_0, P_2, der Schnittpunkt des dritten Seitenpaars als Pol der Geraden P_0P_2 in Bezug auf den Kreis K liegt dort, wo seine Ebene die reciproke Tetraederkante p_{02} schneidet, in M. „Es gibt also ausser den bereits erkannten vier „Schaaren ausgezeichneter Bisecanten von T^4, welche durch die „Ecken des Fundamentaltetraeders gehen, noch drei weitere, welche „gegenüberliegende Kanten desselben gleichzeitig schneiden."

Durch einen Punkt A von T^4 geht aus jeder der sieben Schaaren eine Bisecante; die nach den Ecken des Fundamentaltetraeders laufenden bestimmen auf der Curve vier Punkte, welche wir mit B_0, B_1, B_2, B_3 bezeichnen wollen, so dass B_0 auf AP_0 liegt u. s. f.; die drei übrigen, welche die reciproken Kantenpaare schneiden, bestimmen drei Curvenpunkte, welche $E_1E_2E_3$ heissen mögen. Der Zusammenhang zwischen beiden Gruppen besteht darin, dass die Bisecanten der ersten Gruppe ein vollständiges Vierkant mit dem Scheitel A und die Bisecanten der zweiten Gruppe sein Diagonaldreikant bilden. Das Polargebilde ist ein vollständiges Vierseit mit Diagonalen und liegt in der Polarebene von A, d. i. in der in diesem Punkte an die Kugel gelegten Tangentialebene A*; seine Seiten, als reciproke Polaren der durch A gehenden Kegelkanten, sind Tangenten der vier Polarkegelschnitte, ergeben sich demnach als Durchschnitt der Ebene A* mit dem Fundamentaltetraeder; die Ecken des Vierseits liegen in den Kanten dieses Tetraeders.

Betrachten wir ferner die Berührungsebenen der vier Kegel in A; ihre Pole sind Punkte der Polarkegelschnitte, nämlich die Be-

rührungspunkte der Seiten des vorerwähnten Vierseits, und liegen, da die vier Berührungsebenen die Curventangente a in A gemeinsam haben, in der reciproken Polare a^* von a und sind die Schnittpunkte derselben mit den Seitenflächen des Fundamentaltetraeders.

Nun bilden die Ebenen A^* in ihrer Gesamtheit die Berührungsebenen und die Geraden a^* die geradlinigen Erzeugenden der der Kugel längs T^4 umschriebenen Developpabeln; wir haben also den Satz:

„Die der Kugel längs T^4 umschriebene Developpable durch-„schneidet die Seitenflächen des Fundamentaltetraeders in den Polar-„kegelschnitten der vier Kreisschaaren, welche durch Γ^4 eingehüllt „werden."

Die angestellte Betrachtung zeigt eine bemerkenswerte Zuordnung der Tangenten und Punkte der vier Polarkegelschnitte; führt man an einen derselben eine beliebige Tangente, so gehören zu ihr zweimal drei Tangenten der drei übrigen, welche in den durch die erste Tangente an die Kugel gelegten Berührungsebenen liegen; und die Berührungspunkte eines solchen Tangentenvierseits gehören einer Geraden, einer Tangente der Kugel, an.

9. Aus einer Tangente t von C_0, Fig. 1., entspringen zwei Punkte von Γ^4, QQ^*, in einer Kante des Kegels aus P_0; die den Kegel längs dieser Kante berührende Ebene hat zur Spur die Tangente $\mathfrak{t}$ von $\mathfrak{C}_0$, welche dem Berührungspunkt T von t reciprok zugeordnet ist; die Berührungsebenen der Kugel in den Punkten QQ^* aber haben ihre gemeinsame Spur in t. Die Durchschnittslinien des letztern Ebenenpaares mit der erstgedachten Ebene sind nun die Tangenten τ, τ^* von T^4 in Q, Q^* und der Schnittpunkt D von t und $\mathfrak{t}$ auch ihr Schnittpunkt. Da dieselbe Betrachtung auch an jeden der drei andern Polarkegelschnitte angeknüpft werden kann, so lässt sich das Resultat folgendermassen aussprechen:

„Jede zwei Tangenten von T^4, deren Berührungspunkte auf „einerlei Kante eines der doppelt umschriebenen Kegel liegen, „schneiden sich in einem Punkte der seinem Scheitel gegenüber-„liegenden Seitenebene des Fundamentaltetraeders; ebenso werden „sich die Schmiegungsebenen solcher Punkte in derselben Ebene „durchschneiden; die developpable Fläche von T^4 besitzt also in „jeder Seitenebene des Fundamentaltetraeders einen Selbstdurchschnitt „oder eine Doppelcurve."

Anders ausgedrückt: Die Tangente irgend eines Punktes A von T^4 wird in den vier Punkten, wo sie die Seitenflächen des Funda-

mentaltetraeders durchdringt, von vier andern Tangenten der Curve geschnitten, deren Berührungspunkte B_0, B_1, B_2, B_3 in den aus A nach den Ecken des Fundamentaltetraeders gezogenen Geraden liegen. (Vgl. Nr. 8).

Die Lagenbeziehung von T^4 gegen eine Ecke P_i und die gegenüberliegende Seitenfläche P_i des Fundamentaltetraeders lässt sich nun so charakterisiren, dass die Punkte der Curve paarweise auf Strahlen aus P_i liegen, dass die Tangenten und Schmiegungsebenen eines solchen Punktepaars in P_i sich schneiden, dass endlich jedes Punktepaar durch die Ebene P_i von P_i harmonisch getrennt wird; ihren zusammenfassenden Ausdruck findet sie in dem Satze, „dass „T^4 involutorisch-collinear zu sich selbst ist in Bezug auf jede Ecke „des Fundamentaltetraeders als Collineationscentrum und die gegen„überstehende Seitenfläche als Collineationsebene."

Wir kehren zu den oben nachgewiesenen Doppelcurven der Tangentenfläche von T^4 zurück. Die in der Ebene P_0 befindliche, Fig. 1., hat sich als Ort des Durchschnittspunktes D der Tangenten t und $\mathfrak{t}$ von C_0 und $\mathfrak{C}_0$ ergeben; diese Tangenten sind vermöge des Umstandes, dass $\mathfrak{t}$ die Polare des Berührungspunkts von t in Bezug auf K_0 ist, einander eindeutig zugeordnet. Wenn aber die Tangenten zweier Curven zweiter Classe projectivisch auf einander bezogen sind, so liegen die Schnittpunkte entsprechender Tangenten auf einer Curve vierter Ordnung. „Die vier Doppelcurven der de„veloppabeln Fläche von T^4 sind also Curven vierter Ordnung."

Den Tangenten t_{00}, t_{01}, t_{02}, t_{03}, welche C_0 und K_0 zugleich berühren, entsprechen in dem eben erläuterten Sinne diejenigen Tangenten $\mathfrak{t}_{00}$, $\mathfrak{t}_{01}$, $\mathfrak{t}_{02}$, $\mathfrak{t}_{03}$ von $\mathfrak{C}_0$, deren Berührungspunkte die Schnittpunkte S_{00}, S_{01}, S_{02}, S_{03} von $\mathfrak{C}_0$ und K_0, zugleich Schnittpunkte von T^4 mit P_0 sind; diese Punkte gehören daher der Doppelcurve auch an, und wir haben den weiteren Satz:

„Diejenigen Punkte, welche T^4 mit der Oberfläche des Funda„mentaltetraeders gemeinsam hat, sind zugleich Punkte der Doppel„curve der Tangentenfläche von T^4."

Den Punkten S_{00}, S_{01}, ... von T^4 kommt noch eine weitere Eigentümlichkeit zu. Die ihnen zugehörigen Tangenten von T^4 sind Kanten des Kegels P_0 und zwar diejenigen, welche den Tangenten t_{00}, t_{01}, ... reciprok entsprechen; legt man an den Kegel längs einer solchen Kante, etwa $P_0 S_{00}$, die Tangentialebene, so enthält sie ausser ihr noch die benachbarte Kegelkante und die in den Schnittpunkten der letzteren mit T^4 an diese gezogenen Tangenten, welche ihre gemeinsame Projection in t_{00} haben und in dem S_{00} benachbarten

Punkte der Doppelcurve D_0 in P_0 sich schneiden, enthält also drei aufeinanderfolgende Tangenten und vier aufeinanderfolgende Punkte von T^4. Eine solche Ebene bezeichnet man als stationäre Schmiegungsebene der Curve oder als Inflexionstangentialebene ihrer Tangentendeveloppabeln. Daher der Satz: „Die Schnittpunkte von „T^4 mit der Oberfläche des Fundamentaltetraeders, zugleich jene „Punkte, welche die Curve mit den Doppelcurven ihrer Developpa„beln gemein hat, sind Punkte der stationären Osculationsebenen von „T^4 oder der Inflexionstangentialebenen ihrer Developpabeln." Die Anzahl solcher Punkte, die imaginären wie die reellen gezählt, ist $4 \times 4 = 16$.

Hieraus lässt sich eine weitere Eigenschaft der Doppelcurven ableiten. Den Tangenten t^*, t^{**} von C_0, welche in P_1 sich schneiden, deren Berührungspunkte T^*, T^{**} also in der Gegenseite p_{01} des Polardreiecks $P_1P_2P_3$ liegen, entsprechen, da dieses Polardreieck C_0 und $\mathfrak{C}_0$ gemeinschaftlich zukommt, die Tangenten $\mathfrak{t}^*$, $\mathfrak{t}^{**}$ von $\mathfrak{C}_0$, welche gleichfalls in P_1 sich schneiden und in p_{01} ihre Berührungspunkte haben. In P_1 sind also die Schnittpunkte zweier Paare zugeordneter Tangenten, t^* und $\mathfrak{t}^*$, t^{**} und $\mathfrak{t}^{**}$, vereint, P_1 ist also ein Doppelpunkt der in P_0 enthaltenen Doppelcurve D_0. Tangenten der durch ihn gehenden Curvenäste sind die gemeinsame Spur der Schmiegungsebenen in S_{10}, S_{11} einer- und in S_{12}, S_{13} andrerseits, und da diesen Ebenen in Bezug auf die Tangentenfläche von T^4 der Charakter von Wendetangentialebenen zukommt, so liefern sie für jeden ebenen Durchschnitt dieser Fläche, also auch für die Doppelcurve D_0 Inflexionstangenten. Dieselbe Betrachtung lässt sich auch für P_2 und P_3 (wenn auch für letzteren Punkt mit imaginären Elementen) durchführen, so dass man den Satz aussprechen kann:

„Jede der vier Doppelcurven der Developpabeln von T^4 besitzt „in den Eckpunkten des Fundamentaltetraeders, welche ihrer Ebene „angehören, Doppelpunkte mit Inflexionstangenten."

Von den Doppelcurven gehören nur die ausserhalb der Kugel liegenden Teile dem reellen T^4 an, und diese werden von denjenigen Tangenten von C_i (und den ihnen zugeordneten von $\mathfrak{C}_i$) erzeugt, welche K_i oder die Kugel nicht schneiden. Gehen wir in Fig. 1 von einer Tangente (t) aus, welche K_0 schneidet, deren Berührungspunkt (T) aber ausserhalb K_0 liegt, so befinden sich auf dem reellen Kugelkreise, dessen Pol (T) ist, zwei imaginäre Punkte von T^4, deren reelle Verbindungslinie die zu (t) reciproke Kegelkante ist, und deren imaginäre Tangenten sich in dem reellen Punkte (D) des parasitischen Teils von D_0 schneiden. Wenn nun (T) insbesondere mit einem der Schnittpunkte F_{00}, F_{01}, F_{02}, F_{03} von C_0 und K_0, z. B. mit

F_{00} zusammenfällt, so rückt auch (D) nach F_{00} und jede der beiden imaginären Curventangenten, die sich hier schneiden, hat demnach mit der Kugel drei Punkte gemein — zwei Nachbarpunkte von T^4 und F_{00} — , muss daher ganz in der Kugelfläche liegen, d. h. die imaginären Inflexionstangenten der Kugel in den Punkten F_{00}, F_{01}, ... sind zugleich imaginäre Tangenten von T^4. Wir sprechen dies in dem Satze aus: „Die imaginären Inflexionstangenten der Kugel in „jenen Punkten, wo sie den Polarkegelschnitten der vier durch T^4 „eingehüllten Kreisschaaren begegnet, sind zugleich Tangenten von „T^4." Diese 16 Punkte liegen zu je vier in den Orthogonalkreisen jener Kreisschaaren.

10. Legt man durch einen ausserhalb T^4 beliebig angenommenen Punkt M ein Ebenenbündel, so ist in jeder Ebene desselben durch die vier Punkte von T^4, welche ihr angehören, und durch den Punkt M ein Kegelschnitt eindeutig bestimmt; der Ort all dieser Kegelschnitte ist eine durch T^4 und M gehende Fläche zweiter Ordnung. Mit jedem neuen Punkte ergibt sich im allgemeinen eine neue Fläche, und die Gesamtheit aller wird ein Flächenbüschel zweiter Ordnung, T^4 seine Basiscurve genannt. Es ist eine Gesamtheit von einfach unendlicher Mächtigkeit, weil jede Fläche zweifach unendlich viele Punkte des Raumes aufnimmt.

Es ist unmittelbar einleuchtend, dass das Fundamentaltetraeder von T^4 für jede Fläche des Büschels ein Polartetraeder ist, mit andern Worten: „Das Fundamentaltetraeder der Basiscurve T^4 des „Flächenbüschels zweiter Ordnung ist gemeinsames Polartetraeder „aller Flächen des Büschels." Umgekehrt: Der Durchschnitt der Kugel mit einer beliebigen Fläche zweiter Ordnung ist eine Curve vierter Ordnung und das den beiden Flächen gemeinsame Polartetraeder ihr Fundamentaltetraeder.

Um eine von den Regelflächen des Büschels durch T^4 zu erhalten, lege man durch eine beliebige Bisecante der Curve ein Büschel von Ebenen; diese bestimmen mit der Curve eine Schaar neuer Bisecanten, zugleich die eine Regelschaar einer durch T^4 gehenden Regelfläche zweiter Ordnung, während die Axe des Ebenenbüschels der andern Regelschaar angehört. Nur wenn die ursprünglich gewählte Bisecante durch eine Ecke des Fundamentaltetraeders geht, wird die aus ihr abgeleitete Fläche entwickelbar und besitzt nur eine Kegelschaar. „Die Kegel aus den Ecken des Fundmental-„tetraeders sind also die einzigen entwickelbaren Flächen, welche in „dem Büschel zweiter Ordnung auftreten."

11. Der Darstellung von T^4 als Einhüllende von Kreisschaaren

möge ihre Erzeugung durch projectivische Kreisbüschel gegenüber gestellt werden.

Ein Kreisbüschel steht mit der geraden Punktreihe, durch welche es auf den Raum abgebildet wird, in eindeutiger Beziehung. Wenn daher zwei gerade Punktreihen p, p^* projectivisch auf einander bezogen sind, so gilt dies auch bezüglich der ihnen zugeordneten Kreisbüschel, welche als projectivische Kreisbüschel bezeichnet werden mögen.

Indem wir uns mit der Frage nach dem Ort des Schnittpunktes entsprechender Kreise oder dem Erzeugniss zweier projectivischen Kreisbüschel einer Kugel beschäftigen, haben wir zu unterscheiden, ob die zugeordneten Punkreihen p, p^* in perspectivischer oder in allgemeiner Lage sich befinden.

Sind P, P^* zwei homologe Punkte von p, p^*; K, K^* die entsprechenden Kreise, so sind die Schnittpunkte Q, Q^* von K, K^* Punkte des gesuchten Ortes. Da nun die Geraden PP^*, QQ^* conjugirt sind bezüglich der Kugel, so kann man den Satz aussprechen:

„Das Erzeugniss zweier projectivischen Kreisbüschel auf einer „Kugel ist gleichbedeutend dem Durchschnitt der Kugel mit der„jenigen Fläche, welche dem Strahlensystem polarreciprok ist, das „die den Kreisbüscheln zugeordneten Punktreihen bestimmen."

a) Befinden sich die Punktreihen in perspectivischer Lage, so ist das durch sie bestimmte Strahlensystem ein Strahlenbüschel, das polarreciproke Gebilde eine Ebene. Daraus folgt:

„Der Ort des Schnittpunktes entsprechender Kreise zweier pro„jectivischen Kreisbüschel einer Kugel, welche einen Kreis selbst„entsprechend gemein haben, ist ein zweiter Kreis, welcher mit den „beiden Büscheln ein- und demselben Kreisbündel angehört."

b) Befinden sich die Punktreihen in allgemeiner Lage, so wird das durch sie bestimmte Strahlensystem von einem Kegelschnitt eingehüllt, wenn die Träger p, p^* sich schneiden, und es erfüllt eine windschiefe Regelfläche zweiter Ordnung, wenn sie sich kreuzen; im ersten Falle ist das reciproke Gebilde ein Kegel, im zweiten Falle eine windschiefe Regelfläche zweiter Ordnung. Es ergibt sich also der Satz:

„Der Ort der Schnittpunkte entsprechender Kreise aus zwei „projectivischen Kreisbüscheln einer Kugel in allgemeiner Lage ist „eine Curve vierter Ordnung T^4."

§. 3.

12. Den allgemeinen Betrachtungen über die sphärische Curve vierter Ordnung soll nun eine Untersuchung ihrer Formen angeschlossen werden als Correlat der verschiedenen Beziehungen, in welche eine Kegelschnittslinie zur Kugel treten kann. Zwar werden, da dem früheren zufolge einer solchen Raumcurve im allgemeinen vier Kegelschnitte zugeordnet sind, an demselben Falle mehre derartige Beziehungen zugleich erscheinen; doch die Zusammenstellung dieser Combinationen soll der Untersuchung der Einzelfälle nachgestellt werden.

Im folgenden bezeichnen wir den Polarkegelschnitt mit C, seine Ebene mit P, ihren Pol in Bezug auf K mit P, den von ihr ausgeschnittenen Kugelkreis mit K, endlich den zu C in Bezug auf K reciproken Kegelschnitt mit $\mathfrak{C}$.

I. Die Ebene P schneidet die Kugel imaginär. Da ihr Pol P innerhalb der Kugel liegt, so besteht T^4 aus zwei getrennten geschlossenen Curvenästen. Das Fundamentaltetraeder ist vollständig reell, weil das gemeinsame Polardreieck von C und dem imaginären K es ist, alle vier doppelt projicirenden Kegel von T^4 sind also reell. Mit P und einer zweiten Ebene des Fundamentaltetraeders, derjenigen, welche dem innerhalb $\mathfrak{C}$ (und C) gelegenen Eckpunkte desselben zugeordnet ist, gibt die Curve keine, dagegen mit den beiden andern je vier reelle Schnittpunkte, besitzt also acht reelle stationäre Schmiegungsebenen.

Liegt der Mittelpunkt von K in einer Axe von C, so rückt eine Ecke des Fundamentaltetraeders in Richtung der andern Axe von C ins unendliche und die gegenüberliegende Seitenfläche verwandelt sich in die zu dieser Richtung conjugirte Diametralebene der Kugel; von den vier doppelt projicirenden Kegeln geht einer in einen Cylinder über, mit andern Worten, T^4 wird in Bezug auf eine Diametralebene der Kugel orthogonal-symmetrisch.

Bei concentrischer Lage von C und K bilden der Mittelpunkt und die unendlich fernen Axenpunkte von C das gemeinsame Tripel conjugirter Punkte, zwei der doppelt projicirenden Kegel verwandeln sich in Cylinder, T^4 wird bezüglich zweier zu einander normaler Diametralebenen der Kugel orthogonal-symmetrisch.

Entfernt P sich ins unendliche, so fällt P mit dem Centrum der Kugel zusammen, und T^4 wird ein sphärischer Kegelschnitt, der in Bezug auf drei gegenseitig rechtwinklig sich schneidende Diametralebenen der Kugel orthogonale Symmetrie aufweist; diese drei Ebe-

nen im Verein mit der unendlich fernen bilden sein Fundamentaltetraeder.

Findet zwischen C und K doppelte (ideelle) Berührung statt, so besitzen beide unzählich viele gemeinsame Polardreicke mit einer gemeinschaftlichen Ecke P_1 und Gegenseite p_1; also entsprechen auch T^4 unendlich viele Fundamentaltetraeder, welche eine Ecke (P_1) und die ihr conjugirte Seitenfläche (Pp_1) sowie ein Paar Gegenkanten gemein haben, von welch' letzteren die eine durch P geht und die andere in P liegt. Ausser den beiden doppelt umschriebenen Kegeln aus P und P_1 gibt es unendlich viele, deren Scheitel die Gerade p_1 erfüllen; diese fallen in ein Ebenenpaar durch p_1 zusammen, T^4 zerfällt also in zwei ebene Schnitte oder Kreise der Kugel, welche zwei (imaginäre) Punkte von p_1 mit einander gemein haben (Doppelpunkte von T^4). In Bezug auf die zu p_1 senkrechte Diametralebene der Kugel besteht orthogonale Symmetrie, weil der vorliegende Fall in dem zuerst angeführten Sonderfalle inbegriffen ist. — Die vorstehende Bedingung ist u. a. auch erfüllt, wenn C ein mit K concentrischer Kreis ist; weil dann p_1 ins unendliche rückt, so löst sich T^4 in zwei Parallelkreise auf, und in Bezug auf alle Ebenen durch PP_1 besteht orthogonale Symmetrie. Wird überdies P zur unendlich fernen Ebene, so zerfällt T^4 in zwei gleiche Parallelkreise, welche einen Sonderfall des sphärischen Kegelschnittes repräsentiren.

II. Die Ebene P schneidet die Kugel reell. Zwischen C und dem reellen Kreise K können nachstehende Beziehungen eintreten.

a) C und K haben weder reelle Punkte noch Tangenten gemeinsam. Dies findet statt, wenn eine dieser Linien die andere einschliesst. Wird C von K eingeschlossen, so ist T^4 vollständig imaginär; findet das umgekehrte statt, so weist T^4 dieselben Eigenschaften auf wie im Falle I. Orthogonale Symmetrie in Bezug auf eine oder auf zwei zu einander normale Diametralebenen der Kugel ergibt sich, wenn der Mittelpunkt von K einer oder beiden Axen von C angehört, und sie besteht noch in Bezug auf eine zweite, respective dritte Diametralebene, wenn K ein grösster Kreis ist.

b) C und K haben keine reellen Punkte, aber vier reelle Tangenten gemeinsam. Dies tritt ein, wenn beide Linien sich gegenseitig ausschliessen. T^4 zeigt dieselben Eigenschaften wie im Falle I. Einfache Orthogonalsymmetrie ergibt sich, wenn der Mittelpunkt von K auf einer Axe von C liegt; zweifache Symmetrie, wenn überdies P eine Diametralebene der Kugel ist; T^4 ist endlich dreifach symmetrisch oder ein sphärischer Kegelschnitt, wenn C eine mit der Kugel concentrische Hyperbel ist.

c) C und K haben vier reelle Punkte und Tangenten gemeinsam. Dieser Fall liegt der Fig. 1 zu Grunde. T^4 zeigt dieselben Merkmale wie im Falle I., die Bedingungen der Symmetrie sind die nämlichen wie in II. a)

d) C und K haben vier reelle Punkte, aber keine Tangenten gemeinsam. Dies findet nur statt, wenn C eine Hyperbel ist, und da unter obiger Voraussetzung alle ihre Tangenten den Kreis K schneiden, so ist T^4 vollständig imaginär.

e) C und K haben zwei reelle Punkte und Tangenten gemeinsam. Dieselbe Beziehung besteht auch zwischen $\mathfrak{C}$ und K, T^4 ist demnach eine einfach zusammenhangende Curve; von ihrem Fundamentaltetraeder sind nur zwei Ecken und die conjugirten Seitenebenen reell, weil an dem C und K gemeinsamen Polardreieck nur eine Ecke und die gegenüberliegende Seite reell ist. Dementsprechend besitzt T^4 nur zwei doppelt umschriebene Kegel und, da jede der reellen Seitenebenen des Fundamentaltetraeders zwei reelle Punkte der Curve enthält, vier reelle stationäre Osculationsebenen. Gehört der Mittelpunkt von K einer Axe von C an, so ist T^4 orthogonal-symmetrisch in Bezug auf eine, und ist ausserdem K ein grösster Kreis, in Bezug auf zwei zu einander normale Diametralebenen der Kugel.

Fasst man die bisher gewonnenen Resultate mit Ausseracht-lassung der Fälle, wo ein Zerfall in niedere Curven stattfindet, zusammen, so ergibt sich folgendes: „Die sphärische Curve vierter „Ordnung besteht entweder aus zwei getrennten, geschlossenen Aesten „oder bildet eine einfache, geschlossene Linie. — Im ersten Falle ist „ihr Fundamentaltetraeder vollständig reell; seine Ecken sind die „Scheitel von vier der Curve doppelt umschriebenen Kegeln zweiter „Ordnung, und seine Seitenflächen enthalten vier ihrer Tangenten-„developpabeln doppelt eingeschriebene Curven vierter Ordnung; „von den 16 stationären Schmiegungsebenen sind acht reell. — Im „zweiten Falle sind nur zwei Ecken und die gegenüberliegenden „Seitenflächen des Tetraeders reell; dementsprechend sind auch nur „zwei von den doppelt umschriebenen Kegeln und zwei von den „doppelt eingeschriebenen Curven wirklich vorhanden; die Zahl der „reellen stationären Schmiegungsebenen reducirt sich auf vier". — An der zweiteiligen Curve sind von den aufgezählten Beziehungen zwischen Polarkegelschnitt und Kugel die Fälle I., II. a), II. b), II. c) vereinigt; der einteiligen Curve entspricht in beiden reellen Seitenebenen ihres Fundamentaltetraeders der Fall II. e).

Den verschiedenen Fällen der Berührung von C und K möge eine allgemeine Bemerkung vorangestellt werden.

Wie in Nr. 9 erläutert worden, führt eine Tangente t von C im allgemeinen zu zwei Punkten Q, Q^* von T^4, und die Polarebene ihres Berührungspunktes T bezüglich der Kugel schneidet aus den beiden durch t an die Kugel gelegten Berührungsebenen die Tangenten τ, τ^* von T^4 in Q, Q^* aus.

Berührt t gleichzeitig den Kreis K, so fallen die Punkte Q, Q^* zwar zusammen, haben aber eine bestimmte Verbindungsgerade, die Schnittlinie der Polarebene von T mit der einzigen durch t bestimmten Berührungsebene der Kugel; diese Schnittlinie ist die Tangente von T^4 in dem Punkte (QQ^*). Es sind die Punkte der stationären Osculationsebenen, welche auf solche Weise entstehen.

Wenn aber in diesem letztern Falle die Berührungspunkte von t mit C und K in einen Punkt P_1 zusammenfallen, dann wird die Verbindungslinie der in P_1 vereinigten Punkte Q, Q^* unbestimmt, weil die beiden Ebenen, durch welche sie vorhin bestimmt war, nunmehr auch zu einer Ebene vereinigt sind. Dieser Umstand charakterisirt den Berührungspunkt P_1 von C und K als einen Doppelpunkt von T^4.

Bezüglich der Art der Berührung von C und K sind nun mehrere Fälle zu unterscheiden.

f) Zwischen C und K bestehe einfache (zweipunktige) Berührung. Eine ebensolche Beziehung besteht dann auch zwischen $\mathfrak{C}$ und K, so dass alle drei Linien den doppelt zu zählenden Berührungspunkt P_1 gemeinschaftlich haben. Im übrigen sind folgende Unterfälle zu bemerken.

f_1) Wird C von K eingeschlossen, oder haben beide Linien ausser dem Berührungspunkt und der Tangente in demselben noch zwei Punkte aber keine Tangenten mehr gemeinsam — eine Beziehung, welche sich nur bei der Hyperbel ergeben kann, wenn K sie äusserlich berührt —, so schneiden alle Tangenten von C, mit Ausnahme jener in P_1, den Kreis K, in Folge dessen reducirt sich der reelle Teil von T^4 auf den Doppelpunkt P_1.

f_2) Wird K von C eingeschlossen, oder haben beide Linien ausser P_1 und der Tangente daselbst noch zwei Punkte und zwei Tangenten gemeinsam (innere Berührung), so liegen die der Tangente in P_1 beiderseits benachbarten Tangenten von C ausserhalb K, ihre reciproken Polaren schneiden die Kugel reell; demnach vereinigen sich in dem Doppelpunkte zwei Aeste der Curve zu einem Knoten, T^4 besitzt dort zwei verschiedene Tangenten. Die Lage der Curvenäste ist in den beiden oben getrennten Fällen verschieden; im ersten liegt je einer auf jeder Seite von P, im andern Falle erstreckt sich

ein Ast jeder Art zu beiden Seiten dieser Ebene. Sowie von dem C und K gemeinsamen Polardreieck zwei Ecken in P_1 und die ihnen gegenüberliegenden Seiten in der zugehörigen Tangente vereinigt, während die dritte Ecke und Seite reell vorhanden sind — erstere in der Tangente in P_1 liegend, letztere durch P_1 gehend —, fallen auch zwei Ecken des Fundamentaltetraeders von T^4 mit P_1 und die conjugirten Seitenflächen mit der zugehörigen Tangentialebene P_1 der Kugel zusammen, und es existirt ausser P' und P noch eine Ecke und die ihr entsprechende Seitenfläche — erstere in P_1 liegend, letztere durch P_1 gehend. Hieraus ergibt sich, dass auch zwei der doppelt umschriebenen Kegel zweiter Ordnung vereinigt sind zu einem Kegel mit dem Doppelpunkt als Scheitel, der jedoch nur im übertragenen Sinne als doppelt projicirend zu bezeichnen ist, indem jede seiner Kanten drei Punkte der Curve enthält, wovon allerdings zwei jedesmal im Doppelpunkt vereinigt sind; es verbleiben daher nur zwei doppelt umschriebene Kegel im eigentlichen Sinne. Die ihren Scheiteln gegenüberliegenden Seitenflächen des Fundamentaltetraeders schneiden T^4 ausser im Doppelpunkte in je zwei weiteren Punkten, die eine reell, die andere imaginär, die Curve besitzt also vier stationäre Schmiegungsebenen, wovon im vorliegenden Falle nur zwei reell sind. In der Ebene P_1 könnte von einer Doppelcurve der Tangentenfläche von T^4 nur dann die Rede sein, wenn man jede in ihr durch P_1 gezogene Gerade als Tangente der Curve auffassen wollte. Um die Natur der eigentlichen Doppelcurven in den andern zwei Seitenebenen des Fundamentaltetraeders zu erkennen, beachten wir die Aenderung, welche ihre Entstehung dem allgemeinen Falle (Nr. 9) gegenüber erleidet. Seien T', T'' die beiden benachbarten, zu P_1 vereinigten Punkte, welche C und K gemeinschaftlich sind; wenn der Berührungspunkt T der variabelen Tangente t, den Kegelschnitt C durchlaufend, in die Lage T' kommt, so fällt t in die Verbindungslinie $T'T''$; die Polare t' von T' in Bezug auf den Kreis K, d. i. die Tangente des letzteren im Punkte T', ist dieselbe Gerade $T'T''$; folglich sind in der gemeinsamen Tangente in P_1 zwei entsprechende Tangenten von C und $\mathfrak{C}$ vereinigt, sie sondert sich als Ort erster Ordnung von dem Orte vierter Ordnung ab, so dass der übrige Bestandteil des Ortes des Schnittpunktes von t und t eine Curve dritter Ordnung ist; und nur diese ist als Durchschnitt der Tangentenfläche von T^4 mit der Ebene von C und K anzusehen, da die abgesonderte Gerade keine eigentliche Tangente der Curve ist. In den beiden Seitenflächen des Fundamentaltetraeders, welche den Scheiteln der eigentlichen doppelt umschriebenen Kegel conjugirt sind, hat also die Tangentenfläche von T^4 Doppelcurven dritter Ordnung.

f_3) Haben C und K ausser dem Berührungspunkte P_1 und der Tangente in demselben keine weiteren Punkte, dagegen noch zwei Tangenten gemeinschaftlich (äussere Berührung), so treffen die der Tangente in P_1 beiderseits benachbarten Tangenten von C den Kreis K in reellen Punkten, ihre reciproken Polaren schneiden also die Kugel imaginär, so dass es in der Umgebung von P_1 keine reellen Punkte von T^4 gibt; P_1 ist in diesem Falle ein isolirter Doppelpunkt der Curve; ausser ihm besitzt sie einen reellen geschlossenen Ast, welcher die Ebene P in zwei Punkten schneidet. Bezüglich der Elemente des Fundamentaltetraeders, der doppelt umschriebenen Kegel und der Doppelcurven der Tangentenfläche ergeben sich die nämlichen Resultate wie im vorangehenden Falle, nur dass jetzt beide Ebenen der eigentlichen Doppelcurven T^4 ausser im Doppelpunkt in zwei reellen Punkten schneiden, so dass alle vier stationären Osculationsebenen reell sind.

Die unter f_2) und f_3) betrachteten Formen von T^4 werden orthogonal symmetrisch in Bezug auf eine Diametralebene der Kugel, wenn P_1 mit einem Scheitel von C zusammenfällt, oder wenn K ein Hauptkreis der Kugel ist; trifft beides zusammen, so weist T^4 in Bezug auf zwei zu einander normale Diametralebenen orthogonale Symmetrie auf.

g) K sei ein Krümmungskreis von C (dreipunktige Berührung). Dann osculirt K auch $\mathfrak{C}$, alle drei Curven haben den dreifach zu zählenden Berührungspunkt P_1 gemeinschaftlich. Die der gemeinsamen Tangente in diesem Punkte einerseits benachbarten Tangenten von C schneiden K reell, die andererseits benachbarten schneiden ihn imaginär — die Grenze zwischen beiden Tangentengruppen ist die ausser der Berührungstangente noch vorhandene gemeinsame Tangente von C und K; in Folge dessen besitzt T^4 nur zu einer Seite des Doppelpunktes einen reellen Ast. $\mathfrak{C}$ hat mit K ausser dem dreifach zählenden P_1 noch einen vierten Punkt gemeinschaftlich, von T^4 fallen also in die Ebene P der Doppelpunkt, ferner der einzige ihm benachbarte Punkt der Curve und ein vierter Punkt in endlicher Entfernung von jenen; die beiden zuerst genannten bestimmen die einzige in P liegende und doppelt zu zählende Tangente von T^4 in P_1, welche mit der Berührungstangente von C und K zusammenfällt; der letztgenannte Punkt führt zu einer stationären Osculationsebene von T^4. Hieraus ergibt sich, dass P_1 im vorliegenden Falle ein stationärer Punkt der Curve ist. Das gemeinsame Polardreieck von C und K reducirt sich auf den Punkt P_1 als Vereinigung aller drei Ecken und die zugehörige Tangente als Vereinigung aller drei Seiten; in gleicher Weise sind in P_1 drei Ecken und in der zugehörigen Tangentialebene P_1 der Kugel drei Seitenflächen des

Fundamentaltetraeders von T^4 vereinigt, P und P bilden die vierte Ecke und die ihr conjugirte Seitenfläche. Mithin fallen auch drei der doppelt umschriebenen Kegel zweiter Ordnung in einen Kegel mit dem Rückkehrpunkt als Scheitel zusammen, der aber nur im uneigentlichen Sinne ein doppelt projicirender ist, da jede seiner Kanten drei Punkte der Curve enthält, wovon jedesmal zwei im Scheitel vereinigt sind; es verbleibt also nur ein doppelt umschriebener Kegel zweiter Ordnung im eigentlichen Sinne, der aus P_1 ebenso gibt es nur einen Punkt mit stationärer Osculationsebene, den bereits erwähnten in P. Von einer Doppelcurve der Tangentenfläche von T^4 in P_1 könnte wieder nur im übertragenen Sinne die Rede sein wie im Falle f_2). Um die Natur der Doppelcurve in P zu erkennen, verfolgen wir ihre Entstehung und bezeichnen zu diesem Zwecke mit T', T'', T''' die drei benachbarten, zu P_1 vereinigten Punkte, welche C und K gemeinschaftlich sind; dasselbe Resultat, welches sich im Falle f_2) ergab, wenn der variable Punkt T mit T' zusammenfiel, wiederholt sich hier nochmals, wenn T die Lage T'' annimmt; demnach sind in der gemeinsamen Tangente in P_1 zwei Paare entsprechender Tangenten von C und $\mathfrak{C}$ coincidirend, sie sondert sich, weil doppelt gezählt, als Ort zweiter Ordnung von dem Orte vierter Ordnung ab, so dass der übrige Teil des Ortes des Schnittpunktes von t und $\mathfrak{t}$ eine Kegelschnittslinie ist. In der Seitenfläche des Fundamentaltetraeders, welche dem Scheitel des einzigen eigentlichen doppelt umschriebenen Kegels conjugirt ist, besitzt also die Tangentenfläche von T^4 einen Doppelkegelschnitt. Ihr Durchschnitt mit der Ebene P setzt sich aus diesem und der abgesonderten Geraden zusammen, da letztere eine Tangente der Curve ist.

Für die orthogonale Symmetrie von T^4 gibt es im gegenwärtigen Falle nur eine Bedingung: K muss ein Hauptkreis der Kugel sein.

Es ist leicht, die Entstehung der vorliegenden Form von T^4 aus jener mit dem Doppelpunkt als Knoten zu verfolgen; wenn in dem zweiten unter f_2) gedachten Falle einer der beiden Schnittpunkte von C und K dem Berührungspunkte P_1 beständig sich nähert, so zieht die eine Curvenschleife sich immer mehr zusammen und verschwindet im Augenblicke der Vereinigung jener Punkte; gleichzeitig fallen die beiden Tangenten im Curvenknoten in eine Gerade von P, nämlich in die Berührungstangente in P_1.

h) K sei ein doppelt berührender Kreis von C. Entweder wird C von K ein- oder ausgeschlossen, oder C schliesst den Kreis K ein. Im ersten Falle, der nur bei reeller Berührung eintreten kann, sind alle Tangenten von C Secanten von K — ausgenommen die beiden gemeinsamen —, mithin ist T^4 bis auf die beiden Berührungs-

punkte als Doppelpunkte imaginär. Im zweiten Falle kann die Berührung reell oder ideell sein; die Berührungspunkte P_1, P_1^* sind (reelle oder imaginäre) Doppelpunkte von T^4. Ihrer immer reellen Verbindungslinie kommt in Bezug auf C, K und $\mathfrak{C}$ derselbe Pol P^* zu, und alle drei Kegelschnitte haben unzählig viele gemeinsame Polardreiecke mit der gemeinschaftlichen Ecke P^* und Seite $\overline{P_1P_1^*}$; mithin gehören auch zu T^4 unzählig viele Fundamentaltetraeder mit dem gemeinsamen Eckenpaar P, P^*, Kantenpaar $\overline{PP^*}$, $P_1P_1^*$ und Ebenenpaar P, P*, die Curve besitzt ausser den beiden doppelt umschriebenen Kegeln aus P, P^* noch unzählig viele, deren Scheitel die Gerade $\overline{P_1P_1^*}$ erfüllen, d. h. sie zerfällt in zwei Kreise, deren Ebenen sich in der Verbindungslinie der Doppelpunkte schneiden. Auf dieses Ebenenpaar und seine zweifach zu zählende Schnittlinie reducirt sich auch die Tangentenfläche, resp. ihr Selbstdurchschnitt.

Hieraus geht hervor, dass „durch zwei Kreise K_1, K_2 einer „Kugel zwei Kegel zweiter Ordnung hindurchgehen; ihre Scheitel „P, P^* liegen in der reciproken Polare der Schnittlinie der Kreis-„ebenen". Ist die Berührung zwischen C und K reell, so schneiden sich die Kreise K_1, K_2 in reellen Punkten, und die zugehörigen Kegelscheitel liegen ausserhalb der Kugel; bei ideeller Berührung sind die Schnittpunkte der Kreise imaginär, und von den Kegelscheiteln liegt der eine innerhalb, der andere ausserhalb der Kugel. Wenn K ein grösster Kreis der Kugel ist, oder wenn K den Kegelschnitt (die Ellipse) C in den Scheitelpunkten (der kleinen Axe) berührt, so verwandelt sich einer der Kegel in einen Cylinder, und trifft beides zu, so gehen beide Kegel in zu einander normale Cylinder über.

i) K osculire C in einem Scheitel (vierpunktige Berührung). Da dieser Fall aus dem der doppelten reellen Berührung dadurch hervorgeht, dass die Berührungspunkte P_1, P_1^* einander näher rückend schliesslich zusammenfallen und mit dem Pol P^* ihrer Verbindungslinie sich vereinigen, so ändert sich das dort gefundene Resultat nur insoweit, als die Kreise, in welche T^4 zerfällt, sich nun berühren. Von den eigentlichen doppelt umschriebenen Kegeln bleibt nur einer übrig, der aus P, während der Kegel aus P^*, der in ein Ebenenpaar degenerirt, als doppelt projicirend nur im uneigentlichen Sinne bezeichnet werden könnte, da jede seiner Kanten drei Punkte des Gesamtdurchschnitts (wovon zwei jedesmal im Scheitel zusammenfallen) enthält. „Durch zwei einander berührende Kreise einer Kugel „geht also nur ein Kegel zweiter Ordnung; sein Scheitel liegt in „der reciproken Polare der gemeinsamen Tangente." Ist K ein Hauptkreis der Kugel, so verwandelt sich der Kegel in einen Cylinder.

III. Die Ebene P berührt die Kugel. Der Berührungspunkt ist ihr Pol P und als solcher Scheitel desjenigen Kegels, dessen Durchschnitt mit der Kugel die Curve T^4 ist. Da nun jede in P durch P gezogene Gerade hier mit der Kugel sowol als mit dem Kegel zwei zusammenfallende Punkte gemein hat, so ist P ein Doppelpunkt von T^4. Je nach der Lage von P gegen C sind folgende Fälle zu unterscheiden.

a) P liegt ausserhalb C. Die reciproken Polaren der beiden durch ihn an C geführten Tangenten berühren die Kugel und T^4 in P, der Doppelpunkt ist ein Knotenpunkt der Curve. Das Tripel conjugirter Strahlen, welches P (als Nullkreis) und C gemeinsam ist, besteht aus der Polare p des Punktes P und aus den Axen der Strahleninvolution in P, beides auf C bezogen; die in p liegenden Ecken dieses Dreiseites sind die Scheitel der eigentlichen T^4 doppelt umschriebenen Kegel zweiter Ordnung, und da eine ausserhalb, die andere innerhalb C liegt, so schneidet eine der zugehörigen Seitenebenen des Fundamentaltetraeders die Curve ausser im Doppelpunkt in zwei reellen, die andere in zwei imaginären Punkten, den vier Punkten stationärer Osculationsebenen. Gehört P einer Axe von C an, so wird T^4 orthogonal symmetrisch in Bezug auf eine Diametralebene der Kugel, und ist C eine Hyperbel und P ihr Mittelpunkt, so besteht orthogonale Symmetrie in Bezug auf zwei zu einander senkrechte Diametralebenen.

b) P liegt innerhalb C. Sowie die Tangenten aus P an C, so werden jetzt auch die Tangenten von T^4 in P imaginär, P ist also ein isolirter Doppelpunkt der Curve. Bezüglich der doppelt umschriebenen Kegel besteht dem vorigen Falle gegenüber der Unterschied, dass nun die Scheitel beider ausserhalb C liegen, woraus weiter folgt, dass jetzt alle vier stationären Osculationsebenen reell sind. Für einfache Orthogonalsymmetrie gilt dieselbe Bedingung, wie unter a); soll zweifache Symmetrie auftreten, so muss C eine Ellipse und P ihr Mittelpunkt sein.

Ein besonderer Fall ergibt sich, wenn P mit einem Brennpunkte von C zusammenfällt. Da unter dieser Voraussetzung das Strahlensystem in P in Bezug auf C ein rechtwinkliges ist, so haben P und C unzählig viele Polardreiecke gemeinsam, welchen P als Ecke und die zugehörige Directrix von C als Seite gemeinschaftlich ist; aus allen Punkten der letzteren wird also T^4 durch Kegel zweiter Ordnung projicirt, d. h. die Curve zerfällt in zwei Plancurven, deren Ebenen sich in jener Directrix schneiden; die eine dieser Ebenen ist P selbst und bestimmt mit der Kugel den Doppelpunkt (Nullkreis), die andere einen Kreis. Alle T^4 doppelt umschriebenen Kegel dege-

neriren im vorliegenden Falle in ein Ebenenpaar, als eigentlicher Kegel zweiter Ordnung verbleibt nur der (dreifach projicirende) aus P. — Der Zusammenhang dieses Sonderfalles mit dem Falle II. h) erhellt aus der Bemerkung, dass die Brennpunkte eines Kegelschnitts die kleinsten unter den reellen Kreisen sind, welche ihn doppelt (ideell) berühren.

c) P liegt in C. Die beiden durch P an C gehenden und ebenso die beiden Tangenten von T^4 im Doppelpunkte fallen in eine zusammen, letzterer erscheint dadurch als Rückkehrpunkt charakterisirt. Von dem Polardreieck, welches P als Nullkreis und C gemeinsam ist, sind zwei Ecken und Seiten in P, resp. in der zugehörigen Tangente von C vereinigt; dritte Seite ist die Normale von C in P, dritte Ecke ihr Pol in Bezug auf C; nur aus letzterem Punkte wird T^4 durch einen Kegel zweiter Ordnung doppelt projicirt, und die ihm conjugirte Seitenebene des Fundamentaltetraeders hat mit der Curve ausser dem stationären und den ihm unendlich nahen Punkte als vierten den Punkt der einzigen stationären Osculationsebene gemein. Die Curve wird in Bezug auf diese letztgenannte Ebene orthogonal symmetrisch, wenn P in einen Scheitel von C fällt.

Hiermit sind alle Beziehungen zwischen dem Polarkegelschnitt C und der Kugel erschöpft; es bleibt nur übrig, die weiter gewonnenen Resultate zusammenzufassen.

„Die sphärische Curve vierter Ordnung kann, so lange sie nicht „in niedere Curven zerfällt, einen Doppelpunkt oder einen Rückkehr„punkt besitzen. — In dem Polartetraeder der Curve mit Doppelpunkt „fallen zwei Ecken und Ebenen mit dem Doppelpunkt, resp. mit der „zugehörigen Tangentialebene der Kugel zusammen; aus den beiden „andern Ecken wird die Curve durch Kegel zweiter Ordnung doppelt „projicirt, und in den diesen Ecken conjugirten Seitenebenen besitzt „ihre Tangentenfläche Doppelcurven dritter Ordnung; der Doppel„punkt selbst ist Scheitel eines die Curve dreifach projicirenden „Kegels zweiter Ordnung; stationäre Schmiegungsebenen sind in der „Anzahl vier vorhanden, davon nur zwei reell, wenn der Doppelpunkt „ein Knotenpunkt, und alle vier, wenn er isolirt ist. — In dem „Polartetraeder der Curve mit stationärem Punkt fallen drei Ecken „und Ebenen mit dem Rückkehrpunkt, resp. mit der zugehörigen „Tangentialebene der Kugel zusammen; aus der vierten Ecke wird die „Curve durch einen Kegel zweiter Ordnung doppelt projicirt und in „der ihr conjugirten Seitenebene besitzt ihre Tangentenfläche einen „Doppelkegelschnitt; der stationäre Punkt selbst ist Scheitel eines „die Curve dreifach projicirenden Kegels zweiter Ordnung; die Zahl „der stationären Osculationsebenen beträgt eins."

An der Curve mit einem Knotenpunkt sind die beiden in II. f_2) unterschiedenen Fälle mit dem Falle III. a) vereinigt; an der Curve mit isolirtem Doppelpunkt erscheint der Fall II. f_3) zweimal verbunden mit III. b); an der Curve mit Rückkehrpunkt ist II. g) mit III. c) combinirt.

„Mit dem Auftreten von zwei Doppelpunkten zerfällt die Curve „in zwei Kreise. So lange die Doppelpunkte imaginär oder reell „und verschieden sind, gibt es zwei Kegel zweiter Ordnung, welche „durch beide Kreise gehen; sind sie reell und zusammenfallend, so „verschwindet einer der beiden Kegel; in dem Falle endlich, wo „einer der Kreise sich auf einen Punkt zusammenzieht und welcher „sowol als specielle Form der Curve mit isolirtem Doppelpunkt als „der Curve mit zwei imaginären Doppelpunkten angesehen werden „kann, verschwinden beide Kegel" (in dem einen) „oder sie fallen zusammen" (in dem andern Sinne).

Bei zwei Kreisen mit reellen Schnittpunkten tritt der Fall II. h) (reelle Berührung) zweimal auf; bei zwei Kreisen mit imaginären Schnittpunkten ist der Fall II. h) (ideelle Berührung) mit dem letzten Sonderfall von I. verbunden; zwei Kreisen endlich, wovon der eine ein Nullkreis, entspricht der Sonderfall von III. b).

VII.

Dichte der Sehnen von Flächen und ebenen Curven.

Von

R. Hoppe.

---

§ 1. Dichte der Sehnen einer Fläche in einem Punkte.

Nimmt man an, dass von allen gleich grossen Stücken einer Fläche gleichviel Gerade nach irgend einem Punkte gehen, so wird die Menge der Sehnen, welche zwei Flächenstücke verbinden, durch das Product der Flächenstücke gemessen und sei demselben überall gleich gesetzt.

Sei F eine geschlossene convexe Fläche, (F) und $(F)_0$ zwei unendlich kleine Stücke derselben, O ein Punkt im Innern von F und Mittelpunkt einer Kugel K vom unendlich kleinen Radius ε. Mögen ferner (F) und $(F)_0$ in der gegenseitigen Beziehung stehen, dass alle Sehnen zwischen beiden durch K gehen. Dann ist die Menge der durch K gehenden Sehnen $= (F)(F)_0$. Dieses Product hat die Aequatorfläche von K, das ist $2R\varepsilon^2$, zum Factor. Dividirt man es durch denselben, so drückt der Grenzwert des Quotienten bei verschwindendem ε die Grösse aus, welche wir **Dichte der Sehnen** im Punkte O nennen, unter Beschränkung der Fläche auf die zwei Stücke.

Ist nun $(F) = \partial^2 F$ ein Flächenelement, und man integrirt den Ausdruck über die ganze Fläche, so erhält man die doppelte Dichte in O ohne Beschränkung

$$2D = \iint \partial^2 F \lim \frac{(F)_0}{2R\varepsilon^2} \qquad (1)$$

doppelt, sofern jede Sehne zweimal mit vertauschten Enden auftritt.

Sei O Anfang der xyz und für positive ϱ

$$x = \varrho\cos\vartheta\cos\varphi;\quad y = \varrho\cos\vartheta\sin\varphi;\quad z = \sin\vartheta \qquad (2)$$

dann hat die Polargleichung von F die Form

$$\varrho = \varrho(\vartheta,\ \varphi)$$

Gegenpunkte auf F mögen die Endpunkte einer Sehne heissen, die durch O geht. Man erhält den Gegenpunkt P_0 des Punktes P, dessen Coordinaten (2) sind, durch Substitution von $-\vartheta$ für ϑ und $\varphi+2R$ für φ. Setzt man also

$$\varrho_0 = \varrho(-\vartheta,\ \varphi+2R)$$

so werden die Coordinaten von P_0

$$x_0 = -\varrho_0\cos\vartheta\cos\varphi;\quad y_0 = -\varrho_0\cos\vartheta\sin\varphi;\quad z_0 = -\varrho_0\sin\vartheta$$

Beschreibt man einen Kegel, dessen Spitze in P, und der K berührt, so begrenzt dieser auf F das Stück $(F)_0$ entsprechend dem Punkte P. Lässt man den Kegel von zwei zu PP_0 in O und P_0 normalen Ebenen schneiden, so ist erstere Schnittfläche (mit Vernachlässigung Unendlichkleiner höherer Ordnung) $= 2R\varepsilon^2$, daher letzterer

$$= 2R\varepsilon^2\left(\frac{\varrho+\varrho_0}{\varrho}\right)^2$$

Dieser ist als Projection von $(F)_0$

$$= (F)_0\cos\omega_0$$

wo ω_0 den Winkel zwischen der Sehne und der Flächennormale bezeichnet. Führt man den hieraus fliessenden Wert von $(F)_0$ in Gl. (1) ein, so kommt:

$$2D = \int\int\left(\frac{\varrho+\varrho_0}{\varrho}\right)^2\frac{\partial^2 F}{\cos\omega_0}$$

Bezeichnen p, q, r die Richtungscosinus der Flächennormale in P, so ist

$$pt = \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial\vartheta} & \frac{\partial y}{\partial\varphi} \\ \frac{\partial z}{\partial\vartheta} & \frac{\partial z}{\partial\varphi} \end{vmatrix};\quad qt = \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial\vartheta} & \frac{\partial z}{\partial\varphi} \\ \frac{\partial x}{\partial\vartheta} & \frac{\partial x}{\partial\varphi} \end{vmatrix};\quad rt = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial\vartheta} & \frac{\partial x}{\partial\varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial\vartheta} & \frac{\partial y}{\partial\varphi} \end{vmatrix}$$

Die Quadratsumme gibt:

$$\begin{aligned} t^2 &= \left\{\left(\frac{\partial x}{\partial\vartheta}\right)^2+\ldots\right\}\left\{\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)^2+\ldots\right\}-\left(\frac{\partial x}{\partial\vartheta}\frac{\partial x}{\partial\varphi}+\ldots\right)^2 \\ &= \left\{\varrho^2+\left(\frac{\partial\varrho}{\partial\vartheta}\right)^2\right\}\left\{\varrho^2\cos^2\vartheta+\left(\frac{\partial\varrho}{\partial\varphi}\right)^2\right\}-\left(\frac{\partial\varrho}{\partial\vartheta}\frac{\partial\varrho}{\partial\varphi}\right)^2 \\ &= \varrho^2\cos^2\vartheta\left\{\varrho^2+\left(\frac{\partial\varrho}{\partial\vartheta}\right)^2+\left(\frac{\partial\varrho}{\partial\varphi\cos\vartheta}\right)^2\right\} \end{aligned} \qquad (3)$$

Ferner ist in P

$$\cos\omega = \frac{px+qy+rz}{\varrho} = \frac{1}{\varrho t}\begin{vmatrix} x & \frac{\partial x}{\partial\vartheta} & \frac{\partial x}{\partial\varphi} \\ y & \frac{\partial y}{\partial\vartheta} & \frac{\partial y}{\partial\varphi} \\ z & \frac{\partial z}{\partial\vartheta} & \frac{\partial z}{\partial\varphi} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{\varrho^2}{t}\begin{vmatrix} \cos\vartheta\cos\varphi & -\sin\vartheta\cos\varphi & -\cos\vartheta\sin\varphi \\ \cos\vartheta\sin\varphi & -\sin\vartheta\sin\varphi & \cos\vartheta\cos\varphi \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{\varrho^2}{t}\cos\vartheta \tag{4}$$

Macht man von beiden Resultaten Anwendung auf P_0, so ist nur t_0 für t und ϱ_0 für ϱ zu schreiben. Bekanntlich ist

$$\partial^2 F = t\,\partial\vartheta\,\partial\varphi$$

und zwar müssen hier, wo O ein innerer Punkt ist, ϑ und φ alle Richtungen durchlaufen, d. h. φ von 0 bis 4R, ϑ von $-$R bis R variiren. Nach Einsetzung der erhaltenen Werte findet man:

$$D = \tfrac{1}{2}\int\int\left(\frac{\varrho+\varrho_0}{\varrho\varrho_0}\right)^2 \frac{tt_0\,\partial\vartheta\,\partial\varphi}{\cos\vartheta} \tag{5}$$

oder

$$D = \tfrac{1}{2}\int_{-R}^{R}\cos\vartheta\,\partial\vartheta\int_0^{4R}\frac{(\varrho+\varrho_0)^2}{\varrho\varrho_0}\partial\varphi\sqrt{\varrho^2+\left(\frac{\partial\varrho}{\partial\vartheta}\right)^2+\left(\frac{\partial\varrho}{\partial\varphi\cos\vartheta}\right)^2}$$
$$\times\sqrt{\varrho_0^2+\left(\frac{\partial\varrho_0}{\partial\vartheta}\right)^2+\left(\frac{\partial\varrho_0}{\partial\varphi\cos\vartheta}\right)^2} \tag{6}$$

§. 2. Dichte der Sehnen einer ebenen Curve in einem Punkte.

Die vorstehende Untersuchung ändert sich nur wenig, wenn an die Stelle der Fläche F die geschlossene convexe ebene Curve S tritt, welche den Punkt O, Mittelpunkt des Kreises K vom Radius ε und Anfang der xy, umschliesst. Sei für den Curvenpunkt P

$$x = \varrho\cos\varphi;\quad y = \varrho\sin\varphi$$

und die Polargleichung der Curve

$$\varrho = \varrho(\varphi)$$

mithin die Coordinaten des Gegenpunkts P_0

$$x_0 = -\varrho_0 \cos\varphi; \quad y_0 = -\varrho_0 \sin\varphi$$
$$\varrho_0 = \varrho(\varphi + 2R)$$

Die zwei Tangenten von P aus an K begrenzen auf S das St
$(S)_0$, d. i. den Bezirk aller in P beginnenden durch K gehen
Sehnen. Zwei Normalen zu PP_0 durch O und P_0 von einer Tang
bis zur andern gezogen haben die Werte

$$2\varepsilon, \quad 2\varepsilon\frac{\varrho+\varrho_0}{\varrho}$$

Letztere ist als Projection von $(S)_0$

$$= (S)_0 \cos\omega_0$$

wo ω_0 den Winkel zwischen der Sehne PP_0 und der Normale
S in P_0 bezeichnet.

Die Sehnenmenge ist durch den Durchmesser 2ε von K zu
diren; dann wird die doppelte Dichte in O

$$2D = \int \partial S \frac{(S)_0}{2\varepsilon} = \int \frac{\varrho+\varrho_0}{\varrho}\frac{\partial S}{\cos\omega_0}$$

Im Punkte P ist

$$\cos\omega = \frac{x}{\varrho}\frac{\partial y}{\partial S} - \frac{y}{\varrho}\frac{\partial x}{\partial S} = \frac{\varrho\,\partial\varphi}{\partial S}$$
$$\partial S^2 = \partial\varrho^2 + \varrho^2\partial\varphi^2$$

also

$$\cos\omega_0 = \frac{\varrho_0}{\sqrt{\varrho_0^2 + \left(\frac{\partial\varrho_0}{\partial\varphi}\right)^2}}$$

Dies in Gl. (7) eingeführt gibt:

$$D = \tfrac{1}{2}\int_0^{4R} \frac{\varrho+\varrho_0}{\varrho\varrho_0}\partial\varphi \sqrt{\varrho^2 + \left(\frac{\partial\varrho}{\partial\varphi}\right)^2}\sqrt{\varrho_0^2 + \left(\frac{\partial\varrho_0}{\partial\varphi}\right)^2}$$

§. 3. Anwendung auf die Kugel.

Sei F eine Kugel vom Radius 1. Die zAxe können wir d
ihren Mittelpunkt legen, so dass dessen Coordinaten 0, 0, $-h$ s
Dann ist die Gleichung der Kugel:

$$x^2 + y^2 + (z+h)^2 = 1 \quad \text{oder}$$
$$\varrho^2 + 2h\varrho\sin\vartheta + h^2 = 1$$

woraus:

$$\varrho + h\sin\vartheta = \pm\sqrt{1 - h^2\cos^2\vartheta}$$
$$(\varrho + h\sin\vartheta)\frac{\partial\varrho}{\partial\vartheta} = -h\varrho\cos\vartheta$$

$$\frac{\partial \varrho}{\partial \vartheta} = \mp \frac{h\varrho \cos \vartheta}{\sqrt{1-h^2\cos^2\vartheta}}; \qquad \frac{\partial \varrho}{\partial \varphi} = 0$$

$$\varrho^2 + \left(\frac{\partial \varrho}{\partial \vartheta}\right)^2 = \frac{\varrho^2}{1-h^2\cos^2\vartheta}$$

$$\varrho + \varrho_0 = \pm 2\sqrt{1-h^2\cos^2\vartheta}$$

Dies in Gl. (6) eingeführt gibt:

$$D = \tfrac{1}{2}\int_{-R}^{R} \cos\vartheta\, \partial\vartheta \int_{0}^{4R} \frac{4(1-h^2\cos^2\vartheta)}{\varrho\varrho_0} \frac{\varrho}{\sqrt{1-h^2\cos^2\vartheta}} \frac{\varrho_0 \partial\varphi}{\sqrt{1-h^2\cos^2\vartheta}}$$

$$= 2\int_{-R}^{R} \cos\vartheta\, \partial\vartheta \int_{0}^{4R} \partial\varphi = 16\,R \tag{9}$$

Die Dichte der Sehnen einer Kugel ist also in allen innern Punkten dieselbe.

§. 4. Anwendung auf den Kreis.

Die Polargleichung des Kreises, dessen Mittelpunkt die Coordinaten $x = 0$, $y = -h$ hat, ist

$$\varrho^2 + 2h\varrho\sin\varphi + h^2 = 1$$

Hieraus folgen, wie bei der Kugel, die Werte:

$$\varrho + \varrho_0 = 2\sqrt{1-h^2\cos^2\varphi}; \quad \varrho^2 + \left(\frac{\partial\varrho}{\partial\varphi}\right)^2 = \frac{\varrho^2}{1-h^2\cos^2\varphi}$$

und man erhält nach deren Einsetzung in Gl. (8):

$$D = \tfrac{1}{2}\int_{0}^{4R} \frac{2\sqrt{1-h^2\cos^2\varphi}}{\varrho\varrho_0} \frac{\varrho}{\sqrt{1-h^2\cos^2\varphi}} \frac{\varrho_0\partial\varphi}{\sqrt{1-h^2\cos^2\varphi}}$$

$$= \int_{0}^{4R} \frac{\partial\varphi}{\sqrt{1-h^2\cos^2\varphi}} = 4K(h) \tag{10}$$

d. i. gleich der ganzen Periodenlänge der elliptischen Functionen für den Modul h.

Liegt O auf dem Kreise selbst, so ist $h = 1$ und D logarithmisch unendlich. Liegt O im Mittelpunkte, ist also $h = 0$, so ist D gleich dem ganzen Kreise.

Zwischen der Kugel und dem Kreise findet demnach der bemerkenswerte Unterschied statt, dass die Sehnendichte innerhalb ersterer

constant ist, innerhalb des letztern vom Mittelpunkt nach dem Kreise hin beständig und ins unendliche wächst.

§. 5. Secantendichte in einem äussern Punkte.

Ist O ein äusserer Punkt, so hat nur ϱ_0 die umgekehrte Lage, in den Formeln (6) (8) tritt also $\varrho - \varrho_0$ an die Stelle von $\varrho + \varrho_0$, doch ist in beiden Fällen die Länge der Sehne dafür zu setzen. Allein dies hat die weitere Folge, dass der Radiusvector dieselben Richtungen (ϑ, φ) zweimal durchläuft, erst für $\varrho > \varrho_0$, dann für $\varrho < \varrho_0$, dass sich demgemäss die Fläche F durch eine Linie $\varrho = \varrho_0$ oder die Curve S durch 2 Punkte $\varrho = \varrho_0$ in 2 Teile teilt, deren jeder für sich die den Secanten entsprechenden ϑ und φ vollständig ergibt. Hiernach bestimmt die Gleichung $\varrho = \varrho_0$ eine Grenze der Integrale nach ϑ und φ, und zwar genügt es dieselbe nur von der einen Seite $(\varrho > \varrho_0)$ aus zu erreichen, damit die Integrale (6) (8) das einfache D darstellen.

Um eine einheitliche Form der Integrale zu gewinnen, braucht man nur eine Secante zur z Axe in §. 1., resp. zur y Axe in §. 2. zu nehmen, erst nach ϑ von $-R$ bis ϑ, (bestimmt durch $\varrho = \varrho_0$), dann nach φ von 0 bis 4R in §. 1, resp. nach φ von einem Werte $\varrho = \varrho_0$ bis zum andern im §. 2. zu integriren.

Für eine Kugel wird $\varrho = \varrho_0$, wenn $\sqrt{1 - h^2 \cos^2 \vartheta} = 0$ ist, daher hat man:

$$\cos \vartheta_1 = \frac{1}{h}; \quad \sin \vartheta_1 = -\sqrt{1 - \frac{1}{h^2}}$$

$$D = 4 \int_{-R}^{\vartheta_1} \cos \vartheta \, \partial \vartheta \int_0^{4R} \partial \varphi = 16 R \left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{h^2}}\right)$$

Dies geht stetig in den Wert 16R für innern Punkt über, wenn h bis 1 abnimmt, nimmt aber beständig ab und verschwindet, wenn h ins unendliche wächst.

Für einen Kreis wird $\varrho = \varrho_0$, wenn $\sqrt{1 - h^2 \cos^2 \varphi} = 0$ ist. Setzt man den einen genügenden Wert $\varphi = R - \varphi_1$, so wird der andre $\varphi = R + \varphi_1$, und man hat:

$$\sin \varphi_1 = \frac{1}{h}$$

$$D = 2 \int_{R-\varphi_1}^{R+\varphi_1} \frac{\partial \varphi}{\sqrt{1 - h^2 \cos^2 \varphi}} = 2 \int_{-\varphi_1}^{\varphi_1} \frac{\partial \varphi}{\sqrt{1 - h^2 \sin^2 \varphi}}$$

$$= 4 \int_0^{\varphi_1} \frac{\partial \varphi}{\sqrt{1 - h^2 \sin^2 \varphi}}$$

oder, wenn $k \sin\varphi = \sin\psi$:

$$D = \frac{4}{k} \int_0^1 \frac{\partial \sin\psi}{\cos\psi \cos\varphi} = \frac{4}{k} K\left(\frac{1}{k}\right) \tag{11}$$

D geht also bei Annäherung von k an 1 in $\log\infty$ über und verschwindet, wenn k unendlich wird.

Ueberdies ist bei Vergleichung mit Gl. (10) die Relation bemerkenswert:

$$D\left(\frac{1}{k}\right) = kD(k) \tag{12}$$

gültig für jedes k, oder in Worten:

„Stehen die Entfernungen zweier Punkte vom Mittelpunkte eines „Kreises in reciprokem Verhältniss zu dessen Radius, so verhält sich „die Sehnen-(Secanten-)Dichte im einen zur Secanten-(Sehnen-)Dichte „im andern wie der Radius zu der erstern Entfernung."

Oder noch kürzer:

„Das Product der Sehnendichte und der Quadratwurzel aus dem „Abstande vom Mittelpunkte ist zwei reciprok liegenden Punkten „gemeinsam."

§. 6. Sehnendurchgangsraum in ellipsoidaler Gestalt.

Zur Ermittelung der Sehnendichte in einem Punkte haben wir statt desselben eine Kugel betrachtet und diese in den Punkt zusammenschwinden lassen. Man kann nun fragen, ob das Resultat dadurch verändert wird, wenn man einen andern Körper in jenen Punkt zusamenschwinden lässt.

Wir wollen uns auf Untersuchung des Falles beschränken, wo statt der Kugel K das Ellipsoid

$$\left(\frac{\xi_1}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{\eta_1}{\beta}\right)^2 + \left(\frac{\zeta_1}{\gamma}\right)^2 = 1 \tag{13}$$

den Raum begrenzt, durch welchen alle Sehnen gehen müssen.

Sei O Mittelpunkt jenes Ellipsoids E und Anfang der Coordinaten xyz, $\xi\eta\zeta$ und $\xi_1\eta_1\zeta_1$, die Axen von E zugleich Axen der xyz und $\xi_1\eta_1\zeta_1$, die Sehne POP_0 Axe der ζ bei der Beziehung der Systeme, dass

$$\left.\begin{aligned} \xi_1 &= a_1\xi + a_2\eta + a\zeta \\ \eta_1 &= b_1\xi + b_2\eta + b\zeta \\ \zeta_1 &= c_1\xi + c_2\eta + c\zeta \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

ist, und zwar liege der Punkt P mit den Coordinaten xyz auf der Fläche F, während $(\xi\eta\zeta)$ und $(\xi_1\eta_1\zeta_1)$ denselben variabeln Punkt nahe bei O bezeichnen.

Die nächste und bis zum Ziele führende Aufgabe ist es nun, den Flächeninhalt des Schnittes einer normal zu OP durch O gehenden Ebene mit dem Kegel zu berechnen, der seine Spitze in P hat und E längs einer geschlossenen Linie berührt. Statt des Kegels kann man ohne Einfluss übenden Fehler auch einen berührenden Cylinder von der Axenrichtung OP setzen.

Eine Parallele mit OP

$$\xi = \text{const}, \quad \eta = \text{const}$$

schneidet E in 2 Punkten bestimmt durch die Gleichung

$$A + 2B\zeta + C\zeta^2 = 0 \tag{15}$$

in welche Gl. (13) übergeht, wenn man sie nach Substitution der Werte (14) nach Potenzen von ζ ordnet, und zwar ist

$$A = \frac{(a_1\xi + a_2\eta)^2}{\alpha^2} + \ldots - 1; \quad B = a\frac{a_1\xi + a_2\eta}{\alpha^2} + \ldots; \quad C = \frac{a^2}{\alpha^2} + \ldots$$

Die Gerade berührt E, wenn die 2 Wurzeln der Gl. (15) zusammenfallen, wenn also

$$B^2 - AC = 0$$

ist. Dies gibt:

$$\left(\frac{a_2\xi - a_1\eta}{\beta\gamma}\right)^2 + \ldots = C \tag{16}$$

Der Abstand der so bestimmten Parallele von O, d. i. $\sqrt{\xi^2+\eta^2}$, ist ein Maximum oder Minimum, wenn zugleich

$$\xi\partial\xi + \eta\partial\eta = 0$$

und nach Gl. (16)

$$\frac{a_2\xi - a_1\eta}{\beta\gamma}\,\frac{a_2\partial\xi - a_1\partial\eta}{\beta\gamma} + \ldots = 0$$

ist, woraus durch Elimination von $\partial\xi$, $\partial\eta$:

$$\frac{a_2\xi - a_1\eta}{\beta\gamma}\,\frac{a_1\xi + a_2\eta}{\beta\gamma} + \ldots = 0 \tag{17}$$

Setzt man zur Abkürzung

$$L = \alpha^2 a_1^2 + \ldots; \quad M = \alpha^2 a_1 a_2 + \ldots; \quad N = \alpha^2 a_2^2 + \ldots$$
$$G = L + N; \quad H = -L + N; \quad R = H^2 + 4M^2$$

so lautet Gl. (17) entwickelt:

$$M(\xi^2 - \eta^2) + H\xi\eta = 0$$

woraus;

$$\frac{\eta}{\xi} = \frac{H \pm \sqrt{R}}{2M} \tag{18}$$

$$\frac{\xi^2+\eta^2}{\xi^2} = \frac{\sqrt{R}\pm H}{2M^2}\sqrt{R} \tag{19}$$

Entsprechen dem grössten $\xi^2+\eta^2$ die Werte $\xi'\eta'$, dem kleinsten $\xi''\eta''$, so ist der Flächeninhalt der Basis des Cylinders

$$Q = 2R\sqrt{\xi'^2+\eta'^2}\sqrt{\xi''^2+\eta''^2}$$

das ist nach Gl. (19)

$$Q = 2R\xi'\xi''\frac{\sqrt{R}}{2M^2}\sqrt{R-H^2} = \frac{2R\xi'\xi''R}{M} \tag{20}$$

Die ξ werden durch Gl. (16) bestimmt, welche entwickelt lautet:

$$N\xi^2 - 2M\xi\eta + L\eta^2 = C\alpha^2\beta^2\gamma^2$$

Eliminirt man η mittelst Gl. (18), so erhält man nach einigen Transformationen:

$$\xi^2(G\mp\sqrt{R})(\sqrt{R}\pm H)\frac{\sqrt{R}}{4M^2} = C\alpha^2\beta^2\gamma^2$$

Multiplicirt man diese 2 Gleichungen, welche dem obigen Maximum und Minimum entsprechen, so kommt:

$$(\xi'\xi'')^2\frac{G^2-R}{4M^2}R = (C^2\alpha^2\beta^2\gamma^2)^2$$

Hiernach und nach (20) wird

$$Q = \frac{4RC\alpha^2\beta^2\gamma^2}{\sqrt{G^2-R}} \tag{21}$$

Nun findet man:

$$G^2-R = 4(LN-M^2) = 4\begin{vmatrix} \alpha^2a_1^2+\ldots & \alpha^2a_1a_2+\ldots \\ \alpha^2a_1a_2+\ldots & \alpha^2a_2^2+\ldots \end{vmatrix}$$

$$= 4\beta^2\gamma^2\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}^2+\ldots = 4\beta^2\gamma^2\alpha^2+\ldots = 4C^2\alpha^2\beta^2\gamma^2$$

so dass Gl. (21) sich reducirt auf

$$Q = 2R\alpha\beta\gamma\sqrt{C} = \tfrac{3}{4}E\sqrt{C}$$

Die geometrische Bedeutung von C findet man aus Gl. (15) für $\xi=\eta=0$, wo sie entsprechend der Geraden PP_0 lautet:

$$C\zeta^2 = 1$$

Hier ist 2ζ der Durchmesser von E, welcher in die Sehne PP_0 fällt. Bezeichnet man ihn mit δ. so wird

$$\sqrt{C} = \frac{2}{\delta}$$

$$Q = \frac{3}{2}\frac{E}{\delta}$$

Dieses Q tritt an die Stelle des Kugeläquators $2R\varepsilon^2$; von da an ist die ganze Rechnung wie bei der Kugel, die übrigen Factoren unter dem Integralzeichen in (5) sind unabhängig von der Gestalt des Sehnendurchgangsraums. Man hat also die aus P ausgehende Sehnenmenge durch Q zu dividiren, oder das Element des Integrals mit der centralen Durchgangslänge zu multipliciren, am Schlusse das Integral durch $\frac{3}{2}$ des Durchgangsraumes zu dividiren, um bei Anwendung des Ellipsoids die gleiche Sehnendichte zu finden wie bei der Kugel.

Es hat sich ergeben, dass ein andrer Wert der Sehnendichte beim Ellipsoid nicht resultirt, dass vielmehr nur ein allgemeineres und complicirtes Messungsgesetz zugrunde gelegt werden muss.

§. 7. Sehnendichte der Tetraederfläche.

Um von der Formel (1) auf das Tetraeder Anwendung zu machen, müssen zuerst die Seiten in solche Stücke geteilt werden, dass jeder Teil der einen Seite alle Punkte enthalt, deren Gegenpunkte einen Teil einer andern Seite ausfüllen. Diese Abgrenzung erhält man leicht auf folgende Weise.

Seien $A_1A_2A_3A_4$ die Eckpunkte eines Tetraeders, innerhalb dessen O liegt, ferner $B_1B_2B_3B_4$ die Gegenpunkte der Ecken A. Eine leichte Betrachtung zeigt, dass auf jedem Pare von Gegenkanten ein einziges Par Gegenpunkte liegt. So liegt auf der Kante A_2A_3 der Punkt C_{23}, auf der Gegenkante A_1A_4 der Gegenpunkt C_{14}. Analog seien die 4 übrigen Gegenpunkte bezeichnet.

Jetzt hat man im Dreieck $A_2A_3A_4$ die 4 Punkte

$A_2\ C_{23}\ B_1\ C_{24}$ mit den bezüglichen Gegenpunkten
$B_2\ C_{14}\ A_1\ C_{13}$

im Dreieck $A_1A_3A_4$. Wie leicht erhellt, sind dann die Vierecke $A_2C_{23}B_1C_{24}$ und $B_2C_{14}A_1C_{13}$ einander derart zugeordnete Bezirke, dass jeder Punkt des einen seinen Gegenpunkt im andern hat. Sie sind nämlich Schnitte zweier Scheitelpyramiden, deren Spitze O ist. Zieht man die Geraden B_1C_{34}, B_1C_{24}, B_1C_{23}, so teilen diese das Dreieck $A_2A_3A_4$ in 3 Vierecke, welche ihre zugeordneten Vierecke einzeln auf den 3 übrigen Tetraederseiten haben.

Es genügt nun ein solches zugeordnetes Par von Bezirken zu betrachten, und zwar wollen wir die Vierecke noch durch die Diagonalen B_1A_2 und B_2A_1 in Dreiecke teilen, und nur das Dreieckspar $B_1A_2C_{23}$, $B_2A_1C_{14}$ untersuchen.

Sei O Anfang der xyz und die Coordinaten der A, B, C mit den gleichen Indices, die der B ausserdem mit einem Strich x', y', z', die der C mit 2 Strichen x'', y'', z'' bezeichnet. Ferner sei in Determinanten, deren 3 Reihen sich auf x, y, z gleicherweise beziehen, nur die erste Reihe ausgeschrieben, und zur Abkürzung gesetzt:

$$a_1 = |\, x_2 x_3 x_4 \,|\,; \quad a_2 = |\, x_1 x_4 x_3 \,|\,; \quad a_3 = |\, x_4 x_1 x_2 \,|\,; \quad a_4 = |\, x_3 x_2 x_1 \,|$$

$$a = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$$

so dass identisch

$$a_1 W_1 + a_2 W_2 + a_3 W_3 + a_4 W_4 = \begin{vmatrix} W_1 & W_2 & W_3 & W_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ . & . & . & . \end{vmatrix} \tag{22}$$

ist. Aus den gegebenen A sind nun zuerst die B und C zu bestimmen. Man hat:

$$\frac{x_1'}{x_1} = \frac{y_1'}{y_1} = \frac{z_1'}{z_1} = \mu$$

daher, sofern B_1 in der Ebene $A_2A_3A_4$ liegt:

$$|\, x_3 - x_2 \;\; x_4 - x_2 \;\; \mu x_1 - x_2 \,| = 0$$

oder

$$\mu(a_2 + a_3 + a_4) - a_1 = 0$$

$$\mu = -\frac{a_1}{a - a_1}\,; \quad x_1' = -\frac{a_1 x_1}{a - a_1}\,; \quad \text{etc.}$$

Ferner ist

$$\frac{x_{14}''}{x_{23}''} = \frac{y_{14}''}{y_{23}''} = \frac{z_{14}''}{z_{23}''} = w$$

und sofern C_{23} auf A_2A_3, C_{14} auf A_1A_4 liegt,

$$\begin{aligned} x_{23}'' &= x_2 + (x_3 - x_2)\pi \\ x_{14}'' &= x_1 + (x_4 - x_1)\nu \end{aligned} \tag{23}$$

woraus:

$$x_1 + (x_4 - x_1)\nu = wx_2 + w(x_3 - x_2)\pi$$

Eliminirt man ν und w zwischen den 3 Analogen, so kommt:

$$|\, x_1 \;\; x_4 \;\; x_2 + (x_3 - x_2)\pi \,| = 0$$

oder

$$\pi = \frac{a_3}{a_2+a_3} \tag{24}$$

daher nach Gl. (23)

$$x_{23}'' = \frac{a_2x_2+a_3x_3}{a_2+a_3}$$

und nach Analogie

$$x_{14}'' = \frac{a_1x_1+a_4x_4}{a_1+a_4}$$

Beides durch einander dividirt gibt, mit Beachtung, dass nach Gl. (22) die Summe der Zähler $= 0$ ist:

$$w = -\frac{a_2+a_3}{a_1+a_4}$$

Sei jetzt P mit den Coordinaten xyz ein innerer Punkt des Dreiecks $B_1A_2C_{23}$, P_0 mit den Coordinaten $x_0y_0z_0$ der Gegenpunkt, welcher innerhalb $B_2A_1C_{14}$ liegen muss. Wir ziehen die Transversale B_1PQ, wo Q mit den Coordinaten $x'y'z'$ auf A_2A_3 liegt. Dann ist:

$$x' = x_2 + (x_3 - x_2)u$$
$$x = x_1' + (x' - x_1')v$$

woraus:

$$x = \mu x_1 + (x_2 - \mu x_1)v + (x_3 - x_2)uv \tag{25}$$

Damit das so bestimmte P das Dreieck $B_1A_2C_{23} = \Delta$ erzeugt, hat u von 0 bis π und v von 0 bis 1 zu variiren.

Zur Berechnung des Flächenelementes $t\,\partial u\,\partial v$ hat man:

$$t^2 = \left[\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \dots\right]\left[\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \dots\right] - \left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \dots\right)^2$$

und findet:

$$t = \sqrt{ln - m^2}\,v \tag{26}$$

wo

$$l = (x_2 - \mu x_1)^2 + \dots; \qquad n = (x_3 - x_2)^2 + \dots$$
$$m = (x_2 - \mu x_1)(x_3 - x_2) + \dots$$

gesetzt ist.

Der Gegenpunkt P_0 wird bestimmt durch

$$\frac{x_0}{x} = \frac{y_0}{y} = \frac{z_0}{z} = -\frac{\varrho_0}{\varrho} = -\lambda$$

$$\left| \begin{matrix} x_3 - x_1 & x_4 - x_1 & \lambda x + x_1 \end{matrix} \right| = 0 \tag{27}$$

Dies gibt:

$$\left| \begin{matrix} x_3 & x_4 & x_1 \end{matrix} \right| = -a_2 =$$
$$-\lambda \left| \begin{matrix} x_3 - x_1 & x_4 - x_1 & \mu x_1(1-v) + x_2(1-u)v + x_3uv \end{matrix} \right|$$
$$= \lambda\{a_2\mu(1-v) - (a-a_2)(1-u)v + a_2uv\}$$

$$\lambda = \frac{1}{\frac{a}{a_2}(1-u)v - \mu(1-v) - v}$$

Demnach ist die Sehnendichte

$$D = \Sigma \sqrt{ln - m^2} \int_0^1 v\,dv \int_0^\pi \frac{(1+\lambda)^2}{\cos w_0}\,\partial u$$

Die Richtungscosinus von PP_0 sind:

$$\frac{x}{\varrho}, \quad \frac{y}{\varrho}, \quad \frac{z}{\varrho}$$

die der Normale der Ebene $A_1A_3A_4$ sind constant und verhalten sich wie die Coefficienten von x_0, y_0, z_0 in der Gleichung

$$\left| \begin{matrix} x_3 - x_1 & x_4 - x_1 & x_0 - x_1 \end{matrix} \right| = 0$$

deren Quadratsumme

$$h^2 = [(x_3-x_1)^2 + \ldots][(x_4-x_1)^2 + \ldots] - [(x_3-x_1)(x_4-x_1) + \ldots]^2$$

ist. Daher hat man:

$$\cos w_0 = \frac{1}{\varrho h} \left| \begin{matrix} x_3 - x_1 & x_4 - v_1 & x \end{matrix} \right|$$

das ist nach Gl. (27)

$$\cos w_0 = \frac{a_2}{\varrho h \lambda}$$

und die Dichte der Sehnen der ganzen Tetraederfläche in O ist

$$D = \Sigma \frac{h}{a_2} \sqrt{ln - m^2} \int_0^1 v\,dv \int_0^\pi \varrho\lambda(1+\lambda)^2\,\partial u \tag{28}$$

Die Summe erstreckt sich über die 12 Pare zugeordneter Elementardreiecke der Oberfläche.

Hier ist

$$\varrho^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

Setzt man

$$s_k = x_k^2 + \ldots; \qquad s_{kh} = x_k x_h + \ldots$$

$$L_1 = s_1\mu^2 + 2(s_{12} - s_1\mu)\mu v + (s_2 - 2s_{12}\mu + s_1\mu^2)v^2$$
$$M_1 = s_{13} - s_{12} + (s_{23} - s_2 - s_{13} + s_{12})v$$
$$N_1 = s_2 - 2s_{23} + s_3$$

$$L = \frac{L_1 N_1 - M_1^2}{N_1^2}; \quad M = \frac{M_1}{N_1}; \quad N = \sqrt{N_1}$$

so wird

$$\varrho^2 = L_1 + 2M_1 uv + N_1 u^2 v^2 = N^2[(uv+M)^2 + L]$$

Sei nun

$$\varrho = N(\sigma - uv - M)$$

woraus

$$uv + M = \frac{\sigma^2 - L}{2\sigma}; \quad \partial u = \frac{\sigma^2 + L}{2\sigma^2 v}\partial\sigma; \quad \varrho = N\frac{\sigma^2+L}{2\sigma}$$

ferner

$$H = v + M + a_2 \frac{(\mu-1)v - \mu}{a}; \quad G^2 = L + H^2$$

dann wird

$$\lambda = \frac{2a_2}{a} \frac{\sigma}{G^2 - (\sigma - H)^2}$$

und Gl. (28) lautet nun:

$$D = \frac{1}{2a} \Sigma Nh \sqrt{ln - m^2} \int_0^1 \partial v \int_0^\pi \left\{1 + \frac{2a_2}{a} \frac{\sigma}{G^2 - (\sigma - H)^2}\right\}^2 \times \frac{\left(\sigma + \frac{L}{\sigma}\right)^2 \partial\sigma}{G^2 - (\sigma - H)^2}$$

Führt man die Integration nach σ aus, so erhält man:

$$D = \frac{1}{2a} \Sigma Nh \sqrt{ln - m^2} \int_0^1 \partial v \left[U + V \log\sigma + V_1 \log\frac{G - H + \sigma}{G + H - \sigma}\right]_0^\pi$$

wo U die rationale Function von σ

$$U = -\frac{\sigma^2 + L}{\sigma} + \frac{V_2 + V_3\sigma}{L + 2H\sigma - \sigma^2} + \frac{V_4 + V_5\sigma}{(L + 2H\sigma - \sigma^2)^2}$$

und die V folgende 6 rationale Functionen von v sind:

$$V = -2H + \frac{4a_2}{a}; \quad V_1 = 2G - \frac{4a_2}{a}\frac{H}{G} + \frac{a_2^2}{a^2}\frac{L}{G^3}$$

$$V_2 = \frac{2a_2}{a}\left(4L - \frac{L + 2G}{G^2}H\right); \quad V_3 = \frac{2a_2}{a}\left(4H - a_2\frac{G^2 + H^2}{G^2}\right)$$

$$V_4 = \frac{4a_2^2}{a^2}LH; \quad V_5 = \frac{4a_2^2}{a^2}(G^2 + H^2)$$

Die Grenzen von

$$\sigma = uv + M + \sqrt{(uv+M)^2 + L}$$

sind:

$$\sigma_0 = M + \sqrt{M^2+L}\,; \quad \sigma_1 = \pi v + M + \sqrt{(\pi u + M)^2 + L}$$

Beide irrationale Quadratwurzeln aus Functionen 2. Grades von v lassen sich einzeln rational machen, da sie in gesonderten Termen vorkommen. Daher besteht das unbestimmte Integral aus rationalen Functionen von v und je einer jener Quadratwurzeln, aus Logarithmen solcher und aus Functionen von der Form

$$\int \frac{\partial \tau}{\tau} \log(1 \pm \tau)$$

für welche Legendre Tafeln berechnet hat.

XI.

Die Polaren der algebraischen Curven.

Von

Rudolf Gaertner.

I. Die geraden Polaren.

§ 1. Legt man durch einen Pol eine Gerade und betrachtet den Pol als Nullpunkt derselben, so wird jeder Punkt der Polgeraden durch seine Polferne und deren positive oder negative Richtung bestimmt.

A. Ist ein Punkt der Polgeraden durch seine Polferne r_1 gegeben, während in Bezug auf denselben die Lage eines anderen Punktes bestimmt werden soll, so muss dessen Polferne g durch die gegebene Polferne r_1 ausgedrückt werden. Dies geschieht durch die Gleichung

$$\frac{g}{r_1} = k$$

worin k jede numerische Grösse zwischen 0 und $\pm\infty$ bedeutet. Wir sind gewohn die Gleichung

$$\frac{g}{r_1} = k$$

so zu deuten, dass k diejenige Zahl ist, welche angiebt wie oft r_1 in 6 enthalten ist und nennen diese Operation dividiren, d. h. teilen. Diese Teilung wird sich auf der Polgeraden durch die Abstände der Punkte sichtbar kennzeichnen.

Wir nennen

$$\frac{g}{r_1} = k$$

eine Teilung nach erster Ordnung.

Für die Betrachtung der Polaren ist die Bedingung

$$\frac{g}{r_1} = 1$$

von grosser Bedeutung. Wir nennen sie die Polarbedingung und geben ihr in Folgendem je nach Bedarf die Form

$$g = r_1 \quad \text{oder} \quad \frac{g}{r_1} = 1 \quad \text{oder} \quad \frac{g - r_1}{r_1} = 0$$

Die Polarbedingung lässt sich auf harmonische Teilung zurückführen. Nehmen wir an, der durch die Polferne r_1 gegebene Punkt sei aus zwei Punkten entstanden, welche von gleicher oder entgegengesetzter Richtung kommend aufeinander gefallen sind, so zeigte sich stets ein dem Pol conjugirter Punkt, so lange die beiden Punkte eine sichtbare Entfernung hatten. Im Moment des Zusammenfallens verschwindet auch der conjugirte Punkt in dem durch die Polferne r_1 gegebenen Punkte.

Es sei noch bemerkt, dass die Gleichung

$$\frac{g}{r_1} = 0 \quad \text{oder} \quad g = 0$$

den Pol bezeichnet.

B. Sind zwei Punkte der Polgeraden durch ihre Polfernen r_1 und r_2 gegeben, so kann die Lage eines dritten Punktes durch die Polfernen der beiden gegebenen Punkte bestimmt werden.

In Bezug auf den einen gegebenen Punkt besteht die Gleichung

$$\frac{g}{r_1} = k_1$$

in Bezug auf den anderen

$$\frac{g}{r_2} = k_2$$

durch Addition beider Gleichungen entsteht die Beziehung

$$\frac{g}{r_1} + \frac{g}{r_2} = k_1 + k_2$$

Es hindert nichts daran $k_1 + k_2 = k$ zu setzen, da wir $k_1 + k_2$ algebraisch addiren können. Es entsteht die Gleichung

$$\frac{g}{r_1} + \frac{g}{r_2} = k$$

Dieselbe bestimmt bei gegebenem k die Lage eines Punktes in Be-

zug auf zwei gegebene. Sie zeigt daher auch die Teilung eine geraden an.

Wir nennen

$$\frac{g}{r_1}+\frac{g}{r_2}=k$$

eine Teilung nach zweiter Ordnung.

Die Polarbedingung ergiebt:

$$\frac{g}{r_1}=1$$

Durch Addition entsteht die Gleichung

$$\frac{g}{r_1}+\frac{g}{r_2}=2$$

Dieselbe bezeichnet die harmonische Teilung einer Polgeraden. kann dafür schreiben

$$\frac{g}{r_1}-1+\frac{g}{r_2}-1=0 \quad \text{oder} \quad \frac{g-r_1}{r_1}=\frac{r_2-g}{r_2}$$

d. i. die harmonische Teilung einer Polgeraden.

C. Die Lage eines Punktes in Bezug auf drei gegebene P wird durch die Gleichung bedingt

$$\frac{g}{r_1}+\frac{g}{r_2}+\frac{g}{r_3}=k$$

Sie ist entstanden durch Addition der beiden Gleichungen

$$\frac{g}{r_1}+\frac{g}{r_2}=k \quad \text{und} \quad \frac{g}{r_3}=k_3$$

Wir nennen

$$\frac{g}{r_1}+\frac{g}{r_2}+\frac{g}{r_3}=k$$

eine Teilung nach dritter Ordnung.

Die Polarbedingung ergiebt:

$$\frac{g}{r_1}+\frac{g}{r_2}+\frac{g}{r_3}=3$$

D. Allgemein wird die Lage eines Punktes in Bezug gegebene Punkte durch die Gleichung

$$\frac{g}{r_1}+\frac{g}{r_2}+\frac{g}{r_3}+\ldots\frac{g}{r_n}=k$$

bestimmt. Dieselbe giebt auch die Teilung nach $n$ter Ordnun

Die Polarbedingung ergiebt:

$$\frac{g}{r_1}+\frac{g}{r_2}+\ldots\frac{g}{r_n}=n$$

§ 2. Alle bisher genannten Teilungen sind eindeutig oder ersten Grades, weil sie nur einen Punkt bestimmen.

Fällt der gesuchte Punkt mit einem der gegebenen Punkte zusammen, so tritt eine Teilung nach nächst niederer Ordnung ein.

Diese Betrachtung führt auf den allgemeinen Satz:

1. Fallen von n gegebenen Punkten m Punkte mit dem gesuchten Punkt zusammen, so wird die Polgerade nach $(n-m)$ter Ordnung geteilt.

Legen wir die speciellen Teilungen, welche die Polarbedingung ergab, zu Grunde und setzen $m=n-2$, so lautet der Satz:

1a. Fallen von n gegebenen Punkten $n-2$ Punkte mit dem gesuchten Punkt zusammen, so wird die Polgerade harmonisch geteilt.

Der Beweis beider Sätze erhellt daraus, dass für Satz 1. m Polfernen, für Satz 1a. $n-2$ Polfernen gleich g gesetzt werden, z. B.

$$\frac{g}{r_1}+\frac{g}{r_2}+(n-2)\frac{g}{g}=n \quad \text{d. h.} \quad \frac{g}{r_1}+\frac{g}{r_2}+n-2=n \quad \text{oder}$$

$$\frac{g}{r_1}+\frac{g}{r_2}=2$$

d. i. die harmomische Teilung einer Polgeraden.

§ 3. Die auf einer Polgeraden gegebenen n Punkte sollen einer Curve $n$ter Ordnung angehören. Drehen wir die Polgerade im Pol, welcher Coordinatenanfangspunkt ist, so gleiten die n gegebenen Punkte auf der Curve $n$ter Ordnung, während der gesuchte Punkt bei gegebenem numerischen Factor k_a eine Curve beschreibt, deren Polargleichung

$$\frac{g}{r_1}+\frac{g}{r_1}+\ldots\frac{g}{r_n}=k_a$$

ist, vorausgesetzt, dass alle Polgeraden derselben durch k_a gegebenen Teilung unterworfen sind.

Im Folgenden soll abgeleitet werden, dass die Gleichung

$$\frac{g}{r_1}+\frac{g}{r_2}+\ldots=k$$

in Bezug auf jede algebraische Curve einen Büschel paralleler Strahlen bedeutet.

§ 4. Zwischen den Polfernen einer Curve $n$ter Ordnung bestehen Beziehungen, gleich denen der Wurzeln einer Gleichung $n$ten Grades. Einige Beispiele sollen dies anschaulich machen.

Die allgemeine Gleichung einer Curve zweiter Ordnung ist

$$f^2xy + f'xy + c = 0$$

Es sei erwähnt, dass in jedem Gliede der durch f^nxy bezeichneten Summe $n$ten Grades die Summe der Exponenten der veränderlichen Grössen gleich n ist. Bringen wir eine derartige Summe auf Polarcoordinatensystem, so besteht die Gleichung

$$f^nxy = r^n f^n\varphi$$

Die allgemeine Gleichung der Curve zweiter Ordnung lautet daher im Polarcoordinatensystem:

$$r^2 + r\frac{f'\varphi}{f^2\varphi} + \frac{c}{f^2\varphi} = 0$$

Wurzeln dieser Gleichung sind die Polfernen der Curve zweiter Ordnung r_1 und r_2. Es bestehen zwei Beziehungen der Polfernen:

$$r_1 \cdot r_2 = \frac{c}{f^2\varphi}$$

$$r_1 + r_2 = -\frac{f'\varphi}{f^2\varphi}$$

Durch Division beider Beziehungen entsteht

$$g = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2} = -\frac{c}{f'\varphi}$$

d. i. eine gerade Linie. Da der numerische Factor k weder den Grad noch die Richtung verändern kann, so bedeutet

$$g = k\frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2} = -k\frac{c}{f'\varphi}$$

einen Parallelstrahlenbüschel, dessen Gleichung im rechtwinkligen Coordinatensystem lautet:

$$f'xy + kc = 0$$

die Gleichung

$$g = k\frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}$$

lässt sich auch schreiben:

$$\frac{g}{r_1}+\frac{g}{r_2}=k$$

Die allgemeine Gleichung der Curve dritter Ordnung ist:

$$r^3+r^2\frac{f^2\varphi}{f^3\varphi}+r\frac{f'\varphi}{f^3\varphi}+\frac{c}{f^3\varphi}=0$$

Die Beziehungen der Polfernen r_1, r_2 und r_3 sind:

$$r_1 . r_2 . r_3 = -\frac{c}{f^3\varphi}$$

$$r_1r_2+r_1r_3+r_2r_3=\frac{f'\varphi}{f^3\varphi}$$

$$r_1+r_2+r_3=-\frac{f^2\varphi}{f^3\varphi}$$

Nur die Division der ersten beiden Polfernenbeziehungen ergiebt den ersten Grad. Die Gleichung

$$g=\frac{r_1 . r_2 . r_3}{r_1r_2+r_1r_3+r_2r_3}=-\frac{c}{f'\varphi}$$

bezeichnet also eine gerade Linie.

$$g=k\frac{r_1 . r_2 . r_3}{r_1r_2+r_1r_3+r_2r_3}$$

bedeutet also einen Parallelstrahlenbüschel. Diese Gleichung lässt sich schreiben:

$$\frac{g}{r_1}+\frac{g}{r_2}+\frac{g}{r_3}=k$$

Die Beziehungen der Polfernen einer Curve vierter Ordnung sind:

$$r_1 . r_2 . r_3 . r_0 = \frac{c}{f^4\varphi}$$

$$r_1r_2r_3+r_1r_2r_4+r_1r_3r_4+r_2r_3r_4=-\frac{f'\varphi}{f^4\varphi}$$

$$r_1r_2+r_1r_3+r_1r_4+r_2r_3+r_2r_4+r_3r_4=\frac{f^2\varphi}{f^4\varphi}$$

$$r_1+r_2+r_3+r_4=-\frac{f^3\varphi}{f^4\varphi}$$

Nur die Division der ersten beiden Polfernenbeziehungen ergiebt den ersten Grad.

$$g=k\frac{r_1r_2r_3r_4}{r_1r_2r_3+r_1r_2r_4+r_1r_3r_4+r_2r_3r_4}$$

bedeutet ein Parallelstrahlenbüschel. Diese Gleichung lässt sich schreiben:

$$\frac{g}{r_1}+\frac{g}{r_2}+\frac{g}{r_3}+\frac{g}{r_4}=k$$

§ 5. Ich stelle den allgemeinen Grundsatz der Polaren auf:

Die Polare ist der Ort desjenigen Punktes einer im Pol rotirenden Geraden, welcher in Bezug auf sämtliche Polfernen einer gegebenen Curve in jedem Moment die Polarbedingung erfüllt.

Die Gleichungen der geraden Polaren erhalten wir demnach, wenn wir in die Gleichungen der Parallelstrahlenbüschel an Stelle von k die durch Polarbedingung gewonnenen charakteristischen Zahlen der Zahlenreihe 1, 2, 3, ... n setzen. Die Gleichungsformen der geraden Polare einer Curve sind demnach:

1) $\frac{g}{r_1}+\frac{g}{r_2}+\ldots\frac{g}{r_n}=n$

2) $g-n\frac{r_1r_2\ldots r_n}{r_1r_2\ldots r_{n-1}+r_1r_3\ldots r_n+\ldots r_2r_3\ldots r_n}=0$

3) $g+n\frac{c}{f'_\varphi}=0$

4) $f'xy+nc=0=0$

Die Curve $n$ter Ordnung, für welche diese Polare gilt, hat die Gleichung:

$$f^nxy+f^{n-1}xy+\ldots f^2xy+f'xy+c=0$$

§ 6. Setzen wir in der Gleichung 2) der Polare einer Curve $n$ter Ordnung eine beliebige Polferne gleich null, so wird der Zähler zu null, während im Nenner derjenige Summand stehen bleibt, welcher diese Polferne nicht enthält. Es wird also $g=0$ d. i. derjenige Strahl des Parallelstrahlenbüschels welcher durch den Pol (Coordinatenanfang) geht. Wir schliessen daraus:

> Ist der Pol ein Punkt der Curve, so geht die Polare durch den Pol.

Für die geraden Polaren gelten alle Sätze, welche im § 2. genannt sind. Sie lauten:

1. Geht eine gerade Polare durch beliebig viele $m$fache Punkte einer Curve $n$ter Ordnung, so werden die Polgeraden, welche durch diese $m$fachen Punkte gehen nach $(n-m)$ter Ordnung geteilt.

Für $m=n-2$ ist die Teilung eine harmonische:

1a. Geht eine gerade Polare durch beliebig viele $n-2$ fache Punkte einer Curve $n$ter Ordnung, so werden die Polgeraden, welche durch diese $(n-2)$ fachen Punkte gehen, harmonisch geteilt.

Betrachten wir die Tangente einer Curve $n$ter Ordnung als Polare und ihren Berührungspunkt als zweifachen Punkt der Curve, so muss diejenige Polgerade, welche durch den Berührungspunkt geht, nach $(n-2)$ter Ordnung geteilt sein. Dies ist nur möglich, wenn der Pol auf der Tangente selbst liegt, da diese allein ausser dem Berührungspunkte $n-2$ Schnittpunkte mit der Curve zeigt. Die Polare geht aber nur durch den Pol, wenn der Pol ein Punkt der Curve ist, d. h.:

2. Ist der Pol ein Punkt der Curve, so ist die Tangente im Pol seine Polare.

II. Die Polaren im allgemeinen.

Die Gleichung jeder Polare drückt eine Teilung aus, nämlich diejenige Teilung, welcher sämtliche Polgeraden durch Curve und Polare unterworfen sind. Die Ordnung der Polare — die $m$te Ordnung ist zu unterscheiden von der $m$ten Polare — giebt den Grad der Teilung an. Der Teilung $m$ten Grades genügen m Punkte, sie ist $m$deutig.

Es wäre zu weitläufig jede neue Teilung, d. h. die Polaren jeder Ordnung aus Punktbestimmungen abzuleiten. Daher schlagen wir jetzt einen allgemeinen Weg ein.

> Wir bestimmen in Folgendem den Ort desjenigen Punktes, der allen Polarbedingungen in Bezug auf eine gegebene Curve genügt.

A. Die geraden Polaren.

Sie müssen den Charakter einer Geraden zeigen, d. h. es ist

$$g + k\frac{c}{f'_\varphi} = 0$$

Die Beziehungen der Polfernen jeder algebraischen Curve [illegible] stets auf diese Gleichung.

Den Wert für $\frac{c}{f'_\varphi}$ erhalten wir durch Division zweier Polfernenbeziehungen derjenigen Curve, in Bezug auf welche die Polare [illegible]

stimmt werden soll. Der numerische Factor k ergiebt sich nach dem Polaren-Princip dadurch, dass wir sämtliche Polfernen der Curve gleich g setzen z. B.

Die Polare einer Curve vierter Ordnung hat die Gleichung

$$g - k\frac{r_1r_2r_3r_4}{r_1r_2r_3+r_1r_2r_4+r_1r_3r_4+r_2r_3r_4} = 0$$

Polarbedingung ist

$$r_4 = r_3 = r_2 = r_1 = g$$

Es wird

$$k = 4$$

daher ist die Gleichung der Polare:

$$g + 4\frac{c}{f'\varphi} = 0 \quad \text{oder} \quad f'xy + 4c = 0$$

B. Die Polaren zweiter Ordnung.

Ihre allgemeine Gleichung lautet:

$$g^2 + k_1 g\frac{f'c}{f^2\varphi} + k_2\frac{c}{f^2\varphi} = 0$$

Wir wollen diese Gleichung aus der allgemeinen Curve dritter Ordnung ableiten.

Die drei Bedingungen der Polfernen einer Curve dritter Ordnung lassen nur in zwei Fällen die Entstehung von Curven zweiter Ordnung zu, diese sind:

1. $g = k_1\frac{r_1r_2+r_1r_3+r_2r_3}{r_1+r_2+r_3} = -k_1\frac{f'\varphi}{f^2\varphi}$ oder 1. $g^2 + k_1 g\frac{f'\varphi}{f^2\varphi} = 0$

2. $g^2 = k^2\frac{r_1r_2r_3}{r_1+r_2+r_3} = k^2\frac{c}{f^2\varphi}$ oder 2. $g^2 - k^2\frac{c}{f^2\varphi} = 0$

Die Gleichung

$$g^2 + k_1 g\frac{f'\varphi}{f^2\varphi} + \lambda\left(g^2 - k_2\frac{c}{f^2\varphi}\right) = 0$$

in welcher λ einen beliebigen endlichen Factor bedeutet, bezeichnet alle Curven zweiter Ordnung, welche in dem Falle, wo k_1 und k_2 bestimmte Grössen sind, durch die gemeinsamen Schnittpunkte der beiden Curven 1. und 2. gehen, daher auch die Coefficienten der veränderlichen Grössen beider Curven zweiter Ordnung — d. h. numerische Grössen und Constanten, welche wir bisher nie betrachtet haben — in irgend einer Weise vereinen werden. Die Gleichung lässt sich schreiben:

$$g^3+\frac{k_1}{\lambda+1}\varrho\frac{f'\varphi}{f^2\varphi}-\frac{\lambda k_2}{\lambda+1}\frac{c}{f^2\varphi}=0$$

Es ist klar, dass nur zwei numerische Factoren zu bestimmen sind. Die Vorzeichen derselben haben zunächst keine Bedeutung. Sie ergeben sich durch die Bestimmungen von selbst. In gleicher Weise lässt sich die Polare zweiter Ordnung aus jeder Curve beliebiger Ordnung ableiten. Die Polare zweiter Ordnung hat daher die allgemeine Form:

$$g^2+k_1 g\frac{f'\varphi}{f^2\varphi}+k_2\frac{c}{f^2\varphi}=0$$

Die Werte für $\frac{f'\varphi}{f^2\varphi}$ und $\frac{c}{f^2\varphi}$ ergeben die Beziehungen der Polfernen derjenigen Curve, für welche die Polare bestimmt werden soll.

Die numerischen Factoren werden durch die Polarbedingung bestimmt.

a) z. B. die erste Polare der Curve dritter Ordnung

$$\frac{f'\varphi}{f^2\varphi}=-\frac{r_1r_2+r_1r_3+r_2r_3}{r_1+r_2+r_3}\quad\text{und}\quad\frac{c}{f^2\varphi}=\frac{r_1r_2r_3}{r_1+r_2+r_3}$$

Setzen wir diese Werte in die allgemeine Gleichung der Polare, so wird

$$g^2-k_1 g\frac{r_1r_2+r_1r_3+r_2r_3}{r_1+r_2+r_3}+k_2\frac{r_1r_2r_3}{r_1+r_2+r_3}=0$$

Legen wir den Pol auf die Curve, so wird z. B. $r_3=0$. Es entsteht die Gleichung

$$g-k_1\frac{r_1r_2}{r_1+r_2}=0$$

Die Polarbedingung $r_2=r_1=g$ ergiebt $k_1=2$. Wir können in Folgendem bei schon bekannten Gleichungen die in denselben enthaltenen numerischen Factoren wählen, da eine neue Bestimmung derselben stets die alten Resultate erzielen wird. Es bleibt für die gesuchte Polare:

$$g^2-2g\frac{r_1r_2+r_1r_3+r_2r_3}{r_1+r_2+r_3}+k_2\frac{r_1r_2r_3}{r_1+r_2+r_3}=0$$

Polarbedingung ist $r_1=r_2=r_3$. Es wird $k_2=3$

Die Gleichungen der ersten Polare einer Curve dritter Ordnung sind also:

1) $g^2-2g\frac{r_1r_2+r_1r_3+r_2r_3}{r_1+r_2+r_3}+3\frac{r_1r_2r_3}{r_1+r_2+r_3}$ oder

2) $g^2+2g\frac{f'\varphi}{f^2\varphi}+3\frac{c}{f^2\varphi}=0$ oder

3) $f^2xy+2f'xy+3c=0$

Setzen wir zwei beliebige Polfernen gleich g, so genügt diese Bedingung ebenfalls der Gleichung 1). Die Polare geht daher durch den Doppelpunkt und den dreifachen Punkt der Curve, wenn solche vorhanden sind.

b) Die zweite Polare der Curve vierter Ordnung.

Ihre Gleichung ist:

$$g^2-k_1g\frac{r_1r_2r_3+r_1r_2r_4+r_1r_3r_4+r_2r_3r_4}{r_1r_2+r_1r_3+r_1r_4+r_2r_3+r_2r_4+r_3r_4}+k_2\frac{r_1r_2r_3r_4}{r_1r_2+\ldots r_3r_4}=0$$

Man setze $r_4=0$. Es wird

$$g-k_1\frac{r_1r_2r_3}{r_1r_2+r_1r_3+r_2r_3}=0$$

ist schon bekannt. Es ist $k_1=3$. Die Gleichung der Polare bekommt die Form:

$$g^2-3g\frac{r_1r_2r_3+\ldots r_2r_3r_4}{r_1r_2+\ldots r_3r_4}+k_2\frac{r_1r_2r_3r_4}{r_1r_2+\ldots r_3r_4}=0$$

Polarbedingung ist $r_1=r_2=r_3=r_4=g$. Dieselbe ergiebt

$$k_2=6$$

Die zweite Polare einer Curve vierter Ordnung hat also die Gleichungen:

1) $g^2-3g\frac{r_1r_2r_3+\ldots r_2r_3r_4}{r_1r_2+\ldots r_3r_4}+6\frac{r_1r_2r_3r_4}{r_1r_2+\ldots r_3r_4}=0$

2) $g^2+3g\frac{f'\varphi}{f^2\varphi}+6\frac{c}{f^2\varphi}=0$

3) $f^2xy+3f'xy+6c=0$

Setzt man in Gleichung 1) drei beliebige Polfernen gleich g, so genügt diese Bedingung ebenfalls der Gleichung der Polare d. h.

> Die zweite Polare einer Curve vierter Ordnung geht durch alle dreifachen Punkte der Curve und den vierfachen, wenn die Curve in einen Büschel von vier Strahlen zerfällt.

C. Die Polaren dritter Ordnung

Ihre allgemeine Form ist

$$g^3+k_1g^2\frac{f^2\varphi}{f^3\varphi}+k_2g\frac{f'\varphi}{f^3\varphi}+k_3\frac{c}{f^3\varphi}=0$$

Die Werte von $\frac{f^2\varphi}{f^3\varphi}$, $\frac{f'e}{f^3e}$ und $\frac{c}{f^3\varphi}$ ergeben die Beziehungen der Polfernen der zu Grunde gelegten Curve. Die numerischen Factoren k_1, k_2 und k_3 werden durch Polarbedingungen bestimmt.

z. B. Die erste Polare einer Curve vierter Ordnung lautet:

$$g^3-k_1g^2\frac{r_1r_2+\ldots r_3r_4}{r_1+r_2+r_3+r_4}+k_2g\frac{r_1r_2r_3+\ldots r_2r_3r_4}{r_1+r_2+r_3+r_4}$$
$$-k_3\frac{r_1r_2r_3r_4}{r_1+r_2+r_3+r_4}=0$$

Wir müssten jetzt $r_4=r_3=0$ setzen, d. h. der Pol läge auf einem Doppelpunkt der Curve. Schneller führt es jedoch zum Ziel, wenn wir nur $r_4=0$ setzen. Es wird

$$g^2-k_1g\frac{r_1r_2+r_1r_3+r_2r_3}{r_1+r_2+r_3}+k_2\frac{r_1r_2r_3}{r_1+r_2+r_3}=0$$

Diese Gleichung ist bekannt. Man wähle die bekannten numerischen Factoren. Es wird

$$g^3-2g^2\frac{r_1r_2+\ldots r_3r_4}{r_1+r_2+r_3+r_4}-3g\frac{r_1r_2r_3+\ldots r_2r_3r_4}{r_1+r_2+r_3+r_4}$$
$$-k_3\frac{r_1r_2r_3r_4}{r_1+r_2+r_3+r_4}=0$$

Die Polarbedingung $r_1=r_2=r_3=r_4$ ergiebt $k_3=4$. Es entsteht die Gleichung der Polare:

$$f^3xy+2f^2xy+3fxy+4c=0$$

Setzt man je drei oder je zwei Polfernen gleich g, so genügt jede dieser Bedingungen der Gleichung der Polare d. h.:

> Die Polare geht durch alle zwei-, drei- und vierfachen Punkte der Curve.

D. Die Curve fünfter Ordnung und ihre Polaren.

Die allgemeine Gleichung der Curve ist:

$$r^5+r^4\frac{f^4\varphi}{f^5\varphi}+r^3\frac{f^3\varphi}{f^5\varphi}+r^2\frac{f^2\varphi}{f^5\varphi}+r\frac{f'\varphi}{f^5\varphi}+\frac{c}{f^5\varphi}=0$$

1te Polare: $g^4-2g^3\frac{r_1r_2+\cdots}{r_1+\cdots}+3g^2\frac{r_1r_2r_3+\cdots}{r_1+\cdots}-4g\frac{r_1r_2r_3r_4+\cdots}{r_1+\cdots}$

$$+5\frac{r_1r_2r_3r_4r_5}{r_1+r_2+r_3+r_4+r_5}=0$$

Setzt man sämtliche 5 Polfernen oder je 4, oder je 3, oder je 2 Polfernen gleich g, so entsteht die Gleichung $0 = 0$. Jede dieser Bedingungen genügt also der Gleichung der ersten Polare.

$$\text{2te Polare: } g^3 - 3g^2 \frac{r_2r_2r_3 + \dots}{r_1r_2 + \dots} + 6g \frac{r_1r_2r_3r_4 + \dots}{r_1r_2 + \dots} - 10 \frac{r_1r_2r_3r_4r_5}{r_1r_2 + \dots r_4r_5} = 0$$

Dieser Gleichung genügt jede der Bedingungen, welche entsteht, wenn man alle 5, oder je 4, oder je 3 Polfernen gleich g setzt.

$$\text{3te Polare: } g^2 - 4g \frac{r_1r_2r_3r_4 + \dots}{r_1r_2r_3 + \dots} + 10 \frac{r_1r_2r_3r_4r_5}{r_1r_2r_3 + \dots r_3r_4r_5} = 0$$

Setzt man alle 5 Polfernen oder je 4 gleich g, so genügt jede dieser Bedingungen der Polarengleichung.

$$\text{4te Polare: } g = 5 \frac{r_1r_2r_3r_4r_5}{r_1r_2r_3r_4 + \dots r_2r_3r_4r_5} = 0$$

Dieser Gleichung genügt nur die Polarbedingung für alle fünf Polfernen. Wir erhalten den allgemeinen Satz:

1. Die $k$te Polare geht durch alle vielfachen Punkte einer Curve, deren Anzahl gleich und grösser ist als $k+1$.

Aus diesem Satze folgt:

2. Die erste Polare jeder Curve geht durch alle Punkte, in welchen die Polgeraden Tangenten an die Curve werden. (Es sind nämlich je zwei Polfernen gleich g).

E. Die Gleichungen der Curve fünfter Ordnung und ihrer Polaren auf rechtwinkliges Coordinatensystem bezogen lauten:

Curve:	$1f^0xy + 1f^4xy + 1f^3xy + 1f^2xy + 1f^1xy + 1c = 0$
1te Polare:	$1f^4xy + 2f^3xy + 3f^2xy + 4f^1xy + 5c = 0$
2te Polare:	$1f^3xy + 3f^2xy + 6f^1xy + 10c = 0$
3te Polare:	$1f^2xy + 4f^1xy + 10c = 0$
4te Polare:	$1f^1xy + 5c = 0$

Jede Gleichung ist aus der vorhergehenden durch dieselbe Operation entstanden. Die erste Polare zeigt diese Operation an. Wir nennen diese Operation Polarisation oder polarisiren. Eine Gleichung polarisiren heisst:

Die gegebene Gleichung mit Ausnahme des höchsten Grades der veränderlichen Grössen abschreiben und den fallenden Potenzen der

veränderlichen Grössen die steigenden Factoren der Zahlenreihe 1, 2, 3 u. s. w. geben. Jede homogene Summe behält ein- und denselben Factor. Den höchsten Factor bekommen die von veränderlichen Grössen freien Summanden.

Die $k$te Polare einer Curve zu bestimmen heisst die Gleichung der Curve $k$mal zu polarisiren.

Beispiel: Die gerade Polare einer Curve 6ter Ordnung zu bestimmen.

Curve: $f^6xy+f^5xy+f^4xy+f^3xy+f^2xy+f^1xy+c=0$

1te Polare: $1f^5xy+2f^4xy+3f^3xy+4f^2xy+5f^1xy+6c=0$

$1.2f^4xy+2.3f^3xy+3.4f^2xy+4.5f^1xy+5.6c=0$

2te Polare: $f^4xy+3f^3xy+6f^2xy+10f^1xy+15c=0$

3te Polare: $f^3xy+4f^2xy+10f^1xy+20c=0$

4te Polare: $f^2xy+5f^1xy+15c=0$

5te Polare: $f^1xy+6c=0$

F. Es giebt noch eine zweite Art die Gleichungen der Polaren zu bestimmen. Aus den angeführten Beispielen ersehen wir, dass die $k$te Polare eine ganz bestimmte Zahlenreihe für sich als Factorenreihe in Anspruch nimmt.

a) Die erste Polare hat zur Factorenreihe die arithmetische Reihe erster Ordnung, deren $m$tes Glied $\frac{m}{1!}$ ist.

b) Die zweite Polare hat zur Factorenreihe die arithmetische Reihe zweiter Ordnung, deren $m$tes Glied $\frac{m.(m+1)}{2!}$ ist.

c) Die dritte Polare hat zur Factorenreihe die arithmetische Reihe dritter Ordnung, deren $m$tes Glied $\frac{m.(m+1).(m+2)}{3!}$ ist.

Es ist leicht einzusehen, dass das $m$te Glied der $k$ten Polare einer Curve $n$ter Ordnung lautet:

$$\frac{m.(m+1)(m+2)\ldots(m+k-1)}{k!}f^{n-k-m+1}xy$$

Jedenfalls ist die Methode der Polarisation für die Bestimmung einer Polarengleichung vorzuziehen.

G. Die Betrachtung der Polarengleichungen, in welchen die Polfernen der Curven enthalten sind, zeigt an, dass die m letzten Glieder einer Polarengleichung zu null werden, wenn der Pol ein

m facher Punkt einer Curve ist. Es bleibt eine Polarengleichung übrig, in der ebenfalls m Radienvectoren der Polare gleich null gesetzt werden können. Daraus folgt:

1. Ist der Pol ein m facher Punkt einer Curve, so ist er auch ein m facher Punkt jeder Polare.

2. Ist der Pol ein m facher Punkt einer Curve n ter Ordnung, so werden sämtliche Polgeraden durch die Curve und ihre k te Polare (in diesem Falle jede Polare) nach $(n-m)$ ter Ordnung geteilt. Es entsteht also die Gleichung der k ten Polare einer Curve $(n-m)$ ter Ordnung. —

Der Grad der Teilung verändert sich in gleicher Weise. Er wird durch die Ordnung der Polare angegeben. In dem Falle, wo $k = n-m-1$ ist, wird die Teilung jeder Polgeraden eindeutig, weshalb alsdann nur die ersten beiden Glieder jeder Polarengleichung beibestehen bleiben, und die numerischen Factoren derselben in den Gleichungen der geraden Polaren mit denselben Functionen der Polfernen verbunden auftreten.

Setzt man $k = n-m-1$ (d. h. die Teilung wird eindeutig) und $m = n-2$, so heisst das Gesetz 2.:

2a. Ist der Pol ein $n-2$ facher Punkt der Curve n ter Ordnung, so wird jede Polgerade in ihren Schnittpunkten mit Curve und erster Polare harmonisch geteilt.

Die $(a-m)$ te Polare ist m ter Ordnung. Ein m facher Punkt einer Curve m ter Ordnung ist nur möglich, wenn die Curve in einen Büschel von m Strahlen zerfällt. Es folgt also nach Satz 1.:

Ist der Pol ein m facher Punkt einer Curve n ter Ordnung, so zerfällt die $(n-m)$ te Polare in einen Büschel von m Strahlen, deren Mittelpunkt der Pol ist. Wenn der Pol ein Punkt der Curve ist, so wird seine gerade Polare Tangente im Pol (früher abgeleitet). Also hat ein m facher Punkt m Tangenten zu Polaren. Es folgt daraus:

3. Ist der Pol ein m facher Punkt einer Curve n ter Ordnung, so ist seine $(n-m)$ te Polare der Tangentenbüschel des m fachen Punktes.

XII.

Ueber die Lage der Mondsichel gegen den Horizont des Beobachters.

Von

Emil Oekinghaus.

Wenn man in einer mondhellen Nacht den Mond in einer seiner Lichtphasen etwa zur Zeit des ersten oder letzten Viertels beobachtet, indem man sich die Lage merkt, welche die die Spitzen der Sichel verbindende Linie gegen den Horizont des Beobachters einnimmt, so erkennt man, dass die Neigung dieser Linie nicht constant bleibt, sondern im Laufe der Nacht sich langsam ändert. Während zu bestimmter Stunde die Mondsichel fast senkrecht am hohen Himmel zu stehen scheint, neigt sie sich untergehend mehr und mehr nach einer fast wagerechten Richtung hin, einem goldenen Kahn vergleichbar, der durch blaue Wellen schwimmt.

Wir wollen im Nachfolgenden versuchen, der veränderlichen Neigung der Mondsichel gegen den Horizont einen mathematischen Ausdruck zu geben.

Zunächst bemerkt man, dass dieser Winkel von der Stellung des Mondes gegen die Erde und die Sonne abhängt.

Man hat also den Lichtkegel oder auch wegen der Parallelität der Sonnenstrahlen den Lichtcylinder einzuführen, womit die Sonne den Mond einhüllt und die Gleichung der Ebene aufzustellen, welche durch den Mondmittelpunkt geht und den Cylinder senkrecht schneidet. Dasselbe gilt hinsichtlich der Ebene, welche die Achse des Kegels vom Auge zum Monde in dessen Mittelpunkt senkrecht schneidet. Der Durchschnitt beider Ebenen ist die Linie, welche die Sichelspitzen des Mondes verbindet, und deren Projection auf die Himmelskugel das Auge wahrnimmt.

Ferner hat man die Gleichung der Ebene aufzustellen, welche durch den Standort des Beobachters geht und die Oberfläche der Erde in diesem Punkte berührt, also die Tangentialebene oder den Horizont. Der Winkel, den der Durchschnitt der beiden ersten Ebenen mit dem Horizont einschliesst, ist zunächst die gesuchte Grösse, welche in Folge der Rotation der Erde eine Function der Zeit ist.

Endlich sind noch die variabelen Coordinaten auf ein gemeinsames Coordinatensystem zu beziehen, die Transformationen derselben von Ekliptik und Horizont auf den Aequator als Fundamentalebene einzuführen, wobei man die Länge der Sonne, die Rectascension und Declination des Mondes nebst der Sternzeit im mittleren Mittag den Ephemeriden des Normalmeridians zu entnehmen hat.

§ 1.

Den Anfangspunkt der Coordinaten verlegen wir zunächst in die Sonne und nehmen die Ekliptik zur xy-Ebene. Fig. 1.

Die X-Achse gehe durch den Frühlings- oder Widderpunkt Υ, in welchem die Sonne am 21. März steht. Die Entfernung des Mondes von der Sonne sei ϱ, die Richtungswinkel von ϱ seien $\alpha\beta\gamma$, alsdann ist die Gleichung der Ebene EF, welche von der Sonne aus gesehen die Lichtgrenze auf dem Monde bestimmt

$$x_2 \cos\alpha + y_2 \cos\beta + z_2 \cos\gamma = \varrho$$

Wir verlegen jetzt das Coordinatensystem in den Mittelpunkt der Erde. Bezeichnen wir noch die Entfernung desselben von der Sonne mit R und die Länge der letzteren mit Θ, so hat man für die neuen Coordinaten

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 - R\cos\Theta \\ y_2 &= y_1 - R\sin\Theta \\ z_2 &= z_1 \end{aligned}$$

Es ist aber

$$\cos\alpha = \frac{x_2}{\varrho}, \quad \cos\beta = \frac{y_2}{\varrho}, \quad \cos\gamma = \frac{z_2}{\varrho}$$

ferner

$$\begin{aligned} x_2 &= -R\cos\Theta + r\cos\beta\cos\lambda \\ y_2 &= -R\sin\Theta + r\cos\beta\sin\lambda \\ z_2 &= \qquad\qquad r\sin\beta \end{aligned}$$

Demnach wird die Gleichung für die Lichtgrenze

$$(x_1 - R\cos\Theta)(-R\cos\Theta + r\cos\beta\cos\lambda) + (y_1 - R\sin\Theta)(-R\sin\Theta + r\cos\beta\sin\lambda) + z_1 r\sin\beta = \varrho^2$$

Diese für die Ekliptik geltenden Coordinaten haben wir noch auf den Aequator zu transformiren. Die Schiefe der Ekliptik sei ε, die bekannten Transformationen sind dann

$$\begin{aligned} x_1 &= x \\ y_1 &= y\cos\varepsilon + z\sin y \\ z_1 &= z\cos\varepsilon - y\sin\varepsilon \end{aligned}$$

demnach wird die obige Gleichung durch Einsetzung dieser Ausdrücke zu

$$\begin{aligned} &(x - R\cos\Theta)(-R\cos\Theta + r\cos\beta\cos\lambda) \\ &\quad + (y\cos\varepsilon + z\sin\varepsilon - R\sin\Theta)(-R\sin\Theta + r\cos\beta\sin\lambda) \\ &\quad + (z\cos\varepsilon - y\sin\varepsilon)\, r\sin\beta = \varrho^2 \end{aligned}$$

Bemerken wir noch, dass die Reduction der ekliptischen Coordinaten $\alpha\beta$ auf äquatoriale $\alpha\delta$, welche die Rectascension und Declination des Mondes bezeichnen, durch

$$\begin{aligned} \cos\beta\cos\lambda &= \cos\delta\cos\alpha \\ \cos\beta\sin\lambda &= \cos\delta\sin\alpha\cos\varepsilon + \sin\delta\sin\varepsilon \\ \sin\beta &= -\cos\delta\sin\alpha\sin\varepsilon + \sin\delta\cos\varepsilon \end{aligned}$$

bestimmt ist, und dass die Entfernung von Sonne und Mond durch

$$\varrho^2 = R^2 + r^2 - 2Rr\cos\beta\cos(\lambda - \Theta)$$

dargestellt werden kann, so folgt nach Einführung dieser Formeln in die obige Gleichung der Lichtgrenze

$$\begin{aligned} &x(-R\cos\Theta + r\cos\delta\cos\alpha) + y(-R\cos\varepsilon\sin\Theta + r\sin\alpha\cos\delta) \\ &\quad + z(-R\sin\varepsilon\sin\Theta + r\sin\delta) = R^2 - Rr\cos\beta\cos(\lambda - \Theta) \end{aligned}$$

Die variabelen Coordinaten xyz beziehen sich also jetzt auf das durch die Erde gelegte Aequatorialsystem, dessen X-Achse durch den Widderpunkt geht.

§ 2.

Wir haben jetzt die Gleichung der Ebene GH zu bestimmen, welche durch den Mondmittelpunkt geht, und die Grenze der Sichtbarkeit des beleuchteten Teils des Mondes, von der Erde aus gesehen, bestimmt. Wir nehmen der Einfachheit wegen auch hier eine cylinderförmige Umhüllung an, da die Grösse und Entfernung der betrachteten Weltkörper solche Annahme gestatten. Das zuletzt benutzte Coordinatensystem gilt auch hier, die Entfernung des Mondes von der Erde sei r, die Stellungswinkel $\alpha'\beta'\gamma'$, und die Gleichung der Ebene der Sichtbarkeit ist

$$x\cos\alpha' + y\cos\beta' + z\cos\gamma' = r$$

Da aber

$$\cos\alpha' = \cos\alpha\cos\delta, \quad \cos\beta' = \cos\delta\cos\alpha, \quad \cos\gamma' = \sin\delta$$

so ist die Gleichung

$$x\cos\alpha\cos\delta + y\sin\alpha\cos\delta + z\sin\delta = r$$

Der Durchschnitt beider Ebenen ist demnach nach bekannten Methoden bestimmt, und es bedarf nur noch der Gleichung der Horizontalebene des Beobachtungsortes, um alsdann die Neigung des Durchschnitts, welcher die Sichelspitzen des Mondes enthält, gegen diese Tangentialebene zu berechnen. Die Gleichung der letztern, die Erde als Kugel vom Radius a genommen ist

$$xx' + yy' + zz' = a^2$$

Darin bedeuten $x'y'z'$ die Coordinaten des Beobachtungsortes C, xyz die variabelen in Bezug auf den Aequator als Fundamentalebene.

Um diese Gleichung für unsere Zwecke einzurichten, haben wir den astronomischen Begriff der Sternzeit einzuführen.

Aus der Fig. 1. ist nun folgendes leicht zu erkennen:

Die Erde rotirt in der Richtung des Pfeiles von Westen nach Osten um ihre Achse. Die Zeit, welche verfliesst, bis der Meridian PQ, dessen Ebene durch den Widderpunkt geht, bei seiner Drehung wieder in die ursprüngliche Lage gelangt, heisst Sterntag und ist derselbe kürzer, als der mittlere Sonnentag.

Hat ein Stern die Rectascension α, so wird derselbe um $\frac{\alpha}{15}$ Stunden Sternzeit für den Ort B auf dem genannten Meridian culminiren. Für das Studium dieser Verhältnisse ist es gut, die wirkliche und scheinbare Bewegung mit einander zu combiniren. Denken wir uns die Erde in O am 21. März, so geht die Sonne um 0^h Sternzeit durch den Meridian, infolge der Bewegung der Erde um die Sonne culminirt sie den nächstfolgenden später und am 23. September, an welchem Tage ihre Rectascension 180^0 beträgt, culminirt sie um 12^h Sternzeit.

Wir wollen nun den Ort B, für welchen nach der Figur der Frühlingspunkt culminirt und 0^h Sternzeit hat, auf seiner Bewegung bis C begleiten Die bis dahin verflossene Sternzeit sei τ, die geographische Breite des Ortes oder die Polhöhe sei φ, alsdann werden die Coordinaten $x'y'z'$ des jetzt fixirten Ortes in C gleich

$$x' = a\cos\varphi\cos\tau, \quad y' = a\cos\varphi\sin\tau, \quad z' = a\sin\varphi$$

sein.

Die durch C gelegte Tangentialebene hat demnach die Gleichung

$$x\cos\varphi\cos\tau+y\cos\varphi\sin\tau+z\sin\varphi=a$$

und damit haben wir alle erforderlichen Gleichungen zur Rechnung fertig.

Da indessen τ Sternzeit bedeutet, so haben wir zur Verwandlung dieser Zeit in mittlere Sonnenzeit noch folgendes einzuschalten.

Ist der Meridian PQ, dessen Ebene den Frühlings-Tag- und Nachtgleichenpunkt enthält, soweit fortgerückt, dass die mittlere Sonne in ihm erscheint, so nennt man die verflossene Zeit die Sternzeit L im mittleren Mittag und ist dieselbe gleich der mittleren Länge der Sonne. Von diesem Zeitpunkt an zählt man die Stunden bis zum nächsten Mittag und zwar von 0^h bis 24^h. Rückt von diesem Punkte der Meridian bis C und ist hierzu die Sternzeit t' erforderlich, so ist $\tau=L+t'$ und da die Sternzeit noch in mittlere Zeit t verwandelt werden muss, so ist, da 366,242 Sterntage = 365,212 mittlere Tage sind,

$$\tau=L+t\,\frac{24^h+3^m56^s,555}{24}$$

worin t die mittlere Sonnenzeit am Beobachtungsorte C ist.

Die Gleichung der Tangentialebene in C ist also jetzt

$$x\cos\varphi\cos(L+kt)+y\cos\varphi\sin(L+kt)+z\sin\varphi=a$$

§ 3.

Um nun die Neigung ω des Durchschnitts der beiden ersten Ebenen gegen die letztere zu finden, haben wir aus ihren Gleichungen

$$\begin{aligned}&x(-R\cos\Theta+r\cos\delta\cos\alpha)+y(-R\cos\varepsilon\sin\Theta+r\sin\alpha\cos\delta)\\&\qquad+z(-R\sin\varepsilon\sin\Theta+r\sin\delta)=r^2-Rr\cos\beta\cos(\lambda-\Theta)\\&x\cos\alpha\cos\delta+y\sin\alpha\cos\delta+z\sin\delta=r\end{aligned}$$

die Gleichungen ihrer Projectionen auf die Ebenen der xy und xz aufzustellen, welche durch Elimination der z, bez. y aus ihnen hervorgehen. Sie sind

$$\begin{aligned}&xR(-\cos\Theta\sin\delta+\sin\Theta\sin\varepsilon\cos\alpha\cos\delta)\\&+yR(-\sin\Theta\cos\varepsilon\sin\delta+\sin\Theta\sin\varepsilon\sin\alpha\cos\delta)\\&-Rr(-\cos\beta\sin\delta\cos(\Theta-\lambda)+\sin\varepsilon\sin\Theta)\times\\&xR\cos\delta(-\cos\Theta\sin\alpha+\sin\Theta\cos\alpha\cos\varepsilon)\\&-zR(\sin\Theta\sin\varepsilon\sin\alpha\cos\delta-\sin\Theta\cos\varepsilon\sin\delta)\\&=Rr(-\cos\beta\cos\delta\sin\alpha\cos(\Theta-\lambda)+\cos\varepsilon\sin\Theta)\end{aligned}$$

oder kurz

$$y = B_1 x + b_1$$
$$z = C_1 x + c_1$$

$$B' = -\frac{\cos\Theta\sin\delta - \sin\Theta\sin\varepsilon\cos\alpha\cos\delta}{\sin\Theta\cos\varepsilon\sin\delta - \sin\Theta\sin\varepsilon\sin\alpha\cos}$$

$$C' = \frac{\cos\Theta\sin\alpha\cos\delta - \sin\Theta\cos\alpha\cos\delta\,c}{\sin\Theta\cos\varepsilon\sin\delta - \sin\Theta\sin\varepsilon\sin\alpha\,c}$$

Nach den Methoden der analytischen Geometri ist der Winkel ω, den die Gerade

$$y = B_1 x + b_1, \quad z = C_1 x + c_1$$

mit der Ebene

$$Ax + By + Cz = D$$

einschliesst, gegeben durch die Formel

$$\sin\omega = \frac{A + BB_1 + CC_1}{\sqrt{(A^2 + B^2 + C^2)(1 + B_1^2 + C_1^2)}}$$

Substituiren wir hierin die eben aufgestellten Ausdrücke, s

$$\sin\omega = \{\sin\varphi\cos\delta(-\cos\Theta\sin\alpha + \sin\Theta\cos\alpha\cos\varepsilon)$$
$$-\cos\varphi\sin\Theta\cos\tau(\cos\varepsilon\sin\delta - \sin\varepsilon\sin\alpha\cos\delta)$$
$$+\cos\varphi\sin\tau(\cos\Theta\sin\delta - \sin\Theta\sin\varepsilon\cos\alpha\cos\delta)\}:$$
$$\sqrt{\{\sin\Theta^2(\cos\varepsilon\sin\delta - \sin\varepsilon\sin\alpha\cos\delta)^2 + (\sin\Theta\sin\varepsilon\cos\alpha\cos\delta - \cos}$$
$$+(\cos\Theta\sin\alpha\cos\delta - \sin\Theta\cos\alpha\cos\varepsilon$$

Benutzt man nun, um die Formel zu vereinfachen, die Forme

$$\cos\delta\cos\alpha = \cos\beta\cos\lambda$$
$$\cos\delta\sin\alpha = \cos\beta\sin\lambda\cos\varepsilon - \sin\beta\sin\varepsilon$$
$$\sin\delta = \cos\beta\sin\lambda\sin\varepsilon + \sin\beta\sin\varepsilon$$

so verwandelt sich die Wurzel in

$$\sqrt{1 - \cos\beta^2\cos(\Theta - \lambda)^2}$$

wie man finden wird, wenn man den Wurzelausdruck durch identischen

$$1 - 2\cos\beta\cos(\Theta - \lambda)(\cos\Theta\cos\alpha\cos\delta + \sin\Theta\cos\varepsilon\sin\alpha\cos\delta$$
$$+\sin\Theta\sin\varepsilon\sin\delta) + \cos\beta^2\cos(\Theta - \lambda$$

ersetzt.

Daher ist auch

$$\sin\omega = \frac{\begin{array}{l} -\cos\Theta(\sin\varphi\cos\delta\sin\alpha - \cos\varphi\sin\delta\sin\tau) \\ +\sin\Theta\cos\varepsilon(\sin\varphi\cos\delta\cos\alpha - \cos\varphi\sin\delta\cos\tau) \\ +\sin\Theta\cos\varphi\cos\delta\sin\varepsilon\sin(\alpha - \tau) \end{array}}{\sqrt{1 - \cos\beta^2\cos(\Theta - \lambda)^2}}$$

Ist die Rectascension des Mondes gleich der Sternzeit des Ortes, also $\alpha = \tau$, so wird für die Culmination

$$\sin\omega = \frac{\sin(\varphi-\delta)(\sin\alpha\cos\Theta - \cos\alpha\sin\Theta\cos\varepsilon)}{\sqrt{1-\cos\beta^2\cos(\Theta-\lambda)^2}}$$

Ist noch $\varphi = \delta$, so wird $\omega = 0$, die Sichelgerade des Mondes erscheint parallel dem Horizont, was unmittelbar klar ist, da alsdann der Mond im Zenith des Ortes steht.

Im allgemeinen Fall hat man für $\omega = 0$ die Bedingung

$$\operatorname{tg}\Theta = \frac{\sin\varphi\cos\delta\sin\alpha - \cos\varphi\sin\delta\sin\tau}{\sin\varphi\cos\delta\cos\alpha\cos\varepsilon - \cos\varphi\sin\delta\cos\varepsilon\cos\tau + \cos\varphi\cos\delta\sin\varepsilon\sin(\alpha-\tau)}$$

Setzt man in der Hauptformel $\varphi = 90^0$, also für den Pol, so verschwindet die Zeit aus derselben und es ist

$$\sin\omega = \frac{\cos\delta(\sin\alpha\cos\Theta - \cos\alpha\sin\Theta\cos\varepsilon)}{\sqrt{1-\cos\beta^2\cos(\Theta-\lambda)^2}}$$

§ 4.

Der Winkel ω stellt die wirkliche Neigung der die Sichelspitzen des Mondes verbindenden Geraden gegen die Horizontalebene dar. Wir beobachten indessen diesen Winkel nicht direct, sondern vielmehr seine Projection an der Himmelskugel oder dem Fixsternhimmel Daher haben wir noch den Neigungswinkel der Projection der Sichelgeraden gegen den Horizont zu berechnen. Es ist der Winkel, den die durch die Erde und die Gerade gelegte Ebene mit dem Horizont einschliesst.

Da die Gleichung dieser Geraden, d. i. der Sichelsehne, nach dem vorigen bekannt ist, so lässt sich auch die durch sie und den Anfangspunkt der Coordinaten gelegte Ebene nach bekannten Methoden leicht ermitteln.

Sind nämlich die Coordinaten eines gegebenen Punktes fgh und die Projectionen einer Geraden

$$y = B_1 x + b_1, \quad z = C_1 x + c_1$$

so ist die Gleichung der durch sie gelegten Ebene

$$(B_1(c_1-h) - C_1(b_1-g))(x-f)$$
$$-(C_1 f + c_1 - h)(y-g) + (B_1 f + b_1 - g)(z-h) = 0$$

und weil in unserm Falle $f = g = h = 0$ ist

$$(B_1 c_1 - C_1 b_1)x - c_1 y + b_1 z = 0$$

Die Werte $B_1 C_1 b_1 c_1$ sind aus § 3 bekannt, führen wir sie hier ein, so zeigt sich nach einigen Transformationen, dass sich ein Factor $\sin\delta\cos\varepsilon - \cos\delta\sin\varepsilon\sin\alpha$ ganz forthebt, und die Gleichung der durch die Erde und die Mondsichelspitzen geführten Ebene ist

$$\begin{aligned} &x(\cos\Theta - \cos\alpha\cos\delta\cos\beta\cos(\Theta-\lambda)) \\ &+y(\cos\varepsilon\sin\Theta - \sin\alpha\cos\delta\cos\beta\cos(\Theta-\lambda)) \\ &+z(\sin\varepsilon\sin\Theta - \sin\delta\cos\beta\cos(\Theta-\lambda)) = 0 \end{aligned}$$

Nach den vorhergegangenen Erklärungen ist noch die Neigung dieser Ebene gegen die Horizontalebene des Beobachters

$$x\cos\varphi\cos\tau + y\cos\varphi\sin\tau + z\sin\varphi = a$$

aufzustellen.

Nun ist aber der Neigungswinkel ψ der beiden Ebenen

$$\begin{aligned} Ax + By + Cz &= D \\ A_1x + B_1y + C_1z &= D_1 \end{aligned}$$

durch die Formel

$$\cos\psi = \frac{AA_1 + BB_1 + CC_1}{\sqrt{(A^2+B^2+C^2)(A_1{}^2+B_1{}^2+C_1{}^2)}}$$

bekannt.

Führen wir hierin die obigen Ausdrücke ein, so resultirt zunächst

$$\begin{aligned} &\cos\psi = \\ &\{\cos\Theta\cos\varphi\cos\tau + \sin\Theta\cos\varepsilon\cos\varphi\sin\tau + \sin\Theta\sin\varepsilon\sin\varphi \\ &-\cos\beta\cos(\Theta-\lambda)(\sin\varphi\sin\delta + \cos\delta\cos\varphi\cos(\alpha-\tau))\}: \\ &\sqrt{\{1-2\cos\beta\cos(\Theta-\lambda)(\cos\Theta\cos\alpha\cos\delta + \sin\Theta\cos\varepsilon\sin\alpha\cos\delta} \\ &+\sin\Theta\sin\varepsilon\sin\delta) + \cos\beta^2\cos(\Theta-\lambda)^2\} \end{aligned}$$

Das Radical ist nach früheren $= \sqrt{1-\cos\beta^2\cos(\Theta-\lambda)^2}$.

Daher ist

$$\cos\psi = \frac{\begin{aligned}&\cos\Theta\cos\varphi\cos\tau + \sin\Theta\cos\varepsilon\cos\varphi\sin\tau + \sin\Theta\sin\varepsilon\sin\varphi \\ &-\cos\beta\cos(\Theta-\lambda)(\sin\varphi\sin\delta + \cos\delta\cos\varphi\cos(\alpha-\tau))\end{aligned}}{\sqrt{1-\cos\beta^2\cos(\Theta-\lambda)^2}}$$

Dies ist aber noch nicht die definitive Endformel. Es ist ψ zwar der Winkel zwischen dem Horizont und dem durch die Sichelspitzen gelegten grössten Kreise auf der Himmelskugel, aber es kommt weniger auf diesen als auf denjenigen an, welchen die Projection der Sichelspitzengeraden auf die Himmelskugel mit dem durch den Mond gelegten Parallelkreis macht, wie ihn das Auge bildet. Wir ziehen demnach von der obern Spitze der Mondsichel nach der untern eine

Linie und von der untern Spitze einen Parallelkreis und fragen nach dem Winkel ω' zwischen dieser Linie und dem Höhenparallel.

Die Höhe des Mondes sei h, der Winkel zwischen h und der Mondsehne sei λ, alsdann folgt aus dem sphärischen Dreieck

$$\cos\psi = \cos h \sin\lambda \qquad \text{Fig. 2)}$$

Da aber in dem kleinen Dreieck am Monde $\lambda = 90^0 - \omega'$ ist, so wird die Relation zu

$$\cos\psi = \cos h \cos\omega'$$

woraus

$$\cos\omega' = \frac{\cos\psi}{\cos h}$$

und die definitive Formel wird nunmehr

$$\cos\omega' = \frac{\begin{array}{c}\cos\Theta\cos\varphi\cos\tau + \sin\Theta\cos\varepsilon\cos\varphi\sin\tau + \sin\Theta\sin\varepsilon\sin\varphi \\ -\cos\beta\cos(\Theta-\lambda)(\sin\varphi\sin\delta + \cos\varphi\cos\delta\cos(\alpha-\tau))\end{array}}{\pm\cos h\sqrt{1-\cos\beta^2\cos(\Theta-\lambda)^2}}$$

und es drückt also ω' nicht die wirkliche Neigung ω der Mondsehne gegen den Horizont, welche wir vorhin berechnet haben, sondern die scheinbare Neigung derselben und zwar gegen den Höhenparallel aus, wie ihn das projicirende Auge wahrnimmt.

§ 5.

Die soeben gefundene Formel für $\cos\omega'$ ist nun einer sehr interessanten Transformation fähig, welche den Ausdruck zur Rechten ausserordentlich vereinfacht.

Es wird sich zeigen, dass die einzelnen Glieder desselben einer geometrischen Deutung fähig sind,

Wir haben, um dies deutlich zu zeigen, in der Figur 3. die 3 Hauptebenen der Ekliptik, des Aequators und des Horizontes gezeichnet; die beiden ersten schneiden sich in der X-Achse, welche den Widderpunkt T enthält. Die Sonne befindet sich im Punkte S der Ekliptik und hat, von der Erde aus gesehen, welche wir im Coordinatenanfangspunkt denken, die Länge Θ und die Höhe H. Der Bogen grössten Kreises zwischen ihr und dem Monde sei σ, dessen Länge und Breite λ, β, Rectascension und Declination $\alpha\delta$ ist.

Durch den Pol des Aequators und den Mond legen wir einen grössten Kreis, ebenso durch den Pol und das Zenith Z des Beobachtungsortes einen zweiten, diese schliessen, wie man sofort erkennt, den Winkel $\tau - \alpha$ mit einander ein, welches der Stundenwinkel des Mondes in Sternzeit ist.

Der Wurzelausdruck $\pm\sqrt{1-\cos\beta^2\cos(\Theta-\lambda)^2}$ ist nunmehr leicht zu deuten. Aus dem rechtwinkligen sphärischen Dreieck zwischen Sonne, Mond, der Ekliptik und der Mondbreite β folgt unmittelbar

$$\cos\sigma = \cos\beta\cos(\lambda - \Theta)$$

daher ist

$$\sqrt{1-\cos\beta^2\cos(\Theta-\lambda)^2} = \sin\sigma$$

Wir betrachten jetzt das Dreieck zwischen Mond, Pol und Zenit. Die 3 Seiten sind $90^0-\delta$, $90^0-\varphi$, 90^0-h, der letzten Seite liegt der Winkel $\tau-\alpha$ gegenüber. Demnach hat man

$$\sin h = \sin\varphi\sin\delta + \cos\varphi\cos\delta\cos(\tau-\alpha)$$

Derselbe Ausdruck kommt in der Formel für $\cos\omega'$ vor, letztere wird demnach durch Einsetzen der beiden obigen Relationen zu

$$-\cos\omega'\cos h\sin\sigma = \cos\Theta\cos\varphi\cos\tau + \sin\Theta\cos\varepsilon\cos\varphi\sin\tau$$
$$+\sin\Theta\sin\varepsilon\sin\varphi - \cos\beta\sin h\cos(\Theta-\lambda$$

woraus

$$\cos\beta\cos(\Theta-\lambda)\sin h - \cos\omega'\cos h\sin\sigma$$
$$= \cos\varphi(\cos\Theta\cos\tau + \sin\Theta\sin\tau\cos\varepsilon) + \sin\varphi\sin\Theta\sin$$

In dieser Formel können wir $\cos\beta\cos(\Theta-\lambda)$ durch $\cos\sigma$ ersetzen und haben demnach

$$\cos\sigma\sin h - \sin\sigma\cos h\cos\omega' = \cos\varphi(\cos\Theta\cos\tau + \sin\Theta\sin\tau\cos\varepsilon)$$
$$+\sin\varphi\sin\Theta\sin$$

Beide Seiten der Gleichung haben wir nun auf eine Form gebracht, welche eine Verwandtschaft ihrer Glieder mit den Formeln der sphärischen Trigonometrie erkennen lässt. Wir erinnern deshalb daran, dass in jedem sphärischen Dreieck, dessen Seiten abc und Winkel ABC sind, folgende Formeln gelten:

$$\sin a\sin B = \sin b\sin A$$
$$\cos a = \cos b\cos c + \sin b\sin c\cos A$$
$$\sin a\cos B = \cos b\sin c - \sin b\cos c\cos A$$

Um den eingeklammerten Ausdruck in der Hauptformel geometrisch zu deuten, ziehen wir vom Pol des Aequators durch's Zenith einen Meridian bis zum Durchschnitt H des Aequators, verbinden diesen Punkt durch den Bogen ϱ mit der Sonne S und wenden auf das Dreieck zwischen HST die 2. sphärische Relation an, wodurch man erhält

$$\cos\varrho = \cos\Theta\cos\tau + \sin\Theta\sin\tau\cos\varepsilon$$

Die Hauptformel wird nun zur folgenden

$$\cos\sigma\sin h - \sin\sigma\cos h\cos\omega' = \cos\varphi\cos\varrho + \sin\varphi\sin\Theta\sin\varepsilon$$

Um die rechte Seite mit der entsprechenden sphärischen Formel homogen zu machen, benutzen wir die obige 1. Relation oder den Sinussatz, führen aber statt des Winkels bei H in dem Dreiecke HST seinen Complementärwinkel, also den Winkel zwischen ϱ und dem Meridian PH ein, welcher v heissen möge. Alsdann ist

$$\sin\Theta \sin\varepsilon = \sin\varrho \cos v$$

Die Formel wird nun

$$\cos\sigma \sin h - \sin\sigma \cos h \cos\omega' = \cos\varphi \cos\varrho + \sin\varphi \sin\varrho \cos v$$

Der Ausdruck zur Rechten ist leicht zu interpretiren; er ist der cosinus des Bogens zwischen Sonne und Zenith, wie aus der Betrachtung des Dreiecks zwischen SZH hervorgeht. Führen wir also die Zenithdistanz Z der Sonne in die Formel ein, so resultirt

$$\cos Z = \cos\sigma \sin h - \sin\sigma \cos h \cos\omega'$$

Endlich betrachten wir noch zur Charakterisirung dieses Ausdrucks das Dreieck zwischen Sonne, Mond und Zenith und erhalten aus der sphärischen Relation

$$\cos Z = \cos\sigma \sin h - \sin\sigma \cos h \cos(\sigma h)$$

in Verbindung der vorhergehenden den interessanten Nachweis, dass der gesuchte Winkel ω' der Grösse nach gleich ist dem Winkel zwischen dem Bogen σ des grössten Kreises zwischen Sonne und Mond und der Höhe h des letztern. Der Winkel ω bezeichnet aber die Lage der Mondsichel gegen den Höhenparallel. Demnach hat man nur durch den Mond eine Linie senkrecht zu diesem Bogen σ zwischen Sonne und Mond zu legen und erhält damit die Lage und Richtung der Mondsichel.

Sind beide Gestirne zugleich sichtbar über dem Horizont, so bestätigt die Uebereinstimmung dieses theoretischen einfachen Resultats mit dem blossen Augenschein die Richtigkeit der Rechnung. Um den Bogen σ des grössten Kreises zu erhalten, muss man sich durch seinen Standpunkt und Sonne und Mond eine Ebene und ihren Durchschnitt an der Himmelskugel denken; dieser Bogen wird stets auf der Sichel oder Sichelsehne senkrecht sein, wo auch der Mond am Himmel stehen mag.

Will man den Winkel ω' durch Rechnung finden, so ergibt er sich aus der Formel

$$\cos\omega' = \frac{\cos\beta \cos(\lambda - \Theta) \sin h - \sin H}{\cos h \sqrt{1 - \cos\beta^2 \cos(\lambda - \Theta)^2}}$$

in welcher H die Höhe der Sonne ist. Der Winkel ist also wesentlich von der Höhe der Sonne und des Mondes abhängig, welche bekanntlich durch die Formeln

$$\sin h = \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos(\tau - \alpha)$$
$$\sin H = \sin\varphi \sin D + \cos\varphi \cos D \cos t$$

berechnet werden können.

Aus dem Gang der Auflösung der jetzt gelösten Aufgabe geht hervor, dass dieselbe als ein gutes Mittel zur Anwendung der elementaren Sätze aus der analytischen Geometrie des Raumes betrachtet werden kann, da die vorzüglichsten der in dieser Disciplin enthaltenen Lehrsätze darin zur Anwendung kommen. So die Transformationen der Coordinaten von der Ekliptik auf den Aequator, die Aufstellung der Gleichungen verschiedener Ebenen in heliocentrischer und geocentrischer Lage, die Berechnung des Durchschnitts derselben und ihre Neigung gegen eine Tangentialebene einer rotirenden Kugel, das Legen einer Ebene durch eine Gerade und die Darstellung ihres Neigungswinkels gegen eine Horizontalebene, die an der Drehung der Kugel teilnimmt, die Projection eines Winkels auf die Himmelskugel, die geometrische Interpretation analytischer Ausdrücke etc.

Obgleich die Bedeutung der Aufgabe eine untergeordnete ist, so gewinnt sie durch die Einführung und Anwendung astronomischer Begriffe, die erst dann zur Klarheit kommen, wenn man es unternimmt, ein schwieriges oder leichteres Problem selbständig durchzuführen. Da die mathematischen Principien in ihrer Anwendung auf astronomische Aufgaben eine so interessante und anschauliche Seite gewinnen, so dürfte die vorliegende Arbeit auch als eine gute und ansprechende Studie zur Einführung in diese schöne Wissenschaft dienen, die jeden, der sich ernstlich mit ihr beschäftigt, in so hohem Grade zu fesseln versteht.

Gräfrath, April 1887.

XIII.

Die ebenen und die sphärischen cykloidalen Curven.

Von

H. Ekama.

Die sphärischen cykloidalen Curven sind, so weit mir bekannt ist, bis jetzt nicht analytisch betrachtet. Hauptsächlich habe ich gesucht die Punkte von Uebereinstimmung und von Unterschied zwischen den ebenen und den sphärischen cykloidalen Curven zu finden, und darum werde ich mit der Betrachtung der ebenen Curven beginnen. Dieses ist auch nötig, weil die folgende Ableitung in vielen Hinsichten sich von jener, welche gewöhnlich gegeben wird, unterscheidet.

I.

Die cykloidale Curve ist die Bahn, welche ein Punkt, der fest mit einem Kreise verbunden ist, durchläuft, wenn dieser Kreis ohne zu gleiten einen anderen Kreis entlang sich wälzt. Berühren die beiden Kreise einander auswendig, so entsteht eine Epicykloide; berühren sie einander inwendig, so ist die Bahn eine Hypocykloide. Der Punkt kann ausserhalb oder innerhalb des sich wälzenden Kreises gelegen sein.

Sei (Fig. 1.) der Radius $OC = b$ und der Radius $MC = a$, während $BD = c$ ist. Der Winkel BMO sei Θ, also ist in $\triangle MOB$

$$r^2 = (a+b)^2 + (a+c)^2 - 2(a+b)(a+c)\cos\Theta \qquad (1)$$

$$\text{arc } AC = \text{arc } DC \therefore \text{Winkel } AOC = \frac{a}{b}\Theta$$

$$a+c : \sin x = a+b : \sin(x+\Theta)$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{(a+c)\sin\Theta}{(a+b)-(a+c)\cos\Theta} = \operatorname{tg}\left(\frac{a}{b}\Theta - \varphi\right)$$

$$\therefore\ \varphi = \frac{a}{b}\Theta - \operatorname{arc\,tg}\frac{(a+c)\sin\Theta}{(a+b)-(a+c)\cos\Theta}$$

Für a negativ findet man die Hypocykloide; auch c kann nega sein, wenn der Punkt innerhalb des sich wälzenden Kreises liegt

Wenn ein Punkt sich mit einer constanten Geschwindigk einen Kreis entlang bewegt und der Mittelpunkt dieses Kreises lä einem anderen Kreise, so entsteht auch eine cykloidale Curve.

Sei der Radius des feststehenden Kreises B und der des s bewegenden Kreises A. Das Verhältniss der Winkelgeschwindigkei sei $m : n$, so ist Wkl. $MOH = m\eta$ und Wkl. $GMB = n\eta$ (Fig. 2. u.

Sind die Bewegungen gleich gerichtet (Fig. 2.), so ist Wkl. OMB $(n-m)\eta$; sind sie einander entgegengesetzt (Fig. 3.), so ist $= (n+m)\eta$. OB sei r und Wkl. $BOH = \varphi$, so ist in $\triangle OBM$

$$r^2 = A^2 + B^2 - 2AB\cos(n \mp m)\eta$$

und

$$\operatorname{tg} x = \frac{A\sin(n \mp m)\eta}{B - A\cos(n \mp m)\eta}$$

aber

$$\pm x = m\eta - \varphi \ \therefore\ \operatorname{tg}(m\eta - \varphi) = \pm\frac{A\sin(n \mp m)\eta}{B - A\cos(n \mp m)\eta}$$

Sei

$$(n \pm m)\eta = \pm\Theta$$

so wird

$$r^2 = A^2 + B^2 - 2AB\cos\Theta$$

und

$$\operatorname{tg}\left(\frac{m}{n \mp m}\Theta \mp \varphi\right) = \frac{A\sin\Theta}{B - A\cos\Theta}$$

$$\therefore\ \varphi = \pm\frac{m}{n \mp m}\Theta - \operatorname{arc\,tg}\frac{\pm A\sin\Theta}{B - A\cos\Theta}$$

Diese Curve ist also eine Cykloide, bei welcher ist:

$$a+c = \pm A; \qquad a+b = B \quad \text{und} \quad \frac{a}{b} = \frac{m}{n \mp m}$$

Soll der Punkt auf dem rollenden Kreise liegen, so ist $c =$ dann findet man

$$A : B = m : n$$

das heisst, die Radii der Kreise müssen den Geschwindigkeiten gekehrt proportional sein.

Sind a und b unter einander messbare Linien, so sei ihr Verhältniss p/q, wo p und q zwei Zahlen, welche keinen gemeinschaftlichen Factor haben, sind. Die Curve ist dann geschlossen. Aus den Formeln sieht man, dass r dieselbe bleibt, wenn Θ um einige mal 2π zunimmt. Die Anomalie wächst jedesmal um $p/q\,2\pi$ und folglich wird der eine Kreis p mal um den anderen wälzen müssen, um in den Anfangspunkt zurückzukommen. Die Curve besteht aus q congruenten Teilen.

Diese verschiedene Teile werden einander schneiden, und wir werden jetzt den Ort der Doppelpunkte bestimmen.

Sollen für zwei Punkte die Radienvectoren einander gleich sein, so muss $\cos\Theta = \cos\Theta'$ sein

$$\therefore \Theta' = 2l\pi - \Theta$$

und sollen die Anomalien gleich sein, so muss sein

$$\operatorname{tg}\left(\frac{p}{q}\Theta - \varphi\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{p}{q}\Theta' - \varphi\right) = \operatorname{tg}\left\{\frac{p}{q}(2l\pi - \Theta) - \varphi\right\}$$

folglich

$$p/q\,(2l\pi - \Theta) - \varphi = k\pi - p/q\Theta + \varphi$$

$$\therefore \varphi = \frac{2p\,l - qk}{q}\,{}^1/_2\pi = \frac{2E\pi}{4q}$$

E kann alle Werte haben von 0 bis $2q$, und die Doppelpunkte sollen liegen auf den Linien, welche den feststehenden Kreis in $2q$ gleiche Sectoren teilen. Die Zahl der Doppelpunkte, welche auf jeder Linie gelegen sind, hängt ausgenommen von p auch von a, b und c ab.

Diese Linien sind auch Linien von Symmetrie. Für φ und $-\varphi$ finden wir dieselben Werte von Θ, welche aber ein verschiedenes Zeichen haben, jedoch bleiben die Radienvectoren dann dieselben.

Bringen wir den Anfangspunkt der Anomalie auf die nächste Linie der Doppelpunkte über, und setzen wir e für $a+b$ unf f für $a+c$.

Nun ist

$$\varphi = \varphi' + \frac{p}{q}\pi$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{p}{q}\Theta - \varphi - \frac{p}{q}\pi\right) = \operatorname{tg}\left\{\frac{p}{q}(\Theta - \pi) - \varphi\right\} = \frac{f\sin\Theta}{e - f\cos\Theta}$$

Sei

$$\Theta - \pi = \eta$$

$$\therefore \operatorname{tg}\left\{\frac{p}{q}\eta - \varphi\right\} = -\frac{f\sin\eta}{e+f\cos\eta}$$

also

$$\varphi = p/q\,\eta + \frac{f\sin\eta}{e+f\cos\eta}$$

und

$$r^2 = e^2+f^2+2ef\cos\eta$$

Für φ und $-\varphi$ genügen dieselben Werte von η mit verschie Zeichen, jedoch die Radienvectoren bleiben dieselben.

Die Curve kann bloss durch den Coordinatenanfangspunkt für $e = f$ [1])

also ist

$$r = 2f\cos {}^1/_2\eta$$

und

$$\operatorname{tg}(\varphi - p/q\,\eta) = \operatorname{tg} {}^1/_2\eta$$

folglich

$$\varphi - p/q\,\eta = {}^1/_2\eta \quad \therefore \quad \varphi = \frac{q+2p}{2q}\eta$$

und

$$r = 2f\cos\frac{q}{2p+q}y$$

Aus (1) folgt

$$\frac{dr}{d\Theta} = \frac{ef\sin\Theta}{r}$$

und aus (2)

$$\frac{d\varphi}{d\Theta} = \frac{a}{b} - \frac{ef\cos\theta - f^2}{r^2}$$

also

$$\frac{1}{r}\frac{dr}{d\varphi} = \frac{bef\sin\Theta}{ar^2 - bef\cos\Theta + bf^2} = \frac{bf\sin\Theta}{ae+f^2-(2a+b)f\cos\Theta} = \operatorname{tg} \mathrm{Wkl}$$

In $\triangle\ OCB$ ist:

$$OC : r = \sin OBC : \sin(OBC + x)$$

$$OC : r = 1 : \cos x + \sin x \operatorname{cotg} OBC$$

$$OC = \frac{r}{\cos x\left\{1+\dfrac{ae+f^2-(2a+b)f\cos\Theta}{b(e-f\cos\Theta)}\right\}}$$

$$OC = \frac{b(e-f\cos\Theta)}{r\cos x}$$

und

$$r\cos x = e - f\cos\Theta;$$

also ist

$$OC = b$$

---

1) Durège, Schlöm. Zeitschr. für Mathem. und Phys. Teil IX. Sei

was uns lehrt, dass die Normale der cykloidalen Curve immer durch den Berührungspunkt der beiden Kreise geht.

Liegt der Punkt auf dem sich bewegenden Kreise, so ist die Curve die gemeine Epi- oder Hypocykloide. Die Formeln (1) und (2) werden

$$r^2 = a^2+(a+b)^2-2a(a+b)\cos\Theta \tag{4}$$

und

$$\varphi = \frac{a}{b}\Theta - \operatorname{arc\,tg}\frac{a\sin\Theta}{(a+b)-a\cos\Theta} \tag{5}$$

Der Winkel ODB (Fig. 4.) wird $^1/_2\Theta$.

Die Tangente an die Curve gezogen geht immer durch den Punkt des sich wälzenden Kreises, der diametral dem Berührungspunkt gegenüber gelegen ist.

Bestimmen wir die Fusspunktlinie [1]) der Epicykloide

$$\text{Wkl. } OPD = {}^1/_2\Theta$$

Sei

$$\Theta = \pi-\eta$$

In $\triangle$ OPD ist

$$OP = \varrho = (2a+b)\sin{}^1/_2\Theta = (2a+b)\cos{}^1/_2\eta$$

$$\text{Wkl. } POD = \chi = {}^1/_2\eta+\frac{a}{b}\eta = \frac{2a+b}{2b}\eta$$

folglich

$$\varrho = (2a+b)\cos\frac{b\chi}{b+2a}$$

Also ist die Fusspunktlinie die Curve, welche die Formel (3) giebt.

Diese Curve ist auch der geometrische Ort der Fusspunkte der Normalen, welche aus dem Coordinatenanfangspunkt auf die Normalen der Epicykloide nieder gelassen sind.

Wir haben in $\triangle$ OCK

$$OK = \sigma = b\cos{}^1/_2\Theta$$

$$\text{Wkl. } AOK = \chi = {}^1/_2\Theta+\frac{a}{b}\Theta = \frac{b+2a}{2b}\Theta$$

folglich

$$\sigma = b\cos\frac{b}{2a+b}\chi$$

Der Teil der Normale, welcher innerhalb des sich bewegenden Kreises liegt, ist

---

1) Eckardt, Schlöm. Zeitsch. für Math. und Phys. Teil XV. Seite 132.

$$N = 2a \sin {}^1/_2\theta \tag{6}$$

Dieser Wert ist unabhängig vom Radius des feststehenden Kreises.

In $\triangle COE$ ist

$$t : b = \sin(90^0 - {}^1/_2\theta) : \sin OEC$$

$$\text{Wkl. } OEC = 180^0 - 90^0 + {}^1/_2\theta - AOE + \frac{a}{b}\theta = 90^0 - \psi + \frac{2a+b}{2b}\theta$$

in welcher Formel Wkl. $AOC = \psi$ ist, und t und ψ die Polarcoordinaten der Normale sind. Die Gleichung wird also

$$t \cos\left(\frac{2a+b}{2b}\theta - \psi\right) = b \cos {}^1/_2\theta$$

In einem anderen Punkte der Epicykloide ist

$$t \cos\left(\frac{2a+b}{2b}\theta' - \psi\right) = b \cos {}^1/_2\theta'$$

Den Schnittpunkt der beiden Normalen findet man, indem man t und ψ bestimmt.

$$\frac{b \cos {}^1/_2\theta}{\cos\left(\frac{2a+b}{2b}\theta - \psi\right)} = \frac{b \cos {}^1/_2\theta'}{\cos\left(\frac{2a+b}{2b}\theta' - \psi\right)}$$

oder

$$\operatorname{tg}\psi = -\frac{\sec {}^1/_2\theta \cos\frac{2a+b}{2b}\theta - \sec {}^1/_2\theta' \cos\frac{2a+b}{2b}\theta'}{\sec {}^1/_2\theta \sin\frac{2a+b}{2b}\theta - \sec {}^1/_2\theta' \sin\frac{2a+b}{2b}\theta}$$

Um den Krümmungsmittelpunkt zu finden, lassen wir die beiden Punkte sich nähern die Epicykloide entlang, so wird

$$\operatorname{tg}\psi = -\frac{D\left(\sec {}^1/_2\theta \cos\frac{2a+b}{2b}\theta\right)}{D\left(\sec {}^1/_2\theta \sin\frac{2a+b}{2b}\theta\right)} - \frac{\operatorname{tg} {}^1/_2\theta - \frac{2a+b}{b}\operatorname{tg}\frac{2a+b}{2b}\theta}{\frac{2a+b}{b} + \operatorname{tg} {}^1/_2\theta \operatorname{tg}\frac{2a+b}{2b}\theta}$$

$$\therefore \operatorname{tg} {}^1/_2\theta = \frac{2a+b}{b}\operatorname{tg}\left(\frac{2a+b}{2b}\theta - \psi\right)$$

also

$$t^2 = b^2 \cos^2 {}^1/_2\theta \sec^2\left(\frac{2a+b}{2b}\theta - \psi\right) = b^2 \cos^2 {}^1/_2\theta \left(1 + \frac{b^2}{(2a+b)^2}\operatorname{tg}^2 {}^1/_2\theta\right)$$

oder

$$t^2 = \frac{b^4}{(2a+b)^2} + \frac{4ab^2(a+b)}{(2a+b)^2}\cos^2 {}^1/_2\theta$$

$$\therefore\ t^2 = \left(\frac{b(a+b)}{2a+b}\right)^2 + \left(\frac{ab}{2a+b}\right)^2 + 2\,\frac{b(a+b)}{2a+b}\,\frac{ab}{2a+b}\cos\Theta$$

Ferner ist

$$\operatorname{tg}\left(\frac{a}{b}\Theta-\psi\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{2a+b}{2b}\Theta-\psi-{}^1/_2\Theta\right) = \frac{\frac{b}{2a+b}\operatorname{tg}{}^1/_2\Theta - \operatorname{tg}{}^1/_2\Theta}{1-\frac{b}{2a+b}\operatorname{tg}^2{}^1/_2\Theta}$$

$$\therefore\ \operatorname{tg}\left(\frac{a}{b}\Theta-\psi\right) = -\frac{2a\operatorname{tg}{}^1/_2\Theta}{2a+b\sec^2{}^1/_2\Theta} = -\frac{a\sin\Theta}{b+2a\cos^2{}^1/_2\Theta}$$

und

$$\psi = \frac{a}{b}\Theta - \operatorname{arc\,tg}\frac{-a\sin\Theta}{(b+a)+a\cos\Theta}$$

Diese Formeln stimmen mit den Formeln (4) und (5) überein. Die Evolute der Epicykloide ist also auch eine Epicykloide, jedoch war der beschreibende Punkt beim Anfang der Bewegung so weit möglich vom Coordinatenanfangspunkt entfernt. Der Radius des sich wälzenden Kreises der Evolute ist $\frac{ab}{2a+b}$ und jener des feststehenden Kreises $\frac{b^2}{2a+b}$.

Umgekehrt wird die Evolvente einer Epicykloide auch eine Epicykloide sein, bei welcher der Radius des feststehenden Kreises $b+2a$, jener des bewegenden Kreises $\frac{a}{b}(2a+b)$ ist.

Wir finden auf diese Weise fortschreitend eine unendlich grosse Anzahl von Epicykloiden, von welchen jede folgende die Evolvente der vorhergehenden ist, während die Radii der bewegenden und der feststehenden Kreise zwei geometrische Reihen bilden, deren Progression $\frac{b}{2a+b}$ ist.

Der Krümmungsradius wird für einen Punkt der Epicykloide sein

$$2a\sin{}^1/_2\Theta + \frac{2ab}{2a+b}\cos{}^1/_2\Theta'$$

oder

$$\Theta - \Theta' = 180^0$$

folglich ist der Krümmungsradius $\frac{4a(a+b)}{2a+b}\sin{}^1/_2\Theta$.

Der Krümmungsradius in einem Punkte der Evolvente wird $\frac{4a(a+b)}{b}\sin^2{}^1/_2\Theta$ sein, und dieses ist die halbe Länge eines Epicykloidenbogens, wenn $\Theta = 180^0$ ist.

Also ist die Länge

$$= \frac{8a(a+b)}{b} \tag{7}$$

Für die Hypocykloide werden wir die übereinkünftigen Formeln finden, wenn wir $-a$ für a substituiren.

Bestimmen wir die Oberfläche, welche von dem feststehenden Kreise und von dem Epicykloidenbogen eingeschlossen ist.

$$\text{arc}\,CC' = \text{arc}\,B'D' = \text{arc}\,BD$$

folglich ist

$$\text{Wkl. } COC' = \text{Wkl. } BOB'$$

also

$$\text{arc}\,BB' = r(\pi - \Theta)\frac{a}{b}$$

und die Oberfläche $AC'B'D'B$ wird sein

$$a/b \int_0^{\pi} (\pi - \Theta) r\, dr$$

Aber aus der Formel (4) folgt

$$r\,dr = a(a+b)\sin\Theta$$

also ist die Oberfläche

$$O = \frac{a^2(a+b)}{b} \int_0^{\pi} (\pi - \Theta)\sin\Theta\, d\Theta$$

Sei

$$\pi - \Theta = \varepsilon$$

so wird

$$O = \frac{a^2(a+b)}{b} \int_0^{\pi} \varepsilon \sin\varepsilon\, d\varepsilon = \frac{a^2(a+b)}{b} \Big| -\varepsilon\cos\varepsilon + \sin\varepsilon \Big|_0^{\pi}$$

und

$$O = \pi \frac{a^2(a+b)}{b} \tag{8}$$

Die ganze Oberfläche ist:

$$2\pi \frac{a^2(a+b)}{b} + \pi a^2 = \pi \frac{a^2(3b+2a)}{b} \tag{9}$$

Für die Oberfläche, durch den feststehenden Kreis und durch einen Hypocykloidenbogen eingeschlossen, finden wir $\pi \frac{a^2(3b-2a)}{b}$.

Die Summe der beiden Oberflächen ist $6\pi a^2$ (10), was uns lehrt,

dass die Oberfläche umgeben von einem Hypo- und einem Epicykloidenbogen, welche auf demselben feststehenden Kreis beschrieben sind, während die Radii der sich wälzenden Kreise gleich gross sind, immer 6 Mal der Oberfläche des bewegten Kreises gleich ist.

II.

Wenn zwei Kegel einen gemeinschaftlichen Gipfel haben und der eine wälzt sich ohne zu gleiten um den anderen, so wird jeder Punkt, der fest mit dem bewegten Kegel verbunden ist, eine Curve beschreiben, welche auf der Oberfläche einer Kugel gelegen ist, deren Radius der Abstand des Punktes von dem gemeinschaftlichen Gipfel ist. Dieselbe Curve ist auch die Bahn eines Punktes einer Kegeloberfläche, wenn der Kegel sich mit einer constanten Geschwindigkeit um seine Achse dreht, und diese Achse sich auch mit einer constanten Geschwindigkeit über die Oberfläche eines anderen Kegels bewegt, während die beiden Gipfel zusammen fallen.

Um die Gleichungen der Curve zu finden, lassen wir sie auf die erstgenannte Weise entstehen.

Sei der Winkel des feststehenden Kegels b und jener des sich wälzenden a (Fig. 5.), so ist $OM = a + b = e$, und nennen wir den Winkel, welchen die Linie vom Gipfel nach dem Punkte hin mit der Achse des bewegten Kegels macht, f.

Weiter sei Wkl. $AOB = \varphi$ und $OB = \xi$

$$\text{Wkl. } BMC = \Theta \therefore \text{Wkl. } AOM = \Theta \frac{\sin a}{\sin b} = \eta$$

Aus $\triangle BOM$ folgt

$$\cos \xi = \cos e \cos f + \sin e \sin f \cos \Theta \qquad (1)\ ^{1})$$

und

$$\cot f \sin e = \sin \Theta \operatorname{cotg} \chi + \cos e \cos \Theta$$

$$\chi = \eta - \varphi$$

also

$$\varphi = \Theta \frac{\sin a}{\sin b} - \operatorname{arctg} \frac{\sin f \sin \Theta}{\cos f \sin e - \cos e \sin f \cos \Theta} \qquad (2)$$

Wälzt sich der eine Kegel innerhalb des anderen, so findet man die übereinstimmenden Formeln, indem man $-a$ für a substituirt.

Sind $\sin a$ und $\sin b$ zwei unter einander messbare Grössen, deren Verhältniss p/q ist, so kann man auf dieselbe Weise, wie dieses für die ebenen cykloidalen Curven getan ist, zeigen, dass die Curve aus

1) Die Formeln, welche bei den ebenen und bei den sphärischen Cykloiden, durch dieselben arabischen Ziffern angegeben sind, stimmen mit einander überein.

q congruenten Teilen besteht. Bestimmt man den geometrischen Ort der Doppelpunkte, so findet man auf analoge Weise, dass die Doppelpunkte gelegen sind auf den grossen Kreisen, welche durch den Coordinatenanfangspunkt gehend die Kugeloberfläche in $2q$ gleiche Sectoren teilen. Auch können wir beweisen, dass diese Kreise Symmetrielinien sind.

Die Curve kann bloss durch den Coordinatenanfangspunkt gehen, wenn $e = f$ ist; rechnen wir die Anomalie von der nächsten Symmetrielinie, so ist $\varphi = \varphi' + p/q\,\pi$

$$\operatorname{tg}\left\{p/q\,\theta - \varphi - p/q\,\pi\right\} = \operatorname{tg}\left\{p/q(\theta - \pi) - \varphi\right\} = \frac{\sin\theta}{\cos f(1-\cos\theta)}$$

Setzen wir $\theta - \pi = \eta$, so wird:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{p}{q}\eta - \varphi\right) = -\frac{\operatorname{tg}{}^1/_2\eta}{\cos f} \tag{3}$$

Und $$\cos\xi = \cos^2 f - \sin^2 f\cos\eta$$

folglich $$\sin{}^1/_2\xi = \sin f\cos{}^1/_2\eta \tag{3}$$

Aus diesen beiden Formeln kann η nicht eliminirt werden, wie bei den ebenen Cykloiden.

Die Formel eines grossen Kreises auf der Kugel wird in sphärischen Polarcoordinaten sein:

$$\operatorname{cotg}\xi = \sin(p+\varphi)\operatorname{tg} A \tag{I}$$

Hierin sind ξ und φ die Coordinaten, während A der Winkel ist, welchen der Kreis macht mit einem anderen, dessen Pol der Coordinatenanfangspunkt ist, und p der Bogen des letztgenannten Kreises ist zwischen dem Schnittpunkte und dem Punkte, wo $\varphi = 0$ ist.

Wir müssen den Normalkreis bestimmen, d. h. den Kreis, welcher senkrecht auf einem Elemente der Curve steht, oder den Kreis, nach welchem die Normalebene die Kugel schneidet.

Die Gleichung der Normalebene ist

$$(x_1 - x)\,dx + (y_1 - y)\,dy + (z_1 - z)\,dz = 0$$

Für Punkte des Kreises muss sein:

$x = R\sin\xi\cos\varphi$ $\quad y = R\sin\xi\sin\varphi$ und $\quad z = R\cos\xi$

$x_1 = R\sin\xi'\cos\varphi'$ $\quad y_1 = R\sin\xi'\sin\varphi'$ und $\quad z_1 = R\cos\xi'$

während ξ' und φ' die Coordinaten des Elementes sind. Nun ist

$$1 = -R\sin\xi\sin\varphi\frac{d\varphi}{dx} + R\cos\xi\cos\varphi\frac{d\xi}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = R\cos\varphi\sin\xi\frac{d\varphi}{dx} + R\cos\xi\sin\varphi\frac{d\xi}{dx} \qquad \frac{dz}{dx} = -R\sin\xi\frac{d\xi}{dx}$$

Durch Substitution in die Formeln der Normalebene finden wir:

$$R^2\left\{\sin\xi'\cos\varphi'-\sin\xi\cos\varphi\right\}\left\{\cos\xi\cos\varphi\frac{d\xi}{dx}-\sin\xi\sin\varphi\frac{d\varphi}{dx}\right\}$$

$$+R^2\left\{\sin\xi'\sin\varphi'-\sin\xi\sin\varphi\right\}\left\{\cos\varphi\sin\xi\frac{d\varphi}{dx}+\cos\xi\sin\varphi\frac{d\xi}{dx}\right\}$$

$$-R^2\sin\xi\frac{d\xi}{dx}\left\{\cos\xi'-\cos\xi\right\}=0$$

also

$$\frac{d\varphi}{d\xi}\sin(\varphi'-\varphi)=-\operatorname{cotg}\xi\cos(\varphi'-\varphi)+\operatorname{cotg}\xi'$$

Sei nun der Kreis $\operatorname{cotg}\xi=\sin(p+\varphi)\operatorname{tg}A$

so ist auch $\operatorname{cotg}\xi'=\sin(p+\varphi')\operatorname{tg}A$

durch Substitution:

$$\frac{d\varphi}{d\xi}\sin(\varphi'-\varphi)=-\cos(\varphi'-\varphi)\sin(p+\varphi)\operatorname{tg}A+\sin(p+\varphi')\operatorname{tg}A$$

oder
$$\frac{d\varphi}{d\xi}=-\operatorname{tg}A\cos(\varphi+p) \qquad \text{(II)}$$

Die Elimination von $(p+\varphi)$ aus (I) und (II) giebt

$$\operatorname{cotg}^2\xi+\left(\frac{d\varphi}{d\xi}\right)^2=\operatorname{tg}^2A \qquad \text{(III)}$$

Jetzt kann auch p gefunden werden.

Gebrauchen wir dieses für die sphärische Cykloide.

Aus (1) folgt
$$\frac{d\xi}{d\Theta}=\frac{\sin f\sin e\sin\Theta}{\sin\xi}$$

und aus (2)
$$\frac{d\varphi}{d\Theta}=\frac{\sin a}{\sin b}+\frac{\cos e-\cos f\cos\xi}{\sin^2\xi}$$

also

$$\frac{d\varphi}{d\xi}=\frac{\sin^2\xi\sin a+\sin b(\cos e-\cos f\cos\xi)}{\sin b\sin\xi\sin e\sin f\sin\Theta}$$

Diesen Wert substituiren wir in die Formel (III), und nach Reduction finden wir:

$$\operatorname{tg}^2A\sin^2b\sin^2\xi\sin^2e\sin^2f\sin^2\Theta=\cos^2\xi\sin^2b\sin^2e\sin^2f\sin^2\Theta$$
$$+\{\sin^2\xi\sin a+\sin b\}\{\cos e-\cos f\cos\xi\}^2$$

Nun ist $\sin^2e\sin^2f\sin^2\Theta=\sin^2\xi+2\cos\xi\cos e\cos f-\cos^2e-\cos^2f$

Also durch Substitution

$$\operatorname{tg}^2A\sin^2b\sin^2f\sin^2\Theta=\{\sin^2b-\sin^2a\}\cos^2\xi-2\sin b\cos f\cos\xi\times$$
$$(\sin a+\sin b\cos e)+(\sin a+\sin b\cos e)^2$$

Und da $\cos\xi=\cos(e-f)-2\sin e\sin f\sin^2{}^1/_2\Theta$

finden wir

$$\operatorname{tg}^2 A = (\sin^2 a - \sin^2 b) + \sin a \cos a \operatorname{cosec} f \cos f \sec^2 {}^1/_2\,\Theta$$
$$+ {}^1/_4 \sec^2 c \operatorname{cosec}^2 f \sec^2 {}^1/_2\,\Theta \operatorname{cosec}^2 {}^1/_2\,\Theta$$

Für den Normalkreis haben wir gefunden

$$\cos\xi = \sin(p+\varphi)\operatorname{tg} A$$

für $\xi = b$ ist

$$\sin(p+\varphi) = \frac{\cos b}{\operatorname{tg} A} \quad \text{und} \quad \operatorname{tg}^2(p+\varphi) = \frac{\cos^2 b}{\operatorname{tg}^2 A - \cos^2 b}$$

folglich

$$\operatorname{tg}^2(p+\varphi) = \frac{\sin^2\Theta \sin^2 f \cos^2 b}{\sin^2 f \cos^2 a \sin^2\Theta + 4 \sin^2 {}^1/_2\,\Theta \sin a \cos a \sin f \cos f + \sin^2 c}$$

Aber $c = f - a$; also

$$\operatorname{tg}(p+\varphi) = \frac{\sin\Theta \sin f \cos b}{\cos f \sin a - \sin f \cos a \cos\Theta}$$

oder

$$\sin a \operatorname{cotg} f = \sin\Theta \cos b \operatorname{cotg}(p+\varphi) + \cos a \cos\Theta$$

Sei

$$\cos b \operatorname{cotg}(p+\varphi) = \operatorname{cotg}\varepsilon$$

so ist ε der Winkel in einem Dreieck, von welchem a und f die Seiten sind, und Θ der durch diese Seiten eingeschlossene Winkel ist. ε muss der Seite f gegenüber liegen. Dieses ist der Fall in $\triangle BCM$ (Fig. 6.), während in $\triangle DOC \operatorname{tg}(p+\varphi) = -\operatorname{tg}(180^0 - \varepsilon)\cos b$ ist.

Hieraus folgt, dass bei den sphärischen Cykloiden der Normalkreis immer durch den Berührungspunkt der beiden kleinen Kreise auf der Kugel geht.

Liegt der Punkt in der Oberfläche des sich wälzenden Kegels, so ist $f = a$ und die Formeln (1) und (2) werden:

$$\cos\xi = \cos a \cos(a+b) + \sin a \sin(a+b)\cos\Theta \tag{4}$$

und

$$\varphi = \Theta \frac{\sin a}{\sin b} - \operatorname{arc\,tg} \frac{\sin a \sin\Theta}{\cos a \sin(a+b) - \cos(a+b)\sin a \cos\Theta} \tag{5}$$

Der Teil des Normalkreises, der innerhalb des sich wälzenden Kegels liegt, ist bestimmt durch die Formel

$$\sin {}^1/_2\,N = \sin a \sin {}^1/_2\,\Theta \tag{6}$$

unabhängig von dem Winkel des feststehenden Kegels.

Der Tangentkreis, d. h. der grosse Kreis auf der Kugel, welcher ein Element mit der Curve gemein hat, wird senkrecht zur Normalebene stehen, folglich wird er nicht, wie bei den ebenen cykloidalen Curven durch den Punkt des bewegten Kreises gehen, der so weit möglich von dem Coordinatenanfangspunkt liegt.

Man sieht hieraus, dass bei den ebenen Cykloiden die Eigenschaft der Normale wichtiger ist, als jene der Tangente. Dieses folgt auch daraus, dass, wenn der Punkt nicht auf dem bewegten Kreise gelegen ist, die Eigenschaft der Normale bestehen bleibt, doch die der Tangente wegfällt.

Die Frage, ob bei den sphärischen cykloidalen Curven eine Eigenschaft besteht, welche übereinstimmt mit der der Tangente der ebenen cykloidalen Curven, würde nicht ohne Grund sein.

Bringen wir durch M (Fig. 7.) einen grossen Kreis senkrecht zur Normalebene PC, so ist $BC = {}^1/_2 N$ und $\sin {}^1/_2 N = \sin a \sin {}^1/_2 \Theta$. Nun ziehen wir durch den Punkt B der Cykloide einen kleinen Kreis, dessen Ebene parallel ist mit jener des grossen Kreises, welcher durch M gezogen ist, so schneidet dieser den sich wälzenden Kreis noch in einem Punkte E.

Bringt man nun durch E und M grosse Kreise senkrecht zu dem grossen Kreise CD, so schneiden diese einander und den Normalkreis in P, dem Pole des Kreises CD. Es ist

$$BC = FM = ED = {}^1/_2 N$$

$$EM = BM = a$$

also

$$\triangle BCM \cong DME$$

weil beide Dreiecke rechtwinklig sind, folglich

$$\text{Wkl. } BMC = \text{Wkl. } EMD = {}^1/_2 \Theta$$

also

$$\text{Wkl. } BME = 180^0 - \Theta$$

dieses lehrt uns, dass E der Punkt des sich wälzenden Kreises ist, der so weit möglich von dem feststehenden Kreise entfernt liegt. Ziehen wir also durch den Punkt der cykloidalen Linie einen kleinen Kreis, dessen Ebene senkrecht zur Normalebene steht, so wird dieser durch den Punkt des sich wälzenden Kreises gehen, der so weit möglich von dem andern Kreise entfernt ist.

Wird der Radius der Kugel unendlich gross, so gehen der kleine Kreis BE und der Tangentkreis in dieselbe gerade Linie über, namentlich in die Tangente, in dem Punkte B an die ebenen Cykloide gezogen.

Weil der Tangentkreis nicht der genannten Eigenschaft genügt, wird die Evolute der sphärischen Cykloide nicht wieder eine sphärische Cykloide sein.

Ist $b = a$, so muss der eine Kegel sich ausserhalb des anderen wälzen, und so ist

$$\cos\xi = \cos a \cos 2a + \sin a \sin 2a \cos\theta$$

und

$$\cot(\theta - \varphi) = \frac{\sin a \sin\theta}{\sin 2a \cos a - \cos 2a \sin a \cos\theta}$$

Diese Curve wird mit der Kardioide übereinstimmen; aber während alle ebenen Kardioiden gleichförmig sind, ist dies bei den sphärischen Kardioiden nicht der Fall; diese hangen doch von zwei Grössen ab, namentlich von dem Radius der Kugel und von dem Winkel der Kegel.

Ein anderer einfacher Fall, den wir betrachten wollen, ist, dass der feststehende Kegel eine Ebene wird. Dieser Fall stimmt mit der gemeinen ebenen Cykloide überein.

Nun ist

$$b = 90^0$$

also

$$\cos\xi = -\sin 2a \sin^2 {}^1/_2\theta$$

und

$$\varphi = \theta \sin a - \operatorname{arc\,tg} \frac{\sin a \sin\theta}{1 - 2\sin^2 a \sin^2 {}^1/_2\theta} \qquad \text{(IV)}$$

Die Formel für den Normalkreis wird sein

$$\operatorname{cotg}\xi = \sin(p + \varphi) \operatorname{tg} {}^1/_2\theta \cos a$$

Bestimmen wir jetzt p. Dazu haben wir:

$$\sin(p + \varphi) = \frac{\operatorname{cotg}\xi \operatorname{cotg} {}^1/_2\theta}{\cos a}$$

$$\operatorname{cosec}^2(p + \varphi) = \frac{\cos^2 a \sin^2\xi}{\operatorname{cotg}^2 {}^1/_2\theta \cos^2\xi} = 1 + \operatorname{cotg}^2(p + \varphi)$$

$$\operatorname{cotg}(p + \varphi) = \pm \frac{1 - 2\sin^2 a \sin^2 {}^1/_2\theta}{\sin a \sin\theta}$$

folglich nach (IV)

$$p + \varphi = -(\theta \sin a - \varphi) \quad \text{oder} \quad p = -\theta \sin a$$

Dieses war zu erwarten, weil der Normalkreis durch den Punkt gehen muss, worin der sich wälzende Kreis die Ebene berührt. Der Normalkreis ist in diesem Falle also

$$\operatorname{cotg}\xi = \sin(\varphi - \theta \sin a) \operatorname{tg} {}^1/_2\theta \cos a$$

Setzen wir endlich den Fall, dass $a = 90^0$ ist; nun bewegt sich ein Kreis auf solche Weise, dass sein Mittelpunkt in dem Gipfel eines Kegels liegt und seine Ebene die Kegeloberfläche berührt.

Nun ist

$$\cos\xi = \cos b \cos\theta$$

und

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{\sin b}-\varphi\right)=\frac{\operatorname{tg}\theta}{\sin b}$$

Weiter finden wir

$$\operatorname{tg} A=\operatorname{cotg} b$$

und der Winkel x, den der Normalkreis mit dem sphärischen Radius des feststehenden Kreises macht, gleich 90^0. Der sich bewegende Kreis ist also zugleich Normalkreis für die jetzt entstandene sphärische Cykloide.

Die Gleichung des Normalkreises ist also

$$\operatorname{cotg}\xi=\operatorname{cotg} b\sin(p+\varphi)$$

Hierin muss p noch bestimmt werden. Man hat:

$$\operatorname{cotg}(p+\varphi)=\frac{\operatorname{tg}\theta}{\sin b}=\operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{\sin b}-\varphi\right)$$

folglich

$$p=90^0-\frac{\theta}{\sin b}$$

Also ist die Formel des Normalkreises

$$\operatorname{cotg}\xi=\operatorname{cotg} b\cos\left(\varphi-\frac{\theta}{\sin b}\right)$$

Für ein anderes Element soll sein

$$\operatorname{cotg}\xi=\operatorname{cotg} b\cos\left(\varphi-\frac{\theta'}{\sin b}\right)$$

Der Schnittpunkt der Normale wird gegeben durch

$$\cos\left(\varphi-\frac{\theta}{\sin b}\right)=\cos\left(\varphi-\frac{\theta'}{\sin b}\right)$$

oder

$$\operatorname{tg}\varphi=-\frac{\cos\frac{\theta}{\sin b}-\cos\frac{\theta'}{\sin b}}{\sin\frac{\theta}{\sin b}-\sin\frac{\theta'}{\sin b}}$$

Nähern sich die Punkte die Curve entlang, so wird

$$\operatorname{tg}\varphi=-\frac{D\cos\frac{\theta}{\sin b}}{D\sin\frac{\theta}{\sin b}}=\operatorname{tg}\frac{\theta}{\sin b}$$

folglich

$$\varphi=\frac{\theta}{\sin b}$$

und also auch

$$\xi=b$$

Dieses lehrt uns, dass in diesem Falle der feststehende kleine Kreis die Evolute dieser sphärischen Cykloide ist, oder umgekehrt diese Cykloide die sphärische Evolvente eines kleinen Kreises der Kugel ist. Diese Curve stimmt mit der ebenen Evolvente eines Kreises überein, denn diese können wir doch auch wie eine Cykloide betrachten, weil sie der Weg eines Punktes ist, der auf einer geraden Linie, welche um einen Kreis wälzt, liegt.

Jetzt wollen wir die Länge eines sphärischen Cykloidenbogens bestimmen. Bei dem gebrauchten Systeme von sphärischen Polarcoordinaten ist:

$$ds = R\sqrt{\{d\xi^2 + \sin^2\xi\, d\varphi^2\}}$$

Substituiren wir hierin die gefundenen Werte für $\frac{d\xi}{d\Theta}$ und $\frac{d\varphi}{d\Theta}$, so ist:

$$ds = Rd\Theta\sqrt{\left[\frac{\sin^2 a\sin^2(a+b)\sin^2\Theta}{\sin^2\xi} + \frac{\sin^2 a}{\sin^2 b\sin^2\xi}\right.}$$
$$\left.\{\sin^2\xi - \sin^2 b + 2\cos a\sin(a+b)\sin b\sin^2 {}^1/_2\Theta\}^2\right]$$

$$ds = \frac{R}{\sin b\sin\xi}\, d\Theta\sqrt{[\sin^2 b\{\sin^2 a - \cos^2(a+b) - \cos^2\xi}$$
$$+ 2\cos\xi\cos a\cos(a+b)\} + \{\sin a\cos^2 b - \sin a\cos^2\xi - (\cos\xi - \cos b)\cos a\sin b\}^2]$$

$$\therefore ds = \frac{Rd\Theta}{\sin b}\sqrt{\{-\cos^2\xi\sin^2 a - 2\cos\xi\sin b\cos a\sin a + \sin^2 a\cos^2 b}$$
$$+ 2\sin a\cos a\sin b\cos b]$$

$$= \frac{R}{\sin b}d\Theta\sqrt{[-\{\cos\xi\sin a + \sin b\cos a\}^2 + \sin^2(a+b)]}$$

$$= \frac{R}{\sin b}d\Theta\sqrt{[-\{\sin(a+b) - 2\sin^2 a\sin(a+b)\sin^2 {}^1/_2\Theta\}^2 + \sin^2(a+b)]}$$

also

$$ds = \frac{2R\sin^2 a\sin(a+b)}{\sin b}\sin {}^1/_2\Theta\, d\Theta\sqrt{\operatorname{cotg}^2 a + \cos^2 {}^1/_2\Theta}$$

Die Länge eines sphärischen Cykloidenbogens ist also

$$s = \frac{2R\sin^2 a\sin(a+b)}{\sin b}\int_0^{2\pi}\sin {}^1/_2\Theta\, d\Theta\sqrt{\operatorname{cotg}^2 a + \cos^2 {}^1/_2\Theta}$$

$$\cos {}^1/_2\Theta = y \quad \therefore \quad -\sin {}^1/_2\Theta\, d\Theta = 2dy$$

$$s = \frac{4R\sin^2 a\sin(a+b)}{\sin b}\int_0^1 dy\sqrt{\operatorname{cotg}^2 a + y^2}$$

$$\int dy \sqrt{\operatorname{cotg}^2 a + y^2} = {}^1/_2 y \sqrt{\operatorname{cotg}^2 a + y^2} + {}^1/_2 \operatorname{cotg}^2 a \, l\left(y + \sqrt{\operatorname{cotg}^2 a + y^2}\right)$$

also

$$\int_0^1 dy \sqrt{\operatorname{cotg}^2 a + y^2} = {}^1/_2 \operatorname{cosec} a + {}^1/_2 \operatorname{cotg}^2 a \, l \frac{1 + \operatorname{cosec} a}{\operatorname{cotg} a}$$

und

$$L = \frac{2R \sin(a+b)}{\sin b} \left\{ \sin a + \cos^2 a \, l \frac{1 + \sin a}{\cos a} \right\} \qquad (7)$$

Für $a = 90^0$ wird

$$L = 2R \operatorname{cotg} b$$

Den Teil der Kugeloberfläche, der eingeschlossen ist durch den feststehenden Kreis und durch den Cykloidenbogen, finden wir auf die folgende Weise. (Fig. 8.)

$$\text{arc } AC = \text{arc } BC \quad \text{und} \quad \text{arc } AC' = \text{arc } CD$$

also

$$\text{arc } CC' = \text{arc } BD$$

folglich ist

$$\text{arc } CC' = (\pi - \theta) R \sin a$$

Der Winkel COC' ist nun $(\pi - \theta) \dfrac{\sin a}{\sin b}$, aber

$$\text{Wkl. } COC' = \text{Wkl. } BOB'$$

folglich ist

$$\text{arc } BB' = R(\pi - \theta) \frac{\sin a}{\sin b} \sin \xi$$

die Oberfläche eines unendlich schmalen Streifens BB' wird dann sein

$$R^2 \frac{\sin a}{\sin b} (\pi - \theta) \sin \xi \, d\xi$$

Und die Oberfläche O' der Figur $AD'B'C'$

$$= R^2 \frac{\sin a}{\sin b} \int_0^{\pi} (\pi - \theta) \sin \xi \, d\xi$$

Wir haben gefunden

$$\sin \xi \, d\xi = \sin(a+b) \sin a \sin \theta \, d\theta$$

also ist

$$O' = R^2 \frac{\sin^2 a \sin(a+b)}{\sin b} \int_0^{\pi} (\pi - \theta) \sin \theta \, d\theta$$

Sei

$$\pi - \theta = \xi$$

$$O' = R^2 \frac{\sin^2 a}{\sin b} \sin(a+b) \int_0^{\pi} \varepsilon \sin \varepsilon \, d\varepsilon$$

die Integration giebt

$$O' = \pi R^2 \frac{\sin^2 a \sin(a+b)}{\sin b} \tag{8}$$

Die gesuchte Oberfläche O ist gleich an zweimal die Oberfläche der Figur $AD'B'C'$ vermehrt um die Oberfläche des Kugelsegmentes $C'B'D'$. Folglich

$$O = 2\pi R^2 \frac{\sin^2 a \sin(a+b)}{\sin b} + 2\pi R^2(1-\cos a) \tag{V}$$

$$= 2\pi R^2 \frac{1-\cos a}{\sin b} \left\{ (1+\cos a)\sin(a+b) + \sin b \right\}$$

$$= 2\pi R^2 (1-\cos a) \left\{ \frac{\sin a}{\operatorname{tg} b}(1+\cos a) + (\cos^2 a + \cos a + 1) \right\} \tag{9}$$

Wälzt sich der eine Kegel innerhalb des anderen, so wird (V)

$$2\pi R^2 \frac{\sin^2 a \sin(b-a)}{\sin b} + 2\pi R^2(1-\cos a)$$

Und also ist die Oberfläche der Kugel, die durch die beiden Cykloidenbogen eingeschlossen ist

$$2\pi R^2 \left\{ \frac{\sin^2 a}{\sin b}(2\sin b \cos a) + 2(1-\cos a) \right\} = 4\pi R^2(1-\cos^3 a) \tag{10}$$

Ist $b = 90^0$, so ist die Oberfläche, durch die Cykloidenbogen und den Kreis eingeschlossen, nach (9)

$$2\pi R^2(1-\cos a)\{\cos^2 a + \cos a + 1\} = 2\pi R^2(1-\cos^3 a)$$

Ist $a = 90^0$, so ist die eingeschlossene Kugeloberfläche gleich

$$2\pi R^2\{\operatorname{cotg} b + 1\}$$

Bei der sphärischen Kardioide, wo $a = b$, wird die Oberfläche

$$2\pi R^2(1-\cos a)\{2\cos^2 a + 2\cos a + 1\}$$

Fügen wir hierzu die Oberfläche, welche der feststehende Kegel aus der Kugel schneidet, so finden wir für die ganze Oberfläche der sphärischen Kardioide

$$4\pi R^2(1-\cos^3 a)$$

Amersfoort, November 1887.

XIV.

Potential einer elliptischen Walze.

Von

Ulrich Bigler.

Fortsetzung von T. VI. Nr. XIII.

Dritter Teil.

VI. Potential der elliptischen Walze von der Dichtigkeit 1, umschlossen von

$$\frac{X^2}{A}+\frac{Y^2}{B}<1, \quad 0<Z<c,$$

in Bezug auf den Punkt (x, y, z).

$(z>c)$.

§ 16. Ableitung des Potentials.

Das Potential der unendlich dünnen Scheibe $h<Z<h+dh$ sei Rdh. Wenn $\overline{W}^2=1-\frac{x^2}{A+u}-\frac{y^2}{B+u}-\frac{(z-h)^2}{u}$ und

$U^2=(A+u)(B+u)u$ (U, $\overline{W}$ pos. für $u>t$), so ist

$$R=2\sqrt{AB}\int_t^\infty \overline{W}.\frac{du}{U}$$

und es gilt $\int_0^c Rdh$ zu berechnen. Die Umkehrung der Folge der Integration bereitet einige Schwierigkeit. Die Werte von t und $\overline{W}$, die zu $h=0$ gehören, seien mit t_0, W_0 und diejenigen, die zu $h=c$ gehören, mit t_1, W_1 bezeichnet. Die Differentiation der Gleichung $\overline{W}^2(t)=0$ gibt

$$\left(\frac{x^2}{(A+t)^2}+\frac{y^2}{(B+t)^2}+\frac{(z-h)^2}{t^2}\right)dt+2\frac{z-h}{t}\cdot dh=0$$

und zeigt, da $\frac{z-h}{t}$ pos. ist, dass t sinkt, während h steigt; also

$$t_1 < t < t_0$$

Ich betrachte nun h als Function von t und erhalte

$$V=\int_{t_1}^{t_0} R\left(-\frac{\partial h}{\partial t}\right)dt=2\sqrt{AB}\int_{t_1}^{t_0}\left(\int_{t}^{\infty}\frac{W}{U}\,du\right)\cdot\left(-\frac{\partial h}{\partial t}\right)dt$$

Man denke sich ein rechtwinkliges Coordinatensystem Fig. 21. Auf der Abscissenaxe werden die u und auf der Ordinatenaxe die t abgetragen. Die dritte räumliche Coordinate im Punkte (t, u) stelle den Wert des Integranden dar; die Integration nach u erstreckt sich über einen unendlich schmalen Streifen $\overline{FG}$, der im Punkte F auf der Halbirungslinie des rechten Winkels beginnt und sich bis in den Horizont erstreckt. Die Integration nach t summirt alle diese Streifen von $t=t_1$ bis $t=t_0$, also von A bis B. Das Doppelintegral dehnt sich also über das Trapez $ADEB$ aus. Zum Zwecke der Umkehrung der Folge der Integration teile ich dieses Trapez in zwei Teile ein. Der erste Teil umfasst das Dreieck ABC und der zweite das Rechteck $BCDE$. Integriren wir zuerst nach t, so läuft diese Variable im ersten Teile von t_1 bis u und im zweiten von t_1 bis t_0, während die Variable u im ersten Teile von t_1 bis t_0 und im zweiten von t_0 bis $+\infty$ läuft. Es ist demnach

$$V=2\sqrt{AB}\left[\int_{t_1}^{t_0}\left(\int_{t_0}^{u}W\cdot\left(-\frac{\partial h}{\partial t}\right)dt\right)\cdot\frac{du}{U}\right.$$
$$\left.+\int_{t_0}^{\infty}\left(\int_{t_1}^{t_0}\left(W\left(-\frac{\partial h}{\partial t}\right)dt\right)\cdot\frac{du}{U}\right]\right.$$

Das erste innere Integral ist $\int_{h_0}^{c} W dh$, wenn als untere Grenze h_0 derjenige Wert von h genommen wird, für welchen W verschwindet, der also durch die Gleichung

$$(z-h_0)^2=u\left(1-\frac{x^2}{A+u}-\frac{y^2}{B+u}\right)$$

bestimmt wird. Man setze nun

$$P(u) = u\left(1 - \frac{x^2}{A+u} - \frac{y^2}{B+u}\right)$$

so dass

$$u\,\overline{W}^2 = P(u) - (z-h)^2$$

wird. Das Integral

$$\int \overline{W}\,dh = \int \frac{\sqrt{P(u) - (z-h)^2}}{\sqrt{u}}\,dh$$

führt also zu Kreisbogen. Es ist

$P(t) = (z-h)^2$ und weil $z-h$ positiv, so ist

$$\sqrt{P(t)} = z-h, \quad \sqrt{P(t_1)} = z-c, \quad \sqrt{P(t_0)} = z$$

(Die Function $P(u)$ nimmt ferner mit wachsendem u zu). Wenn daher

$$\frac{P(t)}{P(u)} = \cos^2\varphi, \quad \frac{\sqrt{P(t)}}{\sqrt{P(u)}} = \cos\varphi$$

folglich

$$\overline{W}\sqrt{u} = \sqrt{P(u)}\sin\varphi$$

gesetzt wird, so ist

$$dh = \sqrt{P(u)}\sin\varphi\,d\varphi$$

und

$$\int \overline{W}\,dh = \frac{P(u)}{\sqrt{u}}\int \sin^2\varphi\,d\varphi = \frac{P(u)}{2\sqrt{u}}(\varphi - \sin\varphi\cos\varphi)$$

$$= \left[\frac{P(u)}{2\sqrt{u}}\varphi - \frac{z-h}{2}\,\overline{W}\right]$$

Wenn $h = h_0$, so ist $\overline{W} = 0$, folglich auch $\varphi = 0$. Wenn $h = c$, so sei $\varphi = \theta_1$, und wenn $h = 0$, sei $\varphi = \theta_0$. Also ist

$$\int_{t_1}^{u} \overline{W}\left(-\frac{\partial h}{\partial t}\right)dt = \frac{P(u)}{2\sqrt{u}}\theta_1 - \frac{z-c}{2}W_1$$

ebenso

$$\int_{t_1}^{t_0} \overline{W}\left(-\frac{\partial h}{\partial t}\right)dt = \frac{P(u)}{2\sqrt{u}}(\theta_1 - \theta_0) - \frac{z-c}{2}W_1 + \frac{z}{2}W_0$$

Man hat also

$$V = \sqrt{AB}\left[\int_{t_1}^{t_u}\left(\frac{P(u)}{\sqrt{u}}\theta_1 - (z-c)W_1\right)\frac{du}{U}\right.$$

$$\left. + \int_{t_0}^{\infty}\left(\frac{P(u)}{\sqrt{u}}(\theta_1 - \theta_0) - (z-c)W_1 + zW_0\right)\cdot\frac{du}{U}\right]$$

Man versuche, die auf die untere Grundfläche ($h = 0$) und auf die obere ($h = c$) bezüglichen Ausdrücke von einander zu trennen. Wenn u sehr gross wird, so nähert sich $\cos\varphi$ dem Werte $\frac{z-h}{\sqrt{u}}$, also also φ dem Werte $\frac{\pi}{2} - \frac{z-h}{\sqrt{u}}$. Das Integral $\int \frac{P(u)}{\sqrt{u}} \cdot \frac{du}{U}$ verhält sich für ein sehr grosses u wie $\int \frac{du}{u}$, kann also nicht bis zu $u = \infty$ geführt werden. Wegen dieser Divergenz der einzelnen Integrale muss die Zerlegung des Pot. V in Einzelintegrale mit Vorsicht geschehen. Das Integral

$$\int_t^\infty \frac{P(u)}{U\sqrt{u}} \left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) du$$

convergirt an der untern Grenze wie

$$\int^\infty \frac{du}{(u)^{\frac{3}{2}}} = -2\left\{\frac{1}{u^{\frac{1}{2}}}\right\}$$

Man kann also schreiben:

$$V = \sqrt{AB} \cdot \frac{\pi}{2} \int_{t_1}^{t_0} \frac{P(u)}{U\sqrt{u}}\, du + \sqrt{AB} \int_{t_0}^\infty \left(\frac{P(u)}{\sqrt{u}} \left(\frac{\pi}{2} - \theta_0\right) + z W_0\right) \cdot \frac{du}{U}$$

$$- \sqrt{AB} \int_{t_1}^\infty \left(\frac{P(u)}{\sqrt{u}} \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \theta_1\right) + (z-c) W_1\right) \cdot \frac{du}{U}$$

Das Integral des ersten Termes, unbestimmt gefasst, ist

$$\int \left(1 - \frac{x^2}{A+u} - \frac{y^2}{B+u}\right) \cdot \frac{du}{\sqrt{(A+u)(B+u)}} = 2L(u), \quad \text{wo}$$

$$L(u) = \log\left(\sqrt{A+u} + \sqrt{B+u}\right) - \frac{x^2}{A-B}\sqrt{\frac{B+u}{A+u}} + \frac{y^2}{A-B}\sqrt{\frac{A+u}{B+u}}$$

Der erste Term ist also $\pi\sqrt{AB}(L(t_0) - L(t_1))$. Das Potential der elliptischen Walze ist nun für $z > c$ durch den Ueberschuss einer Function von z über dieselbe Function von $z - c$ (wenn x, y fest bleiben) dargestellt:

$$V = \sqrt{AB}\left[\pi L(t_0) + \int_{t_0}^\infty \left(\frac{P(u)}{\sqrt{u}} \left(\frac{\pi}{2} - \theta_0\right) + z W_0\right) \cdot \frac{du}{U}\right]$$

$$- \sqrt{AB}\left[\pi(L(t_1) + \int_{t_1}^\infty \left(\frac{P(u)}{\sqrt{u}} \left(\frac{\pi}{2} - \theta_1\right) + z W_1\right) \cdot \frac{du}{U}\right]$$

Man kann diesen, Ausdruck durch $F(z)-F(z-c)$ wieder geben, wenn man die Function $F(z)$, zunächst für ein pos. z., auf folgende Weise definirt.

Es sei

$$W^2 = 1 - \frac{x^2}{A+u} - \frac{y^2}{B+u} - \frac{z^2}{u}$$

identisch mit $\frac{(u-t)(u-t')(u-t'')}{(A+u)(B+u)u}$, wo $t > 0 > t' > -B > -t'' > -A$.

$$U^2 = (A+u)(B+u)u,$$

$$P(u) = u\left(1 - \frac{x^2}{A+u} - \frac{y^2}{B+u}\right)$$

identisch mit $\frac{u(u-t)(u-s'')}{(A+u)(B+u)}$, $\sqrt{P}\cos\eta = W\sqrt{u}$,

$$\sqrt{P}\sin\eta = z$$

Wenn u pos. nnd grösser als t, so seien U, W, $\sqrt{P}$ pos., $0 < \eta < \frac{\pi}{2}$. Endlich sei

$$\log(\sqrt{A+u}+\sqrt{B+u}) - \frac{x^2}{A-B}\sqrt{\frac{B+u}{A+u}} + \frac{y^2}{A+B}\sqrt{\frac{A+u}{B+u}} = L(u)$$

dann ist

$$F(z) = \sqrt{AB}\left[\pi L(t) + \int_t^\infty \left(\frac{P(u)}{\sqrt{u}}\eta + zW\right)\cdot\frac{du}{U}\right]$$

(Die Function $F(z)$ ist nun diejenige Function, von welcher Herr Hattendorff in seinem Buche über Schwere, Elektricität und Magnetismus bemerkt, dass sie sich durch ein einfaches Integral nicht darstellen lasse). Auf dem u Felde nehmen wir zwei Uebergangslinien an. Die erste verbinde den Verzweigungspunkt t mit dem Ostpunkte und die zweite die Verzweigungspunkte t'' und t'. Auf dem südlichen Rande der ersten Uebergangsl. seien $\sqrt{P(u)}$, W, U, η pos. Um die Differentiation bedeutend zu erleichtern, verwandle ich die Function $F(z)$ in ein Schlingenintegral, das den Term $L(t)$ in sich aufgenommen hat. Weil

$$\int \frac{P(u)}{U\sqrt{u}}du = 2L(u), \quad \frac{\partial\eta}{\partial u} = -\tfrac{1}{2}\frac{P'(u)z}{P(u)W\sqrt{u}}$$

so ist

$$\int \frac{P}{U\sqrt{u}}\eta\,du = \{2\eta L(u)\} + \int L(u)\frac{zP'}{PW\sqrt{u}}du$$

In $u = t$ ist $\eta = \frac{\pi}{2}$, und in $u = \infty$ ist $\eta = \frac{z}{\sqrt{u}}$, $L(u) = \frac{1}{2}\log$, folglich

$$L(u).\eta = 0$$

Daher ist

$$\int_t^\infty \frac{P}{U\sqrt{u}}\eta\,du = -\pi L(t) + \int_t^\infty L(u)\frac{zP'}{PW\sqrt{u}}du$$

folglich

$$F(z) = \sqrt{AB}\int_t^\infty \left(L(u)\frac{zP'}{PW\sqrt{u}} + \frac{zW}{U}\right)du$$

Ein ganzer Umlauf, der weder 0 noch s einschliesst, um t führt W, folglich auch den Integrand in sein entgegengesetztes über.

Man kann also aus dem Ostpunkte um t eine rechtläufige Schlinge legen, die 0 und s draussen lässt und auf der Realitätslinie östlich von t auf dem Südrande der Uebergangslinie W zugleich mit du pos. annehmen. Für einen solchen Weg ist

$$F(z) = \tfrac{1}{2}\sqrt{AB}\int\left(L(u)\frac{zP'}{PW\sqrt{u}} + z\frac{W}{U}\right)du$$

§ 17. Nähere Betrachtung der Function $F(z)$.

Dieser Abschnitt beschäftigt sich A) mit der Function $F(z)$ selbst, B) mit ihren ersten Abgeleiteten und C) mit ihrem Differentialparameter zweiter Ordnung.

A) *Die Function* $F(z)$.

a) Fortsetzung der Function $F(z)$ aus der Gegend, wo z pos. ist, in die Gegend hinüber, wo z neg. ist, während x, y ungeändert bleiben.

1) $s > 0$, d. h. der Punkt $(x, y, 0)$ liegt ausserhalb der Ellipse.

Die aus der Gleichung $W^2 = 0$ hervorgehende Differentialgl.

$$\left(\frac{x^2}{(A+t)^2} + \frac{y^2}{(B+t)^2} + \frac{z^2}{t^2}\right)dt - 2\frac{z}{t}dz = 0 \quad \text{(gilt auch für } t', t'')$$

zeigt, dass, wenn z pos., dz neg. ist, dann dt neg. und dt', dt'' pos. sind. Wenn also z auf 0 sinkt, so sinkt t auf s herab und t' und t'' steigen resp. zu 0 und s'' auf. Der Schlingenweg, der im letzten Ausdrucke für $F(z)$ die Realitätslinie zwischen s und t durchschnei-

den soll, kann zuletzt nicht mehr zwischen durch. Da nämlich $\frac{P'}{P}$ den Term $\frac{1}{u-s}$ enthält und

$$\frac{1}{W\sqrt{u}} = \frac{\sqrt{(A+u)(B+u)}}{\sqrt{(u-t)(u-t')(u-t'')}}$$

ist, so wird $\int L(u) \frac{P'}{PW\sqrt{u}}\, du$ unstetig wie Const $\times \int \frac{du}{(u-s)^{\frac{3}{2}}}$ d. h wie $\frac{\text{Const}}{\sqrt{(u-s)}}$ und ein Teil des Ausdruckes für $F(z)$ nimmt die Form $0 \times \infty$ an. Um diesen Uebelstand schon, wenn z noch pos. ist, abzuwehren, verbinde man die rechtläufige Schlinge um t mit einem kleinen rechtläufigen Kreise um s zu einer vom Ostpunkte aus um s und t gelegten Schlinge, welche die Realitätsl. zwischen 0 und s durchschneidet, und addire das auf einen rückläufigen Kreis um s bezügliche Integral. Zunächst soll dieses letzte Integral berechnet werden. Weil W auf dem Wege nach dem Ostpunkte hin pos. ist, so ist es zwischen 0 und t, also auch in s, südlich lateral.

$$W^2(s) = 1 - \Sigma \frac{x^2}{A+s} = -\frac{z^2}{s}$$

also

$$W(s) = -i\frac{z}{\sqrt{s}};$$

in $u = s$ ist

$$\frac{zL(u)}{W\sqrt{u}} = -\frac{L(s)}{i}$$

Von $\frac{P'}{P}$ kommt nur der Term $\frac{1}{u-s}$ in Betracht. Also ist hier

$$\int L(u) \frac{zP'}{PW\sqrt{u}}\, du = 2\pi L(s)$$

folglich

$$F(z) = \sqrt{AB}\,\pi L(s) + \tfrac{1}{2}\sqrt{AB} \int \left(L(u) \frac{zP'}{PW\sqrt{u}} + z\frac{W}{U} \right) du$$

(Weg eine rückläufige Schlinge aus dem Ostpunkte um s und t; die Realitätsl. wird nur einmal zwischen 0 und s durchschnitten; östlich von t können Hinweg und Rückweg in die Realitätsl. fallen und W ist dann auf dem Rückwege pos.)

Dieser Ausdruck gestattet nun den Durchgang von z durch 0. Wenn x und y fest bleiben und nur z fortwährend abnimmt, so bleibt s, daher auch der Integrationsweg, unverändert. In jeder Stelle dieses Weges bleiben $\frac{P'}{P}$ und U und L unverändert; nur W variirt,

geht aber nie durch 0 und kehrt daher, wenn s in seinem entgegengesetzten Werte angelangt ist, auf denselben Wert zurück. Man hat also

$$F(-z) = \sqrt{AB}\,\pi L(s) - \tfrac{1}{2}\sqrt{AB}\int\Big(L(u)\,\frac{zP'}{PW\sqrt{u}} + z\,\frac{W}{U}\Big)\,du$$

(Weg wie oben)

folglich

$$F(z) + F(-z) = 2\sqrt{AB}\,\pi L(s)$$

also

$$F(0) = \sqrt{AB}\,\pi L(s)$$

$\mathfrak{B})$ $s < 0$, d. h. der Punkt $(x, y, 0)$ liegt innerhalb der Ellipse.

Wenn z von einem pos. Werte auf null herabsinkt, so sinkt t auf 0 und t', t'' steigen resp. zu s, s'' auf. Der Integrationsweg der Gleichung

$$F(z) = \tfrac{1}{2}\sqrt{AB}\int\Big(L(u)\,\frac{zP'}{PW\sqrt{u}} + z\,\frac{W}{U}\Big)\,du$$

(Weg eine rechtl. Schlinge aus dem Ostp. um t allein) ist zuletzt nicht mehr im Stande zwischen 0 und t hindurchzugehen. Man erweitere ihn daher zu einer Schlinge, welche die Realitätsl. nur einmal, nämlich zwischen s und 0, durchschreitet und während der ganzen Zeit, wo z abnehmend durch 0 hindurch geht, fest bleibt, und addire zum neuen Integrale dasjenige längs eines kleinen rückläufigen Kreises um 0 allein. Dieses Integral um 0 soll berechnet werden. W ist zwischen 0 und t südlich lateral, kann also durch $-i\sqrt{\frac{(t-u)(u-t')(u-t'')}{(A+u)(B+u)u}}$ dargestellt werden. Von

$$\frac{P'}{P} = \frac{1}{u} + \frac{1}{u-s} + \frac{1}{u-s''} - \frac{1}{A+u} - \frac{1}{B+u}$$

kommt nur der Term $\frac{1}{u}$ in Betracht. $\frac{zL(u)}{W\sqrt{u}}$ wird

$$iL(0)\,\frac{z\sqrt{AB}}{\sqrt{tt't''}} = iL(0)$$

oder einfacher

$$\frac{zL(u)}{W\sqrt{u}} = \frac{izL(u)}{\sqrt{z^2 + u\Big(\frac{x^2}{A+u} + \frac{y^2}{B+u} - 1\Big)}}$$

wird $iL(0)$ und gibt mit $\frac{du}{u}$ multipl. und integrirt $2\pi L(0)$;

$$z\frac{W}{U} = -iz\frac{\sqrt{(z^2-P)}}{\sqrt{(A+u)(B+u)}}, \frac{1}{u}$$

gibt

$$\frac{-iz^2}{\sqrt{AB}}\int\frac{du}{u} = -\frac{2\pi z^2}{\sqrt{AB}}$$

Man bekommt so für ein pos. z:

$$F(z) = \pi\sqrt{AB}\,L(0) - \pi z^2 + \tfrac{1}{2}\sqrt{AB}\int\left(L(u)\cdot\frac{zP'}{PW\sqrt{u}} + z\frac{W}{U}\right)du$$

(Schlinge aus dem Ostpunkte um null und t, welche die Realitätslinie im Endlichen nur einmal, nämlich zwischen s und 0 passirt. Wenn östlich von t ein Teil des Weges in die Realitätslinie verschoben wird, so sei W gleichartig mit du; es ist dann gleichgültig, ob die Schlinge rechtläufig oder rückläufig sei). Weil der Weg festliegt, während z sich bewegt und in seinen entgegengesetzten Wert übergeht, und weil dann W zu seinem früheren Werte zurückkehrt, so geht jedes Element des Integrals in seinen entgegengesetzten Wert über, wenn z in seinem entgegengesetzten Werte angelangt ist.

$$F(-z) = \pi\sqrt{AB}\,L(0) - \pi z^2 - \tfrac{1}{2}\sqrt{AB}\int\left(L(u)\cdot\frac{zP'}{PW\sqrt{u}} + z\frac{W}{U}\right)du$$

(Weg wie bei $F(z)$)

folglich

$$F(z) + F(-z) = 2\pi(\sqrt{AB}\,L(0) - z^2)$$

also

$$F(0) = \pi\sqrt{AB}\,L(0)$$

b) Die Function $F(z)$ ist im Raume nicht eindeutig; denn sie kehrt nach einem Umlaufe um die Grundcurve, der ihre Ebene das eine Mal innerhalb, das andere Mal ausserhalb schneidet, nicht mehr auf ihren früheren Wert zurück. Die Grundcurve ist eine Unstetigkeitscurve der Function.

Man wähle 4 Punkte (bei denen die zwei ersten Coord. pos. sind) (x_1, y_1, z_1), $(x_1, y_1, -z_1)$ mit pos. s_1 und (x_2, y_2, z_2), $(x_2, y_2, -z_2)$ mit neg. s_2. Es wird hinreichen, sie nur mit den dritten Coordinaten zu bezeichen. Man führe die Function oberhalb der Ebene $z = 0$ vom ersten Punkte zum dritten, durch die Ebene hindurch zum vierten, unterhalb zum zweiten und endlich durch die Ebene hindurch zum ersten Punkte zurück. Wenn die Function $\overline{F}(z)$ geradezu durch das Integral $\frac{1}{2}\sqrt{AB}\int\left(L(u)\frac{zP'}{PW\sqrt{v}} + z\frac{W}{U}\right)du$ (Schlinge um t, welche die Realitätslinie zwischen t und s schneidet) dargestellt werden kann, so soll sie ihr Zeichen $F(z)$ behalten. Wenn aber ihre

Fortsetzung nur mittelbar ausgedrückt werden kann, so soll sie mit $F(z)$ bezeichnet sein. Auf dem Wege vom Punkte (z_1) zum Punkte (z_2) bleibt derselbe Integralausdruck; die Function $F(z_1)$ geht in $F(z_2)$ über. Hat der bewegte Punkt von oben nach unten die Grundebene durchschnitten und ist in $(-z_2)$ angelangt, so ist

$$\overline{F}(-z_2) = 2\pi\sqrt{AB}\,L(0)_2 - 2\pi z_2^2 - F(z_2)$$

Auf dem Wege unterhalb der Ebene nach $(-z_1)$ geht dieser Ausdruck fort, ohne eine Aenderung zu bedürfen,

$$\overline{F}(-z_1) = 2\pi\sqrt{AB}\,L(0)_1 - 2\pi z_1^2 - F(z_1)$$

Auf dem letzten Wege von unten nach oben zu (z_1) zurück bleibt $L(0)$ während der ganzen senkrecht aufsteigenden Bewegung sich gleich, z_1^2 sinkt auf 0 und steigt zu z_1^2 auf; $F(z_1)$ endlich wird zu $2\pi\sqrt{AB}\,L(s_1) - F(z_1)$; also ist

$$\overline{F}(z_1) = F(z_1) + 2\pi\sqrt{AB}\,(L(0) - L(s_1)) - 2\pi z_1^2$$

oder

$$\overline{F}(z) = F(z) + 2\pi\sqrt{AB}\,(L(0) - L(s)) - 2\pi z^2$$

wo s die grössere Wurzel der Gleichung $\frac{P(u)}{u} = 0$ ist, mag diese positiv oder negativ sein. Die Function $F(z)$ ist also im Raume mehrdeutig; denn man kann die Grundcurve mehrmals umlaufen, wodurch immer das Hinzutreten des Termes $2\pi\sqrt{AB}(L(0) - L(s)) - 2\pi z^2$ bedingt wird. In allen Punkten des Raumes, welche der Gleichung $\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} = 1$ genügen, ist

$$\overline{F}(z) = F(z) - 2\pi z^2$$

d. h. ein Umlauf von einem solchen Punkte aus in der angegebenen Richtung um die Grundcurve bewirkt das Hinzutreten des Termes $-2\pi z^2$ zu der ursprünglichen Function.

c) Ueber den Wert von $F(z)$ in sehr grosser Ferne.

α) s und t sind beide sehr gross.
($t - s$ endlich oder auch sehr gross.)

Aus diesen Voraussetzungen folgt, dass $x^2 + y^2$ sehr gross ist und dass z endlich oder sehr gross sein kann. Man lege der Rechnung die Integralform

$$F(z) = \tfrac{1}{2}\sqrt{AB}\int\left(L(u)\frac{zP'}{PW\sqrt{u}} + z\frac{W}{U}\right)du$$

(Schlinge um t allein) zu Grunde, lasse einstweilen den Factor $\frac{1}{2}\sqrt{AB}$

weg und denke sich den Weg mit Ausnahme eines kleinen Kreises um t östlich davon bis zum Ostpunkte in die Realitätslinie verlegt.

$$L(u) = -\frac{x^2}{A-B}\left(1+\frac{B}{u}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{A}{u}\right)^{-\frac{1}{2}} + \frac{y^2}{A-B}\left(1+\frac{A}{u}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{B}{u}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$+\log\left[\sqrt{u}\left(\left(1+\frac{A}{u}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(1+\frac{B}{u}\right)^{\frac{1}{2}}\right)\right]$$

$$\left(1+\frac{B}{u}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{A}{u}\right)^{-\frac{1}{2}} = \left(1+\tfrac{1}{2}\frac{B}{u}-\tfrac{1}{8}\frac{B^2}{u^2}+\ldots\right)\left(1-\tfrac{1}{2}\frac{A}{u}+\tfrac{3}{8}\frac{A^2}{u^2}+\ldots\right)$$

$$= 1-\tfrac{1}{2}\frac{A-B}{u}+\tfrac{1}{8}(A-B).\frac{3A+B}{u^2}+\ldots$$

folglich

$$\left(1+\frac{A}{u}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{B}{u}\right)^{-\frac{1}{2}} = 1+\tfrac{1}{2}\frac{A-B}{u}-\tfrac{1}{8}(A-B).\frac{A+3B}{u^2}+\ldots$$

Der algebraische Teil von $L(u)$ wird

$$\frac{y^2-x^2}{A-B}+\frac{x^2+y^2}{2u}-\frac{(3A+B)x^2+(A+3B)y^2}{8u^2}$$

Im log. Teile ist

$$\left(1+\frac{A}{u}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(1+\frac{B}{u}\right)^{\frac{1}{2}} = 2\left(1+\frac{A-B}{4u}+\ldots\right)$$

(man braucht nicht höher zu steigen). Der log. Teil ist also

$$\tfrac{1}{2}\log u+\frac{A+B}{4u}$$

daher

$$L(u) = \frac{y^2-x^2}{A-B}+\tfrac{1}{2}\log u+\frac{x^2+y^2}{2u}+\frac{A+B}{4u}-\frac{(3A+B)x^2+(A+3B)y^2}{8u^2}+\ldots$$

$$\frac{P'}{P} = \frac{1}{u}+\frac{1}{u-s}+\frac{1}{u-s''}-\frac{1}{u+A}-\frac{1}{u+B} = \frac{1}{u-s}+\left(\frac{1}{u-s''}-\frac{1}{u}\right)$$

$$+\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{u+A}\right)+\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{u+B}\right) = \frac{1}{u-s}+\frac{s''}{u^2}.\frac{1}{1-\frac{s''}{u}}$$

$$+\frac{A}{u^2}\frac{1}{1+\frac{A}{u}}+\frac{B}{u^2}.\frac{1}{1+\frac{B}{u}}$$

$$-\frac{1}{u-s}+\frac{s''+A+B}{u^2}+\frac{s''^2-A^2-B^2}{u^3}+\ldots$$

Weil u bei t beginnt, und beide s und t von gleicher Ordnung mit x^2+y^2 sind, so sind im Anfange wenigstens u und s von derselben Ordnung; man kann daher $\frac{1}{u-s}$ nicht entwickeln.

$$\frac{1}{W\sqrt{u}} = \frac{\sqrt{(A+u)(B+u)}}{\sqrt{(u-t')(u-t'')}} \cdot \frac{1}{\sqrt{(u-t)}}$$

Man kann auch $\frac{1}{\sqrt{u-t}}$ nicht entwickeln, weil u bei t beginnt. Dagegen ist

$$\left(1+\frac{A}{u}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{B}{u}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(1+\tfrac{1}{2}\frac{A}{u}-\tfrac{1}{8}\frac{A^2}{u^2}+\cdots\right)\cdot\left(1+\tfrac{1}{2}\frac{B}{u}-\tfrac{1}{8}\frac{B^2}{u^2}+\cdots\right)$$

$$= 1+\frac{A+B}{2u}-\frac{(A-B)^2}{8u^2}+\cdots$$

$$\left(1-\frac{t'}{u}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(1-\frac{t''}{u}\right)^{-\frac{1}{2}} = \left(1+\frac{1}{2}\frac{t'}{u}+\frac{3}{8}\frac{t'^2}{u^2}+\cdots\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2}\frac{t''}{u}+\frac{3}{8}\frac{t''^2}{u^2}+\cdots\right)$$

$$= 1+\frac{t'+t''}{2u}+\frac{3t'^2+2t't''+3t''^2}{8u^2}+\cdots$$

$$\frac{1}{W\sqrt{u}} = \frac{1}{\sqrt{(u-t)}}\left\{1+\tfrac{1}{2}(A+B+t'+t'')\cdot\frac{1}{u}\right.$$
$$\left.+\tfrac{1}{8}(3t'^2+2t't''+3t''^2+2(A+B)(t'+t'')-(A-B)^2)\cdot\frac{1}{u^2}\right\}$$

Innerhalb der Klammer { } bezeichne man den Coefficienten von $\frac{1}{u^2}$ mit $\frac{1}{8}T$, dann ist

$$\frac{1}{W\sqrt{u}} = \frac{1}{(u-s)\cdot\sqrt{(u-t)}}+\tfrac{1}{2}\cdot\frac{t'+t''+A+B}{u(u-s)\sqrt{(u-t)}}+\frac{s''+A+B}{u^2\cdot\sqrt{(u-t)}}$$
$$+\tfrac{1}{8}\frac{T}{u^2(u-s)\sqrt{(u-t)}}+\tfrac{1}{2}(s''(2s''+t'+t''+A+B)$$
$$+(A+B)(t'+t'')-(A-B)^2)\cdot\frac{1}{u^3\sqrt{(u-t)}}+\cdots$$

Wenn die vorkommenden Integranden westlich von t nur in s und ... und zwar rational unstetig werden, so kann man den ... von null schliessen. Wenn die Schlinge um t recht... $\sqrt{u-t}$ westlich von t in der Realitätslinie südlich ... u) und die geschlossene Curve um 0 und s wird ... zerfällt in einen kleinen Kreis um null allein und ... allein, wenn beide Pole vorkommen. Die Verwand-

lung von t, s, t', s', t'', s'' in die Coordinaten geschieht so. Multiplicirt man die Gleichung

$$1 = \frac{x^2}{A+t} + \frac{y^2}{B+t} + \frac{z^2}{t}$$

mit t und entwickelt dann, so erhält man

$$t = r^2 - \frac{Ax^2+By^2}{t} + \frac{A^2x^2+B^2y^2}{t^2} + \ldots$$

und wenn man bei der zweiten Ordnung stehen bleibt

$$t = r^2 - \frac{Ax^2+By^2}{r^2} + \ldots$$

$$\left(\text{Das folgende Glied beträgt } \left(\frac{A^2x^2+B^2y^2}{r^4} + \frac{(Ax^2+By^2)^2}{r^6}\right)\right)$$

Setzt man hierin $z = 0$, so ergibt sich

$$s = x^2+y^2 - \frac{Ax^2+By^2}{x^2+y^2} + \ldots$$

$$t-s = z^2\left(1+\frac{Ax^2+By^2}{r^2(x^2+y^2)} + \ldots\right)$$

$$\frac{z}{\sqrt{(t-s)}} = 1 - \tfrac{1}{2}\frac{Ax^2+By^2}{r^2(x^2+y^2)} + \ldots$$

Aus der Gleichung

$$(u+A)(u+B)u - x^2(u^2+Bu) - y^2(u^2+Au) - z^2(A+u)(B+u) = (u-t)(u-t')(u-t''),$$

ergab sich

$$t+t'+t''+A+B = x^2+y^2+z^2 = r^2$$

also

$$t'+t'' = \frac{Ax^2+By^2}{r^2}$$

Wenn $z = 0$ wird, so wird (im vorliegenden Falle $s > 0$) $t' = 0$ $t'' = s''$, also

$$s''+A+B = \frac{Ax^2+By^2}{x^2+y^2} + \ldots$$

Mit Vernachlässigung der Ordnung $\frac{1}{r^6}$ ist daher

$$\frac{zP'}{PW\sqrt{u}} = \frac{z}{(u-s)\sqrt{u-t}} + \tfrac{1}{2}\frac{Ax^2+By^2}{r^2}\cdot\frac{z}{u(u-s)\sqrt{u-t}} + \frac{Ax^2+By^2}{x^2+y^2}\cdot\frac{z}{u^2\sqrt{(u-t)}} + \ldots$$

Zugleich sind

$$\int \frac{z\,du}{(u-s)\sqrt{u-t}} = 2\pi\left(1-\tfrac{1}{2}\frac{Ax^2+By^2}{r^2(x^2+y^2)}+\ldots\right)$$

$$\int \frac{z\,du}{u\,(u-s)\sqrt{u-t}} = \frac{2\pi}{x^2+y^2}\left(1-\frac{z}{r}\right)+\ldots$$

$$\int \frac{z\,du}{u^2\sqrt{u-t}} = 2\pi\,\tfrac{1}{2}\cdot\frac{z}{r^3}+\ldots$$

also

$$\int \frac{zP'}{PW\sqrt{u}}\,du = 2\pi\left(1-\tfrac{1}{2}\frac{Ax^2+By^2}{r^2(x^2+y^2)}+\tfrac{1}{2}\frac{Ax^2+By^2}{r^2(x^2+y^2)}\left(1-\frac{z}{r}\right)\right.$$
$$\left.+\tfrac{1}{2}\frac{Ax^2+By^2}{x^2+y^2}\cdot\frac{z}{r^3}\right)+\ldots$$

$$= 2\pi \text{ mit einem Fehler von der Ordnung } \frac{1}{r^4}$$

Dieses Integral ist mit $\frac{1}{2}\sqrt{AB}\,\frac{y^2-x^2}{A-B}$ zu multipliciren. Bei den noch übrigen Termen des Ausdruckes für $F(z)$ kann man sich mit der niedrigsten Ordnung begnügen. Weil

$$\frac{W}{U} = \frac{\sqrt{(u-t)(u-t')(u-t'')}}{(A+u)(B+u)\,u}$$

für ein sehr grosses t zu $\frac{\sqrt{u-t}}{u^2}+\ldots$ wird, so ist

$$\int z\,\frac{W}{U}\,du = +iz\int\sqrt{(t-u)}\cdot\frac{du}{u^2}$$

(Weg ein kleiner rechtläufiger Kreis um 0)

$$= 2\pi\cdot\tfrac{1}{2}\frac{z}{r}+\ldots$$

Der Term $\frac{1}{2}\log(4u)$ in der Entwicklung von $L(u)$, der mit $\frac{zP'}{PW\sqrt{u}}\,du$ zu multipliciren ist, verlangt noch die Kenntniss des Integrals $\frac{1}{2}\int\frac{z\log(4u)\,.\,du}{(u-s)\sqrt{(u-t)}}$ (Weg eine rechtläufige Schlinge aus dem Ostpunkte um den Pol t). Indem $\sqrt{u-t}$ westlich von t in der Realitätslinie den südlich lateralen Wert $-i\sqrt{t-u}$ bekommt, kann man den Weg in einen kleinen rückläufigen Kreis um s und eine aus dem Westpunkte um null geworfene rückläufige Schlinge verwandeln. Mit Ausnahme eines kleinen negativen Kreises um null schiebe man hinweg und herweg dieser Schlinge in die Realitätslinie. Das Integral wird

$-\frac{1}{2i}\int \frac{z\log(4u)}{\sqrt{(t-u)}}\cdot\frac{du}{u-s}$ (Weg ein kleiner rückläufiger Kreis um s)

$+\frac{1}{2i}\int \frac{z\log(4u)}{(s-u)\sqrt{(t-u)}}du$ (Weg eine rückl. Schlinge a. d. Westp. um 0).

Wir wollen das Integral mit J bezeichnen und setzen

$$J = I + II$$

Nun ist

$$I = \pi\log(4s)\cdot\frac{z}{\sqrt{(t-s)}} = \pi\log 4(x^2+y^2)+\ldots = \pi\log 4(r^2-z^2)+\ldots$$

In II verhält sich das Integral längs des kleinen Kreises vom Radius ϱ wie

$$\int \log(4u)\,du = \{u\log 4u - u\} = 2i\pi\varrho$$

und verschwindet zugleich mit ϱ. Auf dem geradlinigen Hinwege $-\varrho\ldots -N$ ist $\log(4u)$ um $2i\pi$ grösser als an den entsprechenden Stellen des Herweges. Ersetzt man u durch $-u$, so hat man also

$$II = \pi\int_{\varrho}^{N}\frac{z\,du}{(s+u)\sqrt{(t+u)}},\quad \text{wo man } \varrho = 0 \text{ setzen darf.}$$

Es sei $t+u = (t-s)v^2$, $a^2 = \frac{t}{t-s}$, a pos.; dann geht v von a nach N. Das Integral wird

$$II = \frac{\pi z}{\sqrt{(t-s)}}\int_{a}^{\infty}\frac{2dv}{v^2-1} = \frac{\pi z}{\sqrt{(t-s)}}\log\frac{a+1}{a-1} = \pi\log\frac{r+z}{r-z}+\ldots$$

und

$$I + II = 2\pi\log(2(r+z))+\ldots$$

Ferner ist

$$\frac{x^2+y^2}{2}\int\frac{z\,du}{u(u-s)\sqrt{(u-t)}} = \pi\left(1-\frac{z}{r}\right)+\ldots$$

was mit $\int z\frac{W}{U}du$ zusammen die Summe π bildet. Es ergibt sich

$$F(z) = \pi\sqrt{AB}\left[\frac{y^2-x^2}{A-B}+\log(2(r+z))+\tfrac{1}{2}\right]$$

mit einem Fehler von der Ordnung $\frac{1}{r^2}$. Diese Schätzung gilt nur, wenn z pos. ist; aber z darf endlich werden und bis auf 0 herab sinken; denn $\frac{z}{\sqrt{(t-s)}}$ behält auch in diesem Falle noch den Wert 1. Für ein sehr grosses neg. z ist aber die Gleichung

$$F(-z) = 2\pi\sqrt{AB}\,L(s) - F(z)$$

anzuwenden. Wenn man die Ordnung $\frac{1}{r^2}$ vernachlässigt, so kann man im Terme $\log 4s$ des Ausdruckes für $L(s)$ geradezu s durch x^2+y^2 ersetzen und hat dann

$$2L(s) = 2\frac{y^2-x^2}{A-B} + \log(4(x^2+y^2)) + 1$$

Da

$$\log\frac{4(x^2+y^2)}{2(r+z)} = \log(2(r-z))$$

ist, so ergibt sich für ein sehr grosses negatives z die Gleichung

$$F(-z) = \pi\sqrt{AB}\left[\frac{y^2-x^2}{A-B} + \log(2(r-z)) + \tfrac{1}{2}\right]$$

welche sich von der vorigen nur dadurch unterscheidet, dass z durch $-z$ ersetzt ist. Jene Gleichung gilt also sowol für neg. als für pos. Werte von z, so lange als s sehr gross ist.

Vorhin ergab sich

$$\tfrac{1}{2}\int\frac{z\log(4u)\,du}{(u-s)\sqrt{u-t}} = \frac{\pi z}{\sqrt{(t-s)}}\left(\log 4s + \log\frac{\sqrt{t}+\sqrt{(t-s)}}{\sqrt{t}-\sqrt{(t-s)}}\right)$$

da aber

$$\frac{s}{\sqrt{t}-\sqrt{(t-s)}} = \sqrt{t}+\sqrt{(t-s)}$$

so hat man

$$\int_t^\infty\frac{z\log(4u)\,du}{(u-s)\sqrt{(u-t)}} = \tfrac{1}{2}\int\frac{z\log(4u)\,du}{(u-s)\sqrt{(u-t)}}$$
$$= \frac{2\pi z}{\sqrt{(t-s)}}\log[2(\sqrt{t}+\sqrt{(t-s)})]$$

eine streng richtige Gleichung, die nur $t > 0$, $t > s$ voraussetzt. Wenn $s = 0$ wird, so hat man

$$\tfrac{1}{2}\int\frac{z\log(4u)\,du}{u\cdot\sqrt{(u-t)}} = \frac{2\pi z}{\sqrt{t}}\log(4\sqrt{t})$$

Diese Gleichung, der man im folgenden bedarf, ist so auf leichterem Wege gefunden worden, als wenn man sie unmittelbar bewiesen hätte.

3) Nur t ist sehr gross; s ist endlich und kann positiv oder negativ sein.

z allein ist also sehr gross, aber x und y sind endlich. Der Punkt $(x, y, 0)$ kann also e[illegible]innerhalb als ausserhalb der Grund-

ellipse liegen. Wenn man alles weglässt, was im Endergebniss nur zur Ordnung $\frac{1}{z^2}$ etwas beiträgt, so hat man

$$L(u) = \tfrac{1}{2}\log 4u + \frac{y^2-x^2}{A-B}, \quad \frac{P'}{P} = \frac{1}{u}$$

$$\frac{1}{W\sqrt{u}} = \frac{1}{\sqrt{(u-t)}}, \quad \frac{W}{U} = \frac{\sqrt{(u-t)}}{u^2}$$

folglich

$$F(z) = \tfrac{1}{2}\sqrt{AB}\left[\tfrac{1}{2}\int \frac{z\log(4u)}{u\sqrt{(u-t)}}du + \frac{y^2-x^2}{A-B}\int \frac{z\,du}{u\sqrt{(u-t)}} + \int \frac{z\sqrt{(u-t)}}{u^2}du\right]$$

$$= \pi\sqrt{AB}\left(\log 4z + \frac{y^2-x^2}{A-B} + \tfrac{1}{2}\right)$$

Weil jetzt

$$r = z + \frac{x^2+y^2}{2z} + \ldots, \quad r+z = 2z\left(1 + \frac{x^2+y^2}{4z^2} + \ldots\right)$$

folglich

$$\log(2(r+z)) = \log(4z) + \frac{x^2+y^2}{4z^2} + \ldots$$

sich von $\log(4z)$ nur um ein kleines von der Ordnung $\frac{1}{z^2}$ unterscheidet, so ist dieses Ergebniss schon in der Gleichung

$$F(z) = \pi\sqrt{AB}\left(\frac{y^2-x^2}{A-B} + \log 2(r+z) + \tfrac{1}{2}\right)$$

enthalten. Dennoch gilt die Gleichung nur für ein pos. sehr grosses z, was schon der Term $\log(4z)$ klar macht. Für ein neg. sehr grosses $-z$ muss man die Gleichung

$$F(-z) = 2\pi\sqrt{AB}\,L(s) - F(z)$$

wenn s pos., aber endlich (also gar nicht $= x^2+y^2$), oder die Gl.

$$F(-z) = 2\pi\sqrt{AB}\,L(0) - 2\pi z^2 - F(z)$$

wenn s neg. (aber grösser als $-B$) ist, anwenden.

B) *Die ersten Abgeleiteten der Function $F(z)$.*

a) $z > 0$.

$$F(z) = \tfrac{1}{2}\sqrt{AB}\int\left(L(u)\cdot\frac{zP'}{PW\sqrt{u}} + z\,\frac{W}{U}\right)du$$

(Weg eine rechtläufige Schlinge aus dem Ostp. um den Pol t).

$$\frac{\partial F(z)}{\partial x} = -\frac{2\pi\sqrt{AB}}{A-B}\cdot x\frac{\sqrt{(B+s)}}{\sqrt{(A+s)}} - \frac{\sqrt{AB}}{A-B}\int xz\cdot\frac{\sqrt{(B+u)}}{\sqrt{(A+u)}}\,\frac{P'du}{PW\sqrt{u}}$$

(Weg eine rechtl. Schlinge aus dem Ostp. allein um t und s)

$$\frac{\partial F(z)}{\partial y} = \frac{2\pi\sqrt{AB}}{A-B}\cdot y\frac{\sqrt{A+s}}{\sqrt{B+s}} + \frac{\sqrt{AB}}{A-B}\int yz\frac{\sqrt{(A+u)}}{\sqrt{(B+u)}}\cdot\frac{P'du}{PW\sqrt{u}}$$

$$\left(\text{Weg wie bei } \frac{\partial F(z)}{\partial x}\right)$$

Weil nun diese Integrale ohne den Factor z auch für $z=0$ oder $t = s$ einen endlichen Wert behalten, so folgt aus diesen Ausdrücken, dass

$$\frac{\partial F(0)}{\partial x} = -\frac{2\pi\sqrt{AB}}{A-B}x\cdot\frac{\sqrt{(B+s)}}{\sqrt{(A+s)}},\quad \frac{\partial F(0)}{\partial y} = \frac{2\pi\sqrt{AB}}{A-B}y\cdot\frac{\sqrt{(A+s)}}{\sqrt{(B+s)}}$$

$$\frac{\partial F(0)}{\partial z} = 2\sqrt{AB}\int_s^\infty \frac{W}{U}du = 2\sqrt{AB}\int_s^\infty \frac{\sqrt{P}}{U\sqrt{u}}du$$

Die letzten Ausdrücke für $\frac{\partial F(0)}{\partial x}$ und $\frac{\partial F(0)}{\partial y}$ erhält man auch aus der Formel

$$F(0) = \pi\sqrt{AB}\,L(s)$$

Liegt der Punkt $(x, y, 0)$ innerhalb der Grundellipse, so ist s neg.; nähert sich nun z dem Werte 0, so sinkt t auch auf 0 herab, und der Integrationsweg kann in diesem Falle nicht mehr zwischen t und 0 hindurch. Man schalte deshalb in die Schlinge einen kleinen rechtl. Kreis um 0 ein und subtrahire von dem neuen Integrale den Wert längs dieses Kreises. W ist zwischen 0 und s südlich lateral, kann also durch $-i\frac{\sqrt{(t-u)(u-t')(u-t'')}}{\sqrt{(A+u)(B+u)u}}$ dargestellt werden. Von

$$\frac{P}{P'} = \frac{1}{u} + \frac{1}{u-s} + \frac{1}{u-s''} - \frac{1}{A+u} - \frac{1}{B+u}$$

kommt nur der Term $\frac{1}{u}$ in Betracht. Man erhält

$$-\frac{\sqrt{AB}}{A-B}\int xz\frac{\sqrt{(B+u)}}{\sqrt{(A+u)}}\cdot\frac{P'}{PW\sqrt{u}}du \quad \text{(Weg ein kleiner rechtl. Kreis um null)} \quad = \frac{2\pi Bx}{A-B},$$

folglich ist auch

$$\frac{\partial F(z)}{\partial x} = -\frac{2\pi Bx}{A-B} - \frac{\sqrt{AB}}{A-B}\int xz\frac{\sqrt{(B+u)}}{\sqrt{(A+u)}}\cdot\frac{P'}{PW\sqrt{u}}\,du$$

(Weg eine rechtl. Schlinge aus dem Ostp. um die Pole t und 0)

$$\frac{\partial F(z)}{\partial y} = \frac{2\pi Ay}{A-B} + \frac{\sqrt{AB}}{A-B}\int yz\frac{\sqrt{(A+u)}}{\sqrt{(B+u)}}\cdot\frac{P'}{PW\sqrt{u}}\,du$$

$$\left(\text{Weg wie bei } \frac{\partial F}{\partial x}\right)$$

Für $z=0$ ergeben sich aus diesen Ausdrücken folgende Formeln:

$$\frac{\partial F(0)}{\partial x} = -\frac{2\pi Bx}{A-B}, \quad \frac{\partial F(0)}{\partial y} = \frac{2\pi Ay}{A-B}$$

auch ist

$$\frac{\partial F(0)}{\partial z} = 2\sqrt{AB}\int_0^\infty \frac{\sqrt{P}}{U\sqrt{u}}\,du$$

Die Ausdrücke für $\frac{\partial F(0)}{\partial x}$, $\frac{\partial F(0)}{\partial y}$ ergeben sich auch aus der Formel

$$F(0) = \pi\sqrt{AB}\,L(0)$$

b) $z<0$, $s>0$

Weil

$$F(-z) = 2\sqrt{AB}\,\pi L(s) - F(z)$$

$$L'(u) = \tfrac{1}{2}\frac{P}{U\sqrt{u}}, \quad P(s)=0$$

also auch

$$L'(s)=0$$

so folgt

$$\frac{\partial L(s)}{\partial x} = -\frac{2x}{A-B}\cdot\frac{\sqrt{(B+s)}}{\sqrt{(A+s)}}$$

und demnach

$$\frac{\partial F(-z)}{\partial x} = -\frac{4\pi x\sqrt{AB}}{A-B}\cdot\frac{\sqrt{B+s}}{\sqrt{A+s}} + \frac{\sqrt{AB}}{A-B}\int xz\frac{\sqrt{(B+u)}}{\sqrt{(A+u)}}\cdot\frac{P'}{PW\sqrt{u}}\,du$$

(Weg eine Schlinge aus dem Ostp. um den Pol t)

$$\frac{\partial F(-z)}{\partial y} = \frac{4\pi y\sqrt{AB}}{A-B}\cdot\frac{\sqrt{(B+s)}}{\sqrt{(A+s)}} - \frac{\sqrt{AB}}{A-B}\int yz\frac{\sqrt{(A+u)}}{\sqrt{(B+u)}}\cdot\frac{P'}{PW\sqrt{u}}\,du$$

$$\left(\text{Weg wie bei } \frac{\partial F(-z)}{\partial x}\right)$$

$$\frac{\partial F(-z)}{\partial z} = -\sqrt{AB}\int \frac{W}{U}\,du = -2\sqrt{AB}\int_{i}^{\infty} \frac{W}{U}\,du$$

Wenn

$$\frac{\partial F(z)}{\partial z} = \overset{|}{F}(z), \qquad \frac{\partial F(-z)}{\partial(-z)} = \overset{|}{F}(-z)$$

gesetzt wird, so folgt aus obigen Formeln, dass

$$\overset{|}{F}(-z) = \overset{|}{F}(z)$$

ist.

c) $z < 0, \quad s < 0.$

Für diesen Fall ist

$$F(-z) = 2\pi\,(\sqrt{AB}\,L(0) - z^2) - F(z)$$

Weil

$$L(0) = \log(\sqrt{A}+\sqrt{B}) + \frac{Ay^2 - Bx^2}{(A-B)\sqrt{AB}}$$

so folgt

$$\frac{\partial F(-z)}{\partial x} = -\frac{4\pi x\,B}{A-B} + \frac{\sqrt{AB}}{A-B}\int xz\,\frac{\sqrt{(B+u)}}{\sqrt{(A+u)}}\cdot\frac{P'}{PW\sqrt{u}}\,du$$

(Weg wie oben)

$$\frac{\partial F(-z)}{\partial y} = \frac{4\pi y\,A}{A-B} - \frac{\sqrt{AB}}{A-B}\int yz\,\frac{\sqrt{A+u}}{\sqrt{B+u}}\cdot\frac{P'}{PW\sqrt{u}}\,du$$

$$\frac{\partial F(-z)}{\partial z} = -4\pi z - \sqrt{AB}\int \frac{W}{U}\,du$$

$$= -4\pi z - \sqrt{AB}\int_{i}^{\infty} \frac{W}{U}\,du$$

also ist

$$\overset{|}{F}(z) - \overset{|}{F}(-z) = -4\pi z$$

d) Die Grundcurve ist eine Unstetigkeitslinie für die Abgeleiteten der Function $F(z)$. Denn sie kehren einem Umlaufe um dieselbe nicht mehr auf ihren frü Wert zurück.

Man wähle wie früher 4 Punkte (x_1, y_1, z_1), $(x_1, y_1, -z_1$ pos. s_1, und (x_2, y_2, z_2), $(x_2, y_2, -z_2)$ mit neg. s_2 und führ Functionen vom ersten zum dritten, durch die Ebene hindurch vierten, dann zum zweiten und zurück zum ersten Punkte. die Functionen $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}$ durch die Integrale

$$-\frac{2\sqrt{AB}}{A-B}\int_t^\infty xz\,\frac{\sqrt{B+u}}{\sqrt{A+u}}\cdot\frac{P'}{PW\sqrt{u}}\,du$$

$$\frac{2\sqrt{AB}}{A-B}\int_t^\infty yz\,\frac{\sqrt{A+u}}{\sqrt{B+u}}\cdot\frac{P'}{PW\sqrt{u}}\,du,\quad 2\sqrt{AB}\int_t^\infty\frac{W}{U}\,du$$

dargestellt werden können, so sollen sie mit $F_x(z)$, $F_y(z)$, $F_z(z)$ bezeichnet werden. Wenn aber ihre Fortsetzungen nur mittelbar ausgedrückt werden können, so sollen sie mit einem Striche versehen werden. Auf dem Wege vom Punkte z_1 bis zum Punkte z_2 gehen die Functionen $F_x(z_1)$, $F_y(z_1)$, $F_z(z_1)$ in $F_x(z_2)$, $F_y(z_2)$, $F_z(z_2)$ über. Hat der bewegte Punkt die Grundebene passirt und ist in $(-z_2)$ angelangt, so ist

$$\overline{F}_x(-z_2)=-\frac{4\pi x_2 B}{A-B}-F_x(z_2),\quad \overline{F}_y(-z_2)=\frac{4\pi y_2 A}{A-B}-F_y(z_2)$$

$$\overline{F}_z(-z_2)=-4\pi z_2-F_z(z_2)$$

Auf dem Wege zum Punkte $(-z_1)$ erfahren diese Ausdrücke keine Aenderung in ihrer Form. Für den Punkt $(-z_1)$ erhält man

$$\overline{F}_x(-z_1)=-\frac{4\pi x_1 B}{A-B}-F_x(+z_1),\quad \overline{F}_y(-z_1)=\frac{4\pi y_1 A}{A-B}-F_y(+z_1)$$

$$\overline{F}_z(-z_1)=-4\pi z_1-F_z(+z_1)$$

Kehrt nun schliesslich der Bezugspunkt durch die Ebene $z=0$ zum Ausgangspunkte zurück, so gehen die Functionen $F_x(z_1)$, $F_y(z_1)$, $F_z(z_1)$ resp. in

$$4\pi x_1\sqrt{AB}\,\frac{\sqrt{(B+s)}}{\sqrt{(A+s)}}-F_x(z_1),\quad \frac{4\pi y\,.\sqrt{AB}}{A-B}\cdot\frac{\sqrt{(A+s)}}{\sqrt{(B+s)}}-F_y(z_1),$$

$-F_z(z_1)$ über, so dass schliesslich die Abgeleiteten bei ihrer Ankunft im Ausgangspunkte folgende Werte annehmen:

$$\overline{F}_x(z_1)=F_x(z_1)+\frac{4\pi x_1\sqrt{AB}}{A-B}\cdot\frac{\sqrt{(B+s)}}{\sqrt{(A+s)}}-\frac{4\pi x_1 B}{A-B}$$

$$\overline{F}_y(z_1)=F_y(z_1)-\frac{4\pi y_1\,.\sqrt{AB}}{A-B}\cdot\frac{\sqrt{(A+s)}}{\sqrt{(B+s)}}+\frac{4\pi y_1 A}{A-B}$$

$$\overline{F}_z(z_1)=F_z(z_1)-4\pi z_1$$

Diese letzten Werte ergeben sich auch aus der Formel:

$$\overline{F}(z_1)=F(z_1)+2\pi\sqrt{AB}\,(L(0)-L(s_1))-2\pi z_1^2$$

e) Darstellung der ersten Abgeleiteten der Function $F(z)$ durch elliptische Integrale.

Wenn

$$W^2 = 1 - \frac{x^2}{A+u} - \frac{y^2}{B+u} - \frac{z^2}{u}, \quad U^2 = (A+u)(B+u)$$

$$R^2 = (u-t)(u-t')(u-t''), \quad t > 0 > t' > -B > t'' > -$$

also

$$W = \frac{R}{U}$$

wenn ferner

$$P = uW^2 + z^2 = \frac{u(u-s)(u-s'')}{(A+u)(B+u)}, \quad s > -B > -s'' > -$$

also

$$\frac{P'}{P} = \frac{1}{u} + \frac{1}{u-s} + \frac{1}{u-s''} - \frac{1}{A+u} - \frac{1}{B+u}$$

dann sind für ein pos. z die Abgeleiteten

$$\frac{\partial F(z)}{\partial x} = -\frac{2\sqrt{AB}}{A-B} \cdot x \int_t^\infty \frac{\sqrt{(B+u)}}{\sqrt{(A+u)}} \cdot \frac{zP'du}{PW\sqrt{u}}$$

$$\frac{\partial F(z)}{\partial y} = \frac{2\sqrt{AB}}{A-B} \cdot y \int_t^\infty \frac{\sqrt{(A+u)}}{\sqrt{(B+u)}} \cdot \frac{zP'du}{PW\sqrt{u}}$$

$$\frac{\partial F(z)}{\partial z} = 2\sqrt{AB} \int_t^\infty \frac{W}{U} du$$

Aus den zwei Gleichungen

$$\frac{x^2}{A+s} + \frac{y^2}{B+s} = 1, \quad \frac{x^2}{A+t} + \frac{y^2}{B+t} + \frac{z^2}{t} = 1$$

ergibt sich durch Subtraction die Gleichung

$$(t-s)\left(\frac{x^2}{(A+s)(A+t)} + \frac{y^2}{(B+s)(B+t)}\right) = \frac{z^2}{t}$$

ebenso hat man

$$(s-t') \cdot \left(\frac{x^2}{(A+s)(A+t')} + \frac{y^2}{(B+s)(B+t')}\right) = \frac{z^2}{(-t')}$$

$$(s''-t'') \cdot \left(\frac{x^2}{(A+s'')(A+t'')} + \frac{y^2}{(B+s'')(B+t'')}\right) = \frac{z^2}{(-t'')}$$

Weil nun x^2, y^2, z^2 überall durch pos. Werte dividirt sind, so sind auch $t-s$, $s-t'$, $s''-t''$ pos. Man hat daher

$$t > s > t' > -B > s'' > t'' > -A$$

$(B+u)\cdot\frac{P'}{P}$ ist rational, $\frac{z\,du}{R}$ ist das Differential eines elliptischen Integrals erster Art. Man bringe zunächst dieses auf die Normalform. Weil

$$\frac{u-t'}{t-t'} = 1+\frac{u-t}{t-t'},\quad \frac{u-t''}{t-t''} = 1+\frac{t-t'}{t-t''}\cdot\frac{u-t}{t-t'}$$

und weil $\frac{u-t}{t-t'}$ von 0 an alle pos. Werte durchläuft, so kann man unter Annahme eines nördlich lateralen Argumentes v, das von 0 nach L geht, als algebraischen Modul $k = \frac{\sqrt{(t-t')}}{\sqrt{(t-t'')}}$ setzen. (Diese Wahl des Moduls gewährt nämlich in der Nachbarschaft der Grundellipse, wo die grössten Schwierigkeiten auftreten, den Vorteil, dass er sehr klein ist.)

$$\frac{\sqrt{(u-t)}}{\sqrt{(t-t'')}} = \frac{Sv}{i},\quad \sqrt{(u-t')} = \sqrt{(t-t')}\,Cv,\quad \sqrt{(u-t'')} = \sqrt{(t-t'')}\,Dv,$$

$$R = \frac{1}{i}(t-t')\sqrt{(t-t'')}\,Sv\,Cv\,Dv$$

und weil

$$u = t-(t-t')\,S^2v$$

also

$$du = -2(t-t')\,Sv\,Cv\,Dv\,dv$$

so ist

$$\frac{z\,du}{R} = \frac{2z}{\sqrt{(t-t'')}}\cdot\frac{dv}{i}$$

also

$$\int_t^\infty \frac{z\,du}{R} = \frac{2z}{\sqrt{(t-t'')}}\,K$$

wenn $L = iK$.

$$\frac{\partial F(z)}{\partial x} = -\frac{2\sqrt{AB}}{A-B}\,xz\int_t^\infty\left(1+\frac{B+s}{u-s}+\frac{B}{u}+\frac{B+s''}{u-s''}+\frac{A-B}{A+u}\right)\cdot\frac{du}{R}$$

$$\frac{\partial F(z)}{\partial y} = \frac{2\sqrt{AB}}{A-B}\,yz\int_t^\infty\left(1+\frac{A+s}{u-s}+\frac{A}{u}+\frac{A+s''}{u-s''}-\frac{A-B}{B+u}\right)\cdot\frac{du}{R}$$

$$\frac{\partial F(z)}{\partial z} = 2\sqrt{AB}\int_t^\infty\left(1-\frac{x^2}{A+u}-\frac{y^2}{E+u}-\frac{z^2}{u}\right)\cdot\frac{du}{R}$$

Man hat also nur fünf vollständige elliptische Integrale dritter Art zu berechnen.

$$\text{Berechnung von } \int_t^\infty \frac{z}{u-s}\cdot\frac{du}{R}.$$

Weil $u-s = t-s-(t-t')S^2v$ und $t-s < t-t' < t-t''$, ist es passend $u-s = (s-t')(S^2\alpha - S^2v)$ zu setzen; dann sind

$$S\alpha = \frac{\sqrt{(t-s)}}{\sqrt{(t-t')}},\quad C\alpha = \frac{\sqrt{(s-t')}}{\sqrt{(t-t')}},\quad D\alpha = \frac{\sqrt{(s-t'')}}{\sqrt{(t-t'')}}$$

alle drei pos. und $0 < \alpha < K$.

$$\text{Integral} = \frac{2z}{(t-t')\sqrt{(t-t'')}}\cdot\frac{1}{i}\int_0^L \frac{dv}{(S^2\alpha - S^2v)}$$

Auf dieses Integral wende man die bekannte Formel

$$\int_0^L \frac{S\alpha\, C\alpha\, D\alpha}{S^2\alpha - S^2x}\cdot\frac{dx}{i} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi\alpha}{2K} - K'\,Z\alpha$$

an.

$$S\alpha\, C\alpha\, D\alpha = \frac{\sqrt{(t-s)(s-t')(s-t'')}}{(t-t')\sqrt{(t-t'')}}$$

und weil

$$\frac{(s-t)(s-t')(s-t'')}{(A+s)(B+s)s} = 1 - \frac{x^2}{A+s} - \frac{y^2}{B+s} - \frac{z^2}{s} = -\frac{z^2}{s}$$

so ist

$$\sqrt{(t-s)(s-t')(s-t'')} = z\sqrt{(A+s)(B+s)}$$

somit

$$S\alpha\, C\alpha\, D\alpha = \frac{z\sqrt{(A+s)(B+s)}}{(t-t')\sqrt{(t-t'')}}$$

also

$$\text{Integral} = \frac{2}{\sqrt{(A+s)(B+s)}}\cdot\int_0^L \frac{S\alpha\, C\alpha\, D\alpha}{S^2\alpha - S^2v}\cdot\frac{dv}{i}$$

oder also auch

$$\text{Integral} = \frac{1}{\sqrt{(A+s)(B+s)}}\left(\pi - \frac{\pi\alpha}{K} - 2K'\,Z\alpha\right)$$

Wenn $\alpha' = K-\alpha$, also $S\alpha' = \frac{\sqrt{(t-t'')(s-t')}}{\sqrt{(t-t')(s-t'')}}$, so ist

$$\text{Integral} = \left|\ \frac{2K'z}{(s-t'')\sqrt{(t-t'')}} + \frac{1}{\sqrt{(A+s)(B+s)}}\cdot\left(\frac{\pi\alpha'}{K} + 2K'\cdot\right.\right.$$

Berechnung von $\int_{u}^{\infty} \frac{z}{u} \cdot \frac{du}{R}$

Man braucht nur in der vorigen Rechnung 0 an die Stelle von s treten zu lassen und setze daher

$$S\beta = \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{(t-t')}}, \quad C\beta = \frac{\sqrt{-t'}}{\sqrt{(t-t')}}, \quad D\beta = \frac{\sqrt{-t''}}{\sqrt{(t-t'')}}$$

$$0 < \beta < K$$

$$S\beta\, C\beta\, D\beta = \frac{\sqrt{t\,t'\,t''}}{(t-t')\sqrt{(t-t'')}} = \frac{z\sqrt{AB}}{(t-t')\sqrt{(t-t'')}}$$

Es ist daher

$$\text{Integral} = \frac{1}{\sqrt{AB}}\left(\pi - \frac{\pi\beta}{K} - 2K'Z\beta\right)$$

$$= -\frac{2K'z}{(-t'')\sqrt{(t-t'')}} + \frac{1}{\sqrt{AB}}\left(\frac{\pi\beta'}{K} + 2K'Z\beta'\right)$$

wenn

$$\beta' = K - \beta$$

folglich

$$S\beta' = \frac{\sqrt{(-t')(t-t'')}}{\sqrt{(-t'')(t-t')}}$$

Berechnung von $\int_{t}^{\infty} \frac{z}{u-s''} \cdot \frac{du}{R}$

Weil $u - s'' = t - s'' - (t-t')S^2v$ und $t - t' < t - s'' < t - t''$, also zwar $\frac{t-t'}{t-s''} < 1$, aber $\frac{1}{k^2} \cdot \frac{t-t'}{t-s''} = \frac{t-t''}{t-s''} > 1$, so bekommt der Parameter a, wenn man $u - s'' = (t-s'')(1 - k^2 S^2 a\, S^2 v)$ setzt, die Form $K + i\gamma$, wo $0 < \gamma < K'$ und

$$Sa = \frac{\sqrt{(t-t'')}}{\sqrt{(t-s'')}}, \quad Ca = -i\,\frac{\sqrt{(s''-t'')}}{\sqrt{(t-s'')}}, \quad Da = \frac{\sqrt{(t'-s'')}}{\sqrt{(t-s'')}}$$

also

$$Si\gamma = i\,\frac{\sqrt{(s''-t'')}}{\sqrt{(t'-s'')}}, \quad Ci\gamma = \frac{\sqrt{(t'-t'')}}{\sqrt{(t'-s'')}}, \quad Di\gamma = \frac{\sqrt{(t'-t'')(t-s'')}}{\sqrt{(t-t'')(t'-s'')}}$$

$$\text{Integral} = \frac{2z}{(t-s'')\sqrt{(t-t'')}} \int_0^L \frac{D^2 i\gamma}{D^2 i\gamma - k^2 C^2 i\gamma S^2 v} \cdot \frac{dv}{i}$$

Auf dieses Integral wenden wir die Formel

$$\int_0^L \frac{Si\gamma \,.\, Di\gamma}{i\,Ci\gamma} \cdot \frac{l^2}{D^2 i\gamma - k^2 C^2 i\gamma S^2 v} \cdot \frac{dv}{i} = K' \left(\frac{Si\gamma \,.\, Di\gamma}{i\,Ci\gamma} - \frac{Zi\gamma}{i} \right) - \frac{\pi\gamma}{2K}$$

an. Weil

$$\frac{i\,Ci\gamma \,.\, Di\gamma}{l^2 Si\gamma} = \frac{t-t''}{t'-t''} \cdot \frac{(t'-t'')\sqrt{(t-s'')}}{\sqrt{(t-t'')(t'-s'')(s''-t'')}} - \frac{\sqrt{(t-t'')(t-s'')}}{\sqrt{(t'-s'')(s''-t'')}}$$

so ist

$$\frac{2z}{(t-s'')\sqrt{(t-t'')}} \cdot \frac{i\,Ci\gamma \,.\, Di\gamma}{l^2 Si\gamma} = \frac{2z}{\sqrt{(t-s'')(t'-s'')(s''-t'')}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{(A+s'')(-B-s'')}}$$

also

$$\text{Integral} = \frac{2K'z}{(t'-s'')\sqrt{(t-t'')}} - \frac{1}{\sqrt{(A+s'')-(B-s'')}} \cdot \left(\frac{\pi\gamma}{K} + 2K' \cdot \frac{Zi\gamma}{i} \right)$$

Berechnung von $\int_t^\infty \frac{1}{A+u} \cdot \frac{du}{R}$

Weil

$$A+u = A+t-(t-t')S^2 v = A+t-(t-t')k^2 S^2 v$$

und $A+t > t-t''$, so kann man

$$A+u = (A+t)(1-k^2 S^2\delta\, S^2 v)$$

setzen, wo

$$S\delta = \frac{\sqrt{t-t''}}{\sqrt{(A+t)}}, \quad C\delta = \frac{\sqrt{(A+t'')}}{\sqrt{(A+t)}}, \quad D\delta = \frac{\sqrt{(A+t')}}{\sqrt{(A+t)}}, \quad 0 < \delta < K$$

Wir wenden nun auf unser Integral die Formel

$$\int_0^L \frac{Ca\, Da}{Sa} \cdot \frac{dx}{1-k^2 S^2 a S^2 x} = L \frac{Ca\, Da}{Sa} - \frac{i\pi}{2} + \frac{i\pi a}{2K} + LZa$$

an. Weil

$$\frac{S\delta}{C\delta\, D\delta} = \frac{\sqrt{(t-t'')(A+t')}}{\sqrt{(A+t')(A+t'')}} - \frac{(A+t)\sqrt{(t-t'')}}{x\sqrt{A(A-B)}}$$

so ist

$$\text{Integral} = \frac{2K'}{(A+t)\sqrt{(t-t'')}} + \frac{1}{x\sqrt{A(A-B)}}\left(-\pi + \frac{\pi\delta}{K} + 2K'Z\delta\right)$$

Wenn $\delta' = k - \delta$, also

$$S\delta' = \frac{\sqrt{(A+t'')}}{\sqrt{(A+t')}}$$

so ist

$$Z\delta = k^2 S\delta\, S\delta' - Z\delta' = \frac{(t-t')\sqrt{(A+t'')}}{\sqrt{(t-t'')}(A+t)(A+t')} - Z\delta'$$

also

$$\text{Integral} = \frac{2K'}{(A+t')\sqrt{(t-t'')}} - \frac{\frac{\pi\delta'}{K} + 2K'Z\delta'}{x\sqrt{A(A-B)}}$$

Berechnung von $\int_t^{\infty} \frac{1}{B+u} \cdot \frac{du}{B}$

$$B+u = B+t-(t-t')S^2v = B+t-(t-t'').k^2S^2v$$

Weil $t-t'' > B+t > t-t'$, so liegt, wenn

$$B+u = (B+t)(1-k^2S^2aS^2v)$$

der Parameter a zwischen K und $K+L$. Nun ist

$$Sa = \frac{\sqrt{(t-t'')}}{\sqrt{(B+t)}}, \quad Ca = -i\,\frac{\sqrt{-B-t''}}{\sqrt{B+t}}, \quad Da = \frac{\sqrt{B+t'}}{\sqrt{B+t}}$$

Setzt man $a = K+i\varepsilon$, wo $0 < \varepsilon < K'$, so ist

$$Si\varepsilon = i\,\frac{\sqrt{-B-t''}}{\sqrt{B+t'}}, \quad Ci\varepsilon = \frac{\sqrt{(t'-t'')}}{\sqrt{(B+t')}}, \quad Di\varepsilon = \frac{\sqrt{(t'-t'')(B+t)}}{\sqrt{(t-t'')(B+t')}}$$

$$B+u = \frac{(t-t'')(B+t')}{t'-t''}\,(D^2i\varepsilon - k^2C^2i\varepsilon S^2v) \quad \text{und}$$

$$\text{Integral} = \frac{2}{i}\cdot\frac{t'-t''}{(B+t')(t-t')^{\frac{3}{2}}}\int_0^L \frac{dv}{D^2i\varepsilon - k^2C^2i\varepsilon S^2v}$$

Weil

$$i^2\,\frac{Si\varepsilon\,.\,Di\varepsilon}{i\,Ci\varepsilon} = \frac{(t'-t'').\sqrt{(B+t)(-B-t'')}}{\sqrt{(B+t)}\,.\,(t-t'')^{\frac{3}{2}}}$$

so ist auch

$$\text{Integral} = \frac{2}{\sqrt{(B+t)(B+t')(-B-t'')}} \int_0^L l^2 \cdot \frac{Si\varepsilon . Di\varepsilon}{i\,Ci\varepsilon} \cdot \frac{1}{D^2 i\varepsilon - k^2 S^2 i\varepsilon S^2}$$

$$= \frac{2K'}{(B+t')\sqrt{(t-t'')}} - \frac{\frac{\pi}{K}\varepsilon + 2\frac{Zi\varepsilon}{i} . K'}{y\sqrt{B(A-B)}}$$

Es ist also

$$\int_t^\infty \frac{z\,du}{R} = \frac{2z}{\sqrt{(t-t'')}} \cdot K'$$

$$\int_t^\infty \frac{z}{u-s} \cdot \frac{du}{R} = \frac{1}{\sqrt{(A+s)(B+s)}} \cdot \left(\pi - \frac{\pi}{K}\alpha - 2K' Z\alpha\right)$$

$$\int_t^\infty \frac{z}{u} \cdot \frac{du}{R} = \frac{1}{\sqrt{AB}} \cdot \left(\pi - \frac{\pi}{K}\beta - 2K' Z\beta\right)$$

$$\int_t^\infty \frac{z}{u-s''} \cdot \frac{du}{R} = \frac{2K'z}{(t'-s'') . \sqrt{(t-t'')}} - \frac{1}{\sqrt{(A+s'')(-B-s'')}} \times$$

$$\left(\frac{\pi}{K}\gamma + 2K'$$

$$\int_t^\infty \frac{1}{A+u} \cdot \frac{du}{R} = \frac{2K'}{(A+t')\sqrt{(t-t'')}} - \frac{\pi\,\frac{\delta'}{K} + 2K' Z\delta'}{x\sqrt{A(A-B)}}$$

$$\int_t^\infty \frac{1}{B+u} \cdot \frac{du}{R} = \frac{2K'}{(B+t')\sqrt{(t-t'')}} - \frac{1}{y\sqrt{(A-B)B}} \left(\frac{\pi\varepsilon}{K} + 2K' \frac{Zi\varepsilon}{i}\right.$$

wenn

$$S\alpha = \frac{\sqrt{(t-s)}}{\sqrt{(t-t')}}, \quad S\beta = \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{(t-t')}}, \quad Si\gamma = i\frac{\sqrt{(s''-t'')}}{\sqrt{(t'-t'')}}$$

$$S\delta' = \frac{\sqrt{(A+t'')}}{\sqrt{(A+t')}}, \quad Si\varepsilon = i\frac{\sqrt{-B-t''}}{\sqrt{(B+t')}}$$

gesetzt wird. Aus diesen Formeln folgt

$$\frac{\partial F(z)}{\partial x} = -\frac{2\sqrt{AB}x}{A-B}\left[\pi\left(\frac{\sqrt{(B+s)}}{\sqrt{(A+s)}} + \frac{\sqrt{B}}{\sqrt{A}}\right) + \frac{\pi}{K}\left(-\frac{\sqrt{B+s}}{\sqrt{A+s}}\alpha - \frac{\sqrt{}}{\sqrt{}}\right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{\sqrt{-B-s''}}{\sqrt{A+s''}} \cdot \gamma - \frac{\sqrt{A-B}}{\sqrt{A}} \cdot \frac{z}{x} \cdot \delta'\right) + \frac{2K'z}{\sqrt{(t-t'')}}\left(\frac{B+t'}{t'-s''} + \frac{A}{A}\right.\right.$$

$$+2K'\Big(-\frac{\sqrt{B+s}}{\sqrt{A+s}}Z\alpha-\frac{\sqrt{B}}{\sqrt{A}}Z\beta+\frac{\sqrt{-B-s''}}{\sqrt{A+s''}}\frac{Zi\gamma}{i}$$
$$-\frac{\sqrt{A-B}}{\sqrt{A}}\cdot\frac{z}{x}\cdot Z\delta'\Big)\Big]$$

$$\frac{\partial F(z)}{\partial y}=\frac{2\sqrt{AB}y}{A-B}\Big[\pi\Big(\frac{\sqrt{(A+s)}}{\sqrt{(B+s)}}+\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}\Big)+\frac{\pi}{K}\Big(-\frac{\sqrt{A+s}}{\sqrt{B+s}}\alpha-\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}\beta$$
$$-\frac{\sqrt{A+s''}}{\sqrt{-B-s''}}\gamma+\frac{\sqrt{A-B}}{\sqrt{B}}\cdot\frac{s\varepsilon}{y}\Big)+\frac{2K'z}{\sqrt{(t-t'')}}\Big(\frac{A+t'}{t'-s''}-\frac{A-B}{B+t'}\Big)$$
$$+2K'\Big(-\frac{\sqrt{A+s}}{\sqrt{B+s}}Z\alpha-\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}Z\beta-\frac{\sqrt{A+s''}}{\sqrt{-B-s''}}\cdot\frac{Zi\gamma}{i}$$
$$+\frac{\sqrt{A-B}}{\sqrt{B}}\cdot\frac{z}{y}\cdot\frac{Zi\varepsilon}{i}\Big)\Big]$$

$$\frac{\partial F(z)}{\partial z}=2\sqrt{AB}\Big[\frac{2K'}{\sqrt{(t-t'')}}\Big(1-\frac{x^2}{A+t'}-\frac{y^2}{B+t'}\Big)-\frac{\pi z}{\sqrt{AB}}$$
$$+\frac{\pi}{K}\Big(\frac{z}{\sqrt{AB}}\beta+\frac{x}{\sqrt{A(A-B)}}\delta'+\frac{y}{\sqrt{B(A-B)}}\cdot\varepsilon\Big)$$
$$+2K'\Big(\frac{z}{\sqrt{AB}}Z\beta+\frac{x}{\sqrt{A(A-B)}}Z\delta'+\frac{y}{\sqrt{B(A-B)}}\cdot\frac{Zi\varepsilon}{i}\Big)\Big]$$

oder

$$\frac{\partial F(z)}{\partial z}=\frac{2\pi}{K}\Big(\frac{\sqrt{B}}{\sqrt{(A-B)}}x\delta'+\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{(A-B)}}\cdot y\varepsilon+z\beta\Big)$$
$$-2\pi z+4K'\Big(\frac{\sqrt{AB}\,.\,z^2}{t'.\sqrt{(t-t'')}}+\frac{\sqrt{B}}{\sqrt{(A-B)}}\cdot xZ\delta'$$
$$+\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{(A-B)}}\cdot y\frac{Zi\varepsilon}{i}+zZ\beta\Big)$$

f) Angenäherte Ausdrüke für $\frac{\partial F(z)}{\partial x}$, $\frac{\partial F(z)}{\partial y}$, $\frac{\partial F(z)}{dz}$ in der Nachbarschaft der Focalellipse.

Man wähle in der Focalellipse einen Punkt (x_0, y_0, z_0), wo x_0, y_0 pos. sein mögen. Ausser der Gleichung

$$\frac{x_0^2}{A}+\frac{y_0^2}{B}=1$$

genüge er noch der Gleichung

$$\frac{x_0^2}{A+\sigma}+\frac{y_0^2}{B+\sigma}=1$$

wo

$$x_0=\frac{\sqrt{A(A+\sigma)}}{\sqrt{A-B}},\quad y_0=\frac{\sqrt{B(-B-\sigma)}}{\sqrt{A-B}}$$

und die Abstände der an die Ellipse und Hyperbel gezogenen Tangenten vom Mittelpunkte $\frac{\sqrt{AB}}{\sqrt{-\sigma}}$, $\frac{\sqrt{(A+\sigma)(-B-\sigma)}}{\sqrt{-\sigma}}$ sind. Bedeutet η den Winkel, den die nach aussen gerichtete Normale der Ellipse im Punkte (x_0, y_0) mit der x Axe bildet, so sind

$$\cos\eta=\frac{\sqrt{B(A+\sigma)}}{\sqrt{-\sigma(A-B)}},\quad \sin\eta=\frac{\sqrt{A(-B-\sigma)}}{\sqrt{-\sigma(A-B)}}$$

Der benachbarte Punkt (x, y, z) befinde sich in der durch $(x_0, y_0, 0)$ senkrecht zur Tangente der Ellipse gelegten Ebene und sei um r von diesem Punkte entfernt Der kurze Strahl r bilde mit der genannten Normale den Winkel θ. Dann ist

$$x=x_0+r\cos\eta\cos\theta,\quad y=y_0+r\sin\eta\cos\theta,\quad z=r\sin\theta$$

Die Abstände des Mittelpunktes von den Tangenten der Ellipse und Hyperbel im Punkte (x_0, y_0) seien mit p und p'' bezeichnet, so dass

$$p=\frac{\sqrt{AB}}{\sqrt{-\sigma}},\quad p''=\frac{\sqrt{(A+\sigma)(-B-\sigma)}}{\sqrt{-\sigma}}$$

Ferner sei

$$\frac{1}{C}=\frac{1}{A}+\frac{1}{B}-\frac{1}{(-\sigma)}$$

Ich stelle einige bekannte Gleichungen und Ergebnisse von Nebenrechnungen voran, damit die Hauptrechnung weniger unterbrochen werde.

$$\frac{x_0^2}{A^2}+\frac{y_0^2}{B^2}=\frac{1}{p^2},\qquad \frac{x_0^2}{(A+\sigma)^2}+\frac{y_0^2}{(B+\sigma)^2}=\frac{1}{p''^2}=\frac{-\sigma}{(A+\sigma)(-B-\sigma)}$$

$$\frac{x_0^2}{A^3}+\frac{y_0^2}{B^3}=\frac{1}{p^2C},\qquad \frac{x_0\cos\eta}{A}+\frac{y_0\sin\eta}{B}=\frac{1}{p},\qquad \frac{x_0\cos\eta}{A+\sigma}+\frac{y_0\sin\eta}{B+\sigma}=0$$

$$\frac{x_0\cos\eta}{A^2}+\frac{y_0\sin\eta}{B^2}=\frac{1}{pC},\qquad \frac{\cos^2\eta}{A}+\frac{\sin^2\eta}{B}=\frac{1}{C}$$

$$\frac{\cos^2\eta}{A+\sigma}+\frac{\sin^2\eta}{B+\sigma}=-\frac{1}{(-\sigma)}$$

Die Differenz $\sigma-s''$ soll durch Subtraction der zwei Gleichungen

$$\frac{x^2}{A+s''}+\frac{y^2}{B+s''}=1, \qquad \frac{x_0^2}{A+\sigma}+\frac{y_0^2}{B+\sigma}=1$$

berechnet werden. Man hat

$$\left(\frac{x^2}{A+s''}+\frac{y^2}{B+s''}-\frac{x^2}{A+\sigma}-\frac{y^2}{B+\sigma}\right)+\left(\frac{x^2-x_0^2}{A+\sigma}+\frac{y^2-y_0^2}{B+\sigma}\right)=0$$

oder

$$(\sigma-s'')\cdot\left(\frac{x^2}{(A+\sigma)(A+s'')}+\frac{y^2}{(B+\sigma)(B+s'')}\right)=\frac{r^2\cos^2\theta}{(-\sigma)}$$

Also ist $\sigma-s''$ klein ven der Ordnung r^2 und wenn man sich mit dieser Ordnung begnügt, kann man den Factor $\sigma-s''$ durch

$$\frac{x_0^2}{(A+\sigma)^2}+\frac{y_0^2}{(B+\sigma)^2}=\frac{-\sigma}{(A+\sigma)(-B-\sigma)}$$

ersetzen und bekommt

$$\sigma-s''=\frac{(A+\sigma)(-B-\sigma)}{(-\sigma)^2}r^2\cos^2\theta+\ldots$$

Die Differenz $s''-t''$ soll durch Subtraction der zwei Gleichungen

$$\frac{x^2}{A+t''}+\frac{y^2}{B+t''}+\frac{z^2}{t''}=1, \qquad \frac{x^2}{A+s''}+\frac{y^2}{B+s''}=1$$

berechnet werden. Man findet:

$$(s''-t'')\cdot\left(\frac{x^2}{(A+s'')(A+t'')}+\frac{y^2}{(B+s'')(B+t'')}\right)=\frac{z^2}{(-t'')}$$

Diese Gleichung zeigt, dass $s''-t''$ von der Ordnung r^2 ist. Begnügt man sich mit dieser Ordnung, so kann der Factor von $s''-t''$ durch $\frac{-\sigma}{(A+\sigma)(-B-\sigma)}$ und die rechte Seite durch $\frac{r^2\sin^2\theta}{(-\sigma)}$ ersetzt werden. Es ergibt sich

$$s''-t''=\frac{(A+\sigma)(-B-\sigma)}{(-\sigma)^2}\cdot r^2\sin^2\theta$$

also

$$\sigma-t''=\frac{(A+\sigma)(-B-\sigma)}{(-\sigma)^2}\cdot r^2$$

Die Grösse s wird durch Subtraction der zwei Gleichungen

$$\frac{x_0^2}{A}+\frac{y_0^2}{B}=1, \qquad \frac{x^2}{A+s}+\frac{y^2}{B+s}=1$$

gefunden. Es ist

$$\frac{x^2}{A}+\frac{y^2}{B}-\frac{x^2}{A+s}-\frac{y^2}{B+s}=\frac{x^2-x_0^2}{A}+\frac{y^2-y_0^2}{B}$$

$$s\cdot\left(\frac{x^2}{A(A+s)}+\frac{y^2}{B(B+s)}\right)=2r\cos\theta\left(\frac{x_0\cos\eta}{A}+\frac{y_0\sin\eta}{B}\right)$$
$$+r^2\cos^2\theta\left(\frac{\cos^2\eta}{A}+\frac{\sin^2\eta}{B}\right)=\frac{2r\cos\theta}{p}+\frac{r^2\cos^2\theta}{C}$$

Man muss nun auch den Factor von s auf zwei Ordnungen wickeln. Es ist

$$\frac{x_0^2+2x_0\cos\eta\,.\,r\cos\theta+r^2\cos^2\eta\cos^2\theta}{A^2}\left(1-\frac{s}{A}+\ldots\right)$$
$$+\frac{y_0^2+2y_0\sin\eta\,.\,r\cos\theta+r^2\sin^2\eta\cos^2\theta}{B^2}\quad\left(1-\frac{s}{B}+\ldots\right)$$
$$-\frac{x_0^2}{A^2}+\frac{y_0^2}{B^2}+2r\cos\theta\left(\frac{x_0\cos\eta}{A^2}+\frac{y_0\sin\eta}{B^2}\right)-s\left(\frac{x_0^2}{A^3}+\frac{y_0^2}{B^3}\right)$$
$$-2rs\cos\theta\,.\left(\frac{x_0\cos\eta}{A^3}+\frac{y_0\sin\eta}{B^3}\right)=\frac{1}{p^2}+\frac{2r\cos\theta}{pC}-\frac{s}{p^2C}-\frac{2rs\cos\theta}{M}.$$

In tiefster Näherung ist daher

$$s=2pr\cos\theta+\ldots$$

Der Factor ist also $\frac{1}{p^2}$ mit einem Fehler zweiter Ordnung. Also

$$s=2pr\cos\theta+\frac{p^2}{C}\cdot r^2\cos^2\theta+\ldots$$

Zweigliedrige Berechnung von t, t'.

Es gelten die fünf Gleichungen:

$$t+t'+t''=x^2+y^2+z^2-(A+B),$$
$$t''.(t+t')+tt''=AB-Bx^2-Ay^2-(A+B)z^2,\qquad tt't''=ABz^2,$$
$$s+s''=x^2+y^2-(A+B),\quad ss''=AB-Bx^2-Ay^2$$

Aus der ersten und vierten ergibt sich

$$t+t'-s=s''-t''+z^2$$

(klein zweiter Ordg.); die dritte gibt

$$tt'=-\frac{ABz^2}{(-t'')}$$

Aus dem obigen Werte von $s''-t''$ folgt

$$s''-t''+s^2 = \frac{p^2 r^2 \sin^2\theta}{C}$$

folglich

$$\frac{t+t'}{2} = pr\cos\theta + \tfrac{1}{2}\frac{p^2}{C}\cdot r^2$$

Ferner ist

$$tt' = \frac{-ABz^2}{-\sigma+(\sigma-t'')} = \frac{-ABz^2}{-\sigma}\left(1-\frac{\sigma-t''}{-\sigma}+\ldots\right)$$

Weil aber $s-t''$ klein zweiter Ordnung ist, so kommt $\frac{\sigma-t''}{-\sigma}$ nicht mehr in Betracht. Man hat

$$tt' = -p^2r^2\sin^2\theta + r^3.0+\ldots$$

Das vorige gibt

$$\left(\frac{t+t'}{2}\right)^2 = p^2r^2\cos^2\theta + \frac{p^3}{C}r^3\cos\theta+\ldots$$

und wenn man tt' subtrahirt, so erhält man

$$\left(\frac{t-t'}{2}\right)^2 = p^2r^2+\frac{p^3}{C}r^3\cos\theta+\ldots$$

$$\frac{t-t'}{2} = pr+\tfrac{1}{2}\frac{p^2r^2}{C}\cos\theta+\ldots$$

Weil

$$\frac{t+t'}{2} = pr\cos\theta+\tfrac{1}{2}\frac{p^2r^2}{C}+\ldots$$

so ergeben sich die Gleichungen

$$t = pr(1+\cos\theta)\left(1+\tfrac{1}{2}\frac{pr}{C}+\ldots\right)$$

$$t' = -pr(1-\cos\theta)\left(1-\tfrac{1}{2}\frac{pr}{C}+\ldots\right)$$

Berechnung der Parameter.

Zweigliedrige Entwicklungen hat man nur bei den Parametern α, β, δ', ε nötig; denn γ ist schon klein erster Ordnung. Auch k^2 braucht man nur eingliedrig zu kennen. Man hat

$$k^2 = \frac{t-t'}{t-t''} = \frac{2pr}{-\sigma}+\ldots, \quad 2K' = \log\frac{16}{k^2} = \log\frac{8(-\sigma)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{AB}.r} = A$$

Wenn

$$Sx = \sin\varphi$$

so ist

$$\frac{x^2}{A}+\frac{y^2}{B}-\frac{x^2}{A+s}-\frac{y^2}{B+s}=\frac{x^2-x^2}{A}$$

$$s\cdot\left(\frac{x^2}{A(A+s)}+\frac{y^2}{B(B+s)}\right)=2r\cos\theta\left(\frac{x_0\cos}{}\right.\quad\frac{2.4\ \dots\ 2\lambda}{5\ \dots\ (2\lambda+1)}\sin^{2\lambda}\varphi$$

$$+r^2\cos^2\theta\left(\frac{\cos^2\eta}{A}+\frac{\sin^2\eta}{B}\right.$$

$$\cos\varphi+\dots$$

Man muss nun auch den Factor wickeln. Es ist

$$+\dots$$

$$\frac{x_0^2+2x_0\cos\eta\,.\,r\cos\theta+r^2\cos^2\eta\,c\cdot}{A^2}$$

$$-\sin\varphi\cos\varphi)+\dots$$

$$+\frac{y_0^2+2y_0\sin\eta\,.\,r\cos\theta+r^2\sin^2}{B^2}$$

$$-\sin\varphi\cos\varphi)+\dots$$

$$=\frac{x_0^2}{A^2}+\frac{y_0^2}{B^2}+2r\cos\theta\left(\frac{x_0\cos}{}\right.$$

$$\sin\varphi\cos\varphi+\dots$$

$$-2rs\cos\theta\,.\left(\frac{x_0\cos\eta}{A^3}+\frac{y_0}{}\right.$$

$$=\frac{1(t-s)}{1(t-t')}$$

In tiefster Näherung ist

$$\cdot\left(1+\tfrac{1}{2}\frac{pr}{C}(1+2\cos\theta)+\dots\right)$$

Der Factor ist also $\frac{1}{p}$

$$\cdot\left(1+\tfrac{1}{2}\frac{pr}{C}\cos\theta+\dots\right)$$

$$s=$$

$$+\dots\Big)-\sin\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}\cdot\tfrac{1}{4}\frac{pr\sin\theta}{C}+$$

Zweig

Es gelten die

$$s=\frac{\theta}{2}+\tfrac{1}{4}\frac{pr\sin\theta}{C}+\dots$$

$$t''.(t+t')+tt''$$

$$s+s''=\frac{\frac{pr\sin\theta}{C}}{}-\tfrac{1}{4}\cdot\frac{pr}{\sigma}\sin\theta+\dots$$

Aus der ersten u

$$\tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{A}+\frac{1}{B}+\frac{2}{\sigma}\right).r\sin\theta+\dots$$

(klein zweiter O

$$z=\frac{pr\sin\theta}{\sigma}+\dots$$

$$\sin\beta=\frac{\sqrt{t}}{\sqrt{(t-t')}}$$

Aus dem obige

$$\left(1+\tfrac{1}{2}\frac{pr}{C}+\dots\right)$$

$$\left(1+\tfrac{1}{2}\frac{pr}{C}\cos\theta\right)$$

$$\frac{\theta}{2}\left(1+\frac{pr}{C}\,.\,\sin^2\frac{\theta}{2}+\dots\right)$$

$$\sin\frac{\theta}{2}\cdot\tfrac{1}{4}\frac{pr\sin\theta}{C}+\dots \text{ sei } =\sin\varphi$$

$$=\frac{\pi-\theta}{2}+\tfrac{1}{4}\cdot\frac{pr\sin\theta}{C}+\dots$$

$$\tfrac{1}{4}\cdot\frac{pr\sin\theta}{C}-\tfrac{1}{4}\cdot\frac{pr\sin\theta}{-\sigma}+\dots$$

$$=K-\frac{K}{\pi}\theta+\tfrac{1}{4}p\left(\frac{1}{A}+\frac{1}{B}+\frac{2}{\sigma}\right).r\sin\theta+\dots$$

$$Z\beta=\tfrac{1}{2}\cdot\frac{pr\sin\theta}{-\sigma}+\dots$$

ung von γ. Bei

$$S i\gamma = i\frac{\sqrt{s''-t''}}{\sqrt{(t'-s'')}}$$

radezu

$$\gamma=\frac{\sqrt{s''-t''}}{\sqrt{(t'-s'')}}+\dots$$

$$s''-t''=\frac{(A+\sigma)(-B-\sigma)}{\sigma^2}\,.\,r^2\sin^2\theta+\dots$$

$$t'-s''=-\sigma+\dots$$

$$\gamma=\frac{\sqrt{(A+\sigma)(-B-\sigma)}}{(-\sigma)^{\frac{3}{2}}}\,.\,r\sin\theta+\dots$$

zweiter Ordnung.

ung von δ'.

$$S\delta'=\frac{\sqrt{(A+t'')}}{\sqrt{(A+t')}}-\sin\varphi$$

$$A+t''=A+\sigma+0.r+\dots$$

$$A+t'=A-pr.(1-\cos\theta)+\dots$$

$$x = \frac{2K}{\pi}\varphi - \sin\varphi\cos\varphi \cdot \sum_{n=1}^{n=\infty}\left(\frac{1.3\ \ldots\ (2n-1)}{2.4\ \ldots\ 2n}\right)^2 \times k^{2n}\sum_{\lambda=0}^{\lambda=n-1}\frac{2.4\ \ldots\ 2\lambda}{3.5\ \ldots\ (2\lambda+1)}\sin^{2\lambda}\varphi$$

Für den vorliegenden Zweck dient

$$x = \frac{2K}{\pi}\cdot\varphi - \tfrac{1}{4}k^2\sin\varphi\cos\varphi + \ldots$$

Weil

$$\frac{E}{K} = 1 - \tfrac{1}{2}k^2 + \ldots$$

also

$$\frac{E}{K}x = \varphi - \tfrac{1}{4}k^2(\varphi + \sin\varphi\cos\varphi) + \ldots$$

und weil

$$E(\varphi) = \varphi - \tfrac{1}{2}k^2(\varphi - \sin\varphi\cos\varphi) + \ldots$$

so ist

$$Zx = \tfrac{1}{2}k^2\sin\varphi\cos\varphi + \ldots$$

Berechnung von α.

$$S\alpha = \frac{\sqrt{(t-s)}}{\sqrt{(t-t')}}$$

Da

$$t - s = pr\,(1-\cos\theta)\left(1 + \tfrac{1}{2}\frac{pr}{C}(1+2\cos\theta) + \ldots\right)$$

$$t - t' = 2pr\left(1 + \tfrac{1}{2}\frac{pr}{C}\cos\theta + \ldots\right)$$

so ist

$$S\alpha = \sin\frac{\theta}{2}\cdot\left(1 + \tfrac{1}{2}\frac{pr}{C}\cos^2\frac{\theta}{2} + \ldots\right) = \sin\frac{\theta}{2} + \cos\frac{\theta}{2}\cdot\tfrac{1}{4}\frac{pr\sin\theta}{C} +$$

und sei $= \sin\varphi$, dann ist

$$\varphi = \frac{\theta}{2} + \tfrac{1}{4}\cdot\frac{pr\sin\theta}{C} + \ldots$$

also

$$\alpha = \frac{K}{\pi}\theta + \tfrac{1}{4}\cdot\frac{pr\sin\theta}{C} - \tfrac{1}{4}\cdot\frac{pr}{\sigma}\sin\theta + \ldots$$

$$= \frac{K}{\pi}\theta + \tfrac{1}{4}p\left(\frac{1}{A} + \frac{1}{B} + \frac{2}{\sigma}\right)\cdot r\sin\theta + \ldots$$

$$Z\alpha = \tfrac{1}{2}\frac{pr\sin\theta}{\sigma} + \ldots$$

Berechnung von β.

$$S\beta = \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{(t-t')}}$$

Weil

$$t = pr(1+\cos\theta)\left(1+\tfrac{1}{2}\frac{pr}{C}+\ldots\right)$$

$$t-t' = 2pr\left(1+\tfrac{1}{2}\frac{pr}{C}\cos\theta\right)$$

so ist

$$\frac{t}{t-t'} = \cos^2\frac{\theta}{2}\left(1+\frac{pr}{C}\,.\,\sin^2\frac{\theta}{2}+\ldots\right)$$

folglich

$$S\beta = \cos\frac{\theta}{2}+\sin\frac{\theta}{2}\,.\,\tfrac{1}{4}\frac{pr\sin\theta}{C}+\ldots \text{ sei } = \sin\varphi$$

daher

$$\varphi = \frac{\pi-\theta}{2}+\tfrac{1}{4}\,.\,\frac{pr\sin\theta}{C}+\ldots$$

$$\beta = K-\frac{K}{\pi}\,.\,\theta+\tfrac{1}{4}\,.\,\frac{pr\sin\theta}{C}-\tfrac{1}{4}\,.\,\frac{pr\sin\theta}{-\sigma}+\ldots$$

$$= K-\frac{K}{\pi}\theta+\tfrac{1}{4}p\left(\frac{1}{A}+\frac{1}{B}+\frac{2}{\sigma}\right).\,r\sin\theta+\ldots$$

$$Z\beta = \tfrac{1}{2}\,.\,\frac{pr\sin\theta}{-\sigma}+\ldots$$

Berechnung von γ. Bei

$$Si\gamma = i\,\frac{\sqrt{s''-t''}}{\sqrt{(t'-s'')}}$$

kann man geradezu

$$\gamma = \frac{\sqrt{s''-t''}}{\sqrt{(t'-s'')}}+\ldots$$

setzen, wo

$$s''-t'' = \frac{(A+\sigma)(-B-\sigma)}{\sigma^2}\,.\,r^2\sin^2\theta+\ldots$$

$$t'-s'' = -\sigma+\ldots$$

also

$$\gamma = \frac{\sqrt{(A+\sigma)(-B-\sigma)}}{(-\sigma)^{\frac{3}{2}}}\,.\,r\sin\theta+\ldots$$

$Z\gamma$ ist klein zweiter Ordnung.

Berechnung von δ'.

$$S\delta' = \frac{\sqrt{(A+t'')}}{\sqrt{(A+t')}} = \sin\varphi$$

Weil

$$A+t'' = A+\sigma+(1-\sin\theta)\,r\,\tfrac{1}{2}\ldots$$

$$A+t' = A-pr(1-\sin\theta)\,\tfrac{1}{2}\ldots$$

so ist

$$x = \frac{2K}{\pi}\varphi - \sin\varphi\cos\varphi \cdot \sum_{n=1}^{n=\infty}\left(\frac{1.3\ \ldots\ (2n-1)}{2.4\ \ldots\ 2n}\right)^2 \times k^{2n}\sum_{\lambda=0}^{\lambda=n-1}\frac{2.4\ \ldots\ 2\lambda}{3.5\ \ldots\ (2\lambda+1)}\sin^{2\lambda}\varphi$$

Für den vorliegenden Zweck dient

$$x = \frac{2K}{\pi}\cdot\varphi - \tfrac{1}{4}k^2\sin\varphi\cos\varphi + \ldots$$

Weil

$$\frac{E}{K} = 1 - \tfrac{1}{2}k^2 + \ldots$$

also

$$\frac{E}{K}x = \varphi - \tfrac{1}{4}k^2(\varphi + \sin\varphi\cos\varphi) + \ldots$$

und weil

$$E(\varphi) = \varphi - \tfrac{1}{4}k^2(\varphi - \sin\varphi\cos\varphi) + \ldots$$

so ist

$$Zx = \tfrac{1}{2}k^2\sin\varphi\cos\varphi + \ldots$$

Berechnung von α.

$$S\alpha = \frac{\sqrt{(t-s)}}{\sqrt{(t-t')}}$$

Da

$$t - s = pr\,(1-\cos\theta)\left(1 + \tfrac{1}{2}\frac{pr}{C}(1+2\cos\theta) + \ldots\right)$$

$$t - t' = 2pr\left(1 + \tfrac{1}{2}\frac{pr}{C}\cos\theta + \ldots\right)$$

so ist

$$S\alpha = \sin\frac{\theta}{2}\cdot\left(1 + \tfrac{1}{2}\frac{pr}{C}\cos^2\frac{\theta}{2} + \ldots\right) = \sin\frac{\theta}{2} + \cos\frac{\theta}{2}\cdot\tfrac{1}{4}\frac{pr\sin\theta}{C} + \ldots$$

und sei $= \sin\varphi$, dann ist

$$\varphi = \frac{\theta}{2} + \tfrac{1}{4}\frac{pr\sin\theta}{C} + \ldots$$

also

$$\alpha = \frac{K}{\pi}\theta + \tfrac{1}{4}\cdot\frac{pr\sin\theta}{C} - \tfrac{1}{4}\cdot\frac{pr}{-\sigma}\sin\theta + \ldots$$

$$= \frac{K}{\pi}\theta + \tfrac{1}{4}p\left(\frac{1}{A} + \frac{1}{B} + \frac{2}{\sigma}\right)\cdot r\sin\theta + \ldots$$

$$Z\alpha = \tfrac{1}{2}\frac{pr\sin\theta}{-\sigma} + \ldots$$

Berechnung von β.

$$S\beta = \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{(t-t')}}$$

Weil

$$t = pr(1+\cos\theta)\left(1+\tfrac{1}{2}\frac{pr}{C}+\ldots\right)$$

$$t-t' = 2pr\left(1+\tfrac{1}{2}\frac{pr}{C}\cos\theta\right)$$

so ist

$$\frac{t}{t-t'} = \cos^2\frac{\theta}{2}\left(1+\frac{pr}{C}\cdot\sin^2\frac{\theta}{2}+\ldots\right)$$

folglich

$$S\beta = \cos\frac{\theta}{2}+\sin\frac{\theta}{2}\cdot\tfrac{1}{4}\frac{pr\sin\theta}{C}+\ldots \text{ sei } = \sin\varphi$$

daher

$$\varphi = \frac{\pi-\theta}{2}+\tfrac{1}{4}\cdot\frac{pr\sin\theta}{C}+\ldots$$

$$\beta = K-\frac{K}{\pi}\cdot\theta+\tfrac{1}{4}\cdot\frac{pr\sin\theta}{C}-\tfrac{1}{4}\cdot\frac{pr\sin\theta}{-\sigma}+\ldots$$

$$= K-\frac{K}{\pi}\theta+\tfrac{1}{12}p\left(\frac{1}{A}+\frac{1}{B}+\frac{2}{\sigma}\right).r\sin\theta+\cdots$$

$$Z\beta = \tfrac{1}{2}\cdot\frac{pr\sin\theta}{-\sigma}+\ldots$$

Berechnung von γ. Bei

$$Si\gamma = i\frac{\sqrt{s''-t''}}{\sqrt{(t'-s'')}}$$

kann man geradezu

$$\gamma = \frac{\sqrt{s''-t''}}{\sqrt{(t'-s'')}}+\ldots$$

setzen, wo

$$s''-t'' = \frac{(A+\sigma)(-B-\sigma)}{\sigma^2}\cdot r^2\sin^2\theta+\ldots$$

$$t'-s'' = -\sigma+\ldots$$

also

$$\gamma = \frac{\sqrt{(A+\sigma)(-B-\sigma)}}{(-\sigma)^{\frac{3}{2}}}\cdot r\sin\theta+\ldots$$

$Z\gamma$ ist klein zweiter Ordnung.

Berechnung von δ'.

$$S\delta' = \frac{\sqrt{(A+t'')}}{\sqrt{(A+t')}} = \sin\varphi$$

Weil

$$A+t'' = A+\sigma+0.r+\ldots$$

$$A+t' = A-pr.(1-\cos\theta)+\ldots$$

so ist

$$\sin\varphi = \frac{\sqrt{(A+\sigma)}}{\sqrt{A}}\left(1+\tfrac{1}{2}\frac{pr}{A}(1-\cos\theta)+\ldots\right)$$

Wenn

$$\sin a = \frac{\sqrt{A+\sigma}}{\sqrt{A}}$$

so ist

$$\cos a = \frac{\sqrt{-\sigma}}{\sqrt{A}}, \quad ia = \log\frac{\sqrt{-\sigma}+i\sqrt{A+\sigma}}{\sqrt{A}}$$

$$\varphi = a+\tfrac{1}{2}\frac{\sqrt{A+\sigma}}{\sqrt{-\sigma}}\cdot\frac{pr}{A}(1-\cos\theta)+\ldots = a+\tfrac{1}{2}\frac{\sqrt{B(A+\sigma)}}{\sqrt{A_i}} \times \frac{r}{-\sigma}(1-\cos\theta)+\ldots$$

$$\delta' = \frac{2K}{\pi}a+\tfrac{1}{2}\frac{\sqrt{B(A+\sigma)}}{\sqrt{A}}, \frac{r}{-\sigma}\cdot(1-\cos\theta)-\tfrac{1}{2}\frac{\sqrt{AB}\cdot r}{\sqrt{(-\sigma)^3}}\cdot\frac{\sqrt{-\sigma(A+\sigma)}}{A}$$

$$+\ldots = \frac{2K}{\pi}a-\tfrac{1}{2}\frac{\sqrt{B(A+\sigma)}}{\sqrt{A}}\cdot\frac{r\cos\theta}{-\sigma}+\ldots$$

$$Z\delta' = \frac{\sqrt{B(A+\sigma)}}{\sqrt{A}}\cdot\frac{r}{-\sigma}+\ldots$$

Berechnung von ε.

$$i\,\mathfrak{sin}\,\chi = Si\varepsilon = \frac{i\sqrt{-B-t''}}{\sqrt{(B+t')}}$$

$$\mathfrak{sin}\,\chi = \frac{\sqrt{-B-\sigma}}{\sqrt{B}}\left(1+\tfrac{1}{2}\frac{pr}{B}(1-\cos\theta)+\ldots\right)$$

Setzt man

$$b = \log\frac{\sqrt{-\sigma}+\sqrt{-B-\sigma}}{\sqrt{B}}$$

so ist

$$\mathfrak{sin}\,\chi = \mathfrak{sin}\,b+\mathfrak{cos}\,b\cdot\tfrac{1}{2}\frac{\sqrt{-B-\sigma}}{\sqrt{-\sigma}}\cdot\frac{pr}{B}(1-\cos\theta)$$

wo

$$\tfrac{1}{2}\frac{\sqrt{-B-\sigma}}{\sqrt{-\sigma}}\cdot\frac{p}{B} = \tfrac{1}{2}\frac{\sqrt{-B-\sigma}}{\sqrt{-\sigma}}\cdot\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{-\sigma B}} = \tfrac{1}{2}\frac{\sqrt{A(-B-\sigma)}}{\sqrt{B}}\cdot\frac{1}{-\sigma}$$

Also ist

$$\chi = b+\tfrac{1}{2}\frac{\sqrt{A(-B-\sigma)}}{\sqrt{B}}\cdot\frac{r}{-\sigma}(1-\cos\theta)+\ldots$$

$$\varepsilon = \frac{2K}{\pi} b + \tfrac{1}{2} \frac{\sqrt{A(-B-\sigma)}}{\sqrt{B}} \cdot \frac{r}{-\sigma} \cdot (1 - \cos\theta) - \tfrac{1}{2} \frac{\sqrt{AB} \cdot r}{(-\sigma)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\times \frac{\sqrt{-\sigma(-B-\sigma)}}{B} = \frac{2K}{\pi} \cdot b - \tfrac{1}{2} \frac{\sqrt{A(-B-\sigma)}}{\sqrt{B}} \cdot \frac{r\cos\theta}{-\sigma}$$

$$\frac{Z(i\varepsilon)}{i} = \frac{\sqrt{A(-B-\sigma)}}{\sqrt{B}} \cdot \frac{r}{-\sigma}$$

Wendet man diese Näherungswerte auf die Berechnung von $\frac{\partial F(z)}{\partial x}$ an, so ist

$$\pi \left(\frac{\sqrt{B+s}}{\sqrt{A+s}} + \frac{\sqrt{B}}{\sqrt{A}} \right) - \pi \frac{\sqrt{B}}{\sqrt{A}} \left(2 + \tfrac{1}{2} \frac{A-B}{AB} s + \ldots \right)$$

$$= \frac{2\pi\sqrt{B}}{\sqrt{A}} + \frac{\pi}{A} \frac{A-B}{\sqrt{-\sigma}} \cdot r\cos\theta + \ldots$$

$$-\frac{\pi}{K} \left(\frac{\sqrt{B+s}}{\sqrt{(A+s)}} \cdot \alpha + \frac{\sqrt{B}}{\sqrt{A}} \beta \right) = -\frac{\pi}{K} \cdot \frac{\sqrt{B}}{\sqrt{A}} \left(\alpha + \beta + \tfrac{1}{2} \frac{A-B}{AB} \alpha s + \ldots \right)$$

$$= -\pi \frac{\sqrt{B}}{\sqrt{A}} - \frac{B}{\sqrt{-\sigma}} \left(\frac{1}{A} + \frac{1}{B} + \frac{2}{\sigma} \right) \cdot r\sin\theta - \frac{A-B}{A\sqrt{-\sigma}} \cdot \theta r\cos\theta + \ldots$$

$$\frac{\pi}{K} \cdot \frac{\sqrt{-B-s''}}{\sqrt{A+s''}} \cdot \gamma = 2 \cdot \frac{-B-\sigma}{(-\sigma)^{\frac{3}{2}}} \cdot r\sin\theta + \ldots = \frac{B}{\sqrt{-\sigma}} \left(\frac{2}{B} + \frac{2}{\sigma} \right)$$

$$\times r\sin\theta + \ldots$$

$$-\frac{\pi}{K} \cdot \frac{\sqrt{A-B}}{\sqrt{A}} \cdot \frac{z}{x} \cdot \delta' = -2 \cdot \frac{A-B}{A\sqrt{(A+B)}} \cdot ar\sin\theta + \ldots$$

folglich

$$\pi \left(\frac{\sqrt{B+s}}{\sqrt{A+s}} + \frac{\sqrt{B}}{\sqrt{A}} \right) - \frac{\pi}{K} \left(\frac{\sqrt{B+s}}{\sqrt{A+s}} \alpha + \frac{\sqrt{B}}{\sqrt{A}} \cdot \beta \right)$$

$$+ \frac{\pi}{K} \cdot \frac{\sqrt{-B-s''}}{\sqrt{A+s''}} \gamma - \frac{\pi}{K} \cdot \frac{\sqrt{A-B}}{\sqrt{A}} \cdot \frac{z\delta'}{x}$$

$$= \frac{\pi\sqrt{B}}{\sqrt{A}} + \frac{A-B}{A\sqrt{-\sigma}} (\pi - \theta) \cdot r\cos\theta + \frac{A-B}{A\sqrt{-\sigma}}$$

$$\times r\sin\theta \left(1 - 2a \frac{\sqrt{-\sigma}}{\sqrt{(A+\sigma)}} \right) + \ldots$$

Was innerhalb der grossen Klammer mit $2K'$ multiplicirt ist, ist von der Ordnung r, weshalb man eingliedrig rechnen kann.

$$\frac{z}{\sqrt{(t-t'')}} \cdot \left(\frac{B+t'}{t'-s''}+\frac{A-B}{A+t'}\right) = \frac{r\sin\theta}{\sqrt{-\sigma}}\left(\frac{B}{-\sigma}+\frac{A-B}{A}\right)+\dots$$

$\frac{Zi\gamma}{i}$ und $zZ\delta'$ sind von der zweiten Ordnung und kommen nicht in Betracht.

$$-\frac{\sqrt{B+s}}{\sqrt{A+s}}.Z\alpha-\frac{\sqrt{B}}{\sqrt{A}}Z\beta = -\frac{Br\sin\theta}{(-\sigma)^{\frac{3}{2}}}+\dots$$

Der Factor von $2K' = \Delta$ ist also

$$\frac{A-B}{A\sqrt{-\sigma}}r\sin\theta+\dots$$

Fasst man die Teile zusammen und multiplicirt mit $-\frac{2\sqrt{AB}}{A-B}x$, so bekommt man

$$\frac{\partial F(z)}{\partial x} = -\frac{2\pi B}{A-B}x-\frac{2\sqrt{B}}{\sqrt{-\sigma A}}x_0\left[r\sin\theta\left(\Delta+1-\frac{2a\sqrt{-\sigma}}{\sqrt{A+\sigma}}\right)\right.$$
$$\left.+(\pi-\theta)r\cos\theta\right]$$

Weil

$$x = x_0\left(1+\frac{\sqrt{B}}{\sqrt{-\sigma A}}.r\cos\theta\right)$$

so geht der Factor $\pi-\theta$ von $r\cos\theta$ in $\frac{\pi A}{A-B}-\theta$ über. Ferner ist

$$\frac{\sqrt{B}}{\sqrt{-\sigma A}}x_0 = \cos\eta$$

Man hat also

$$\frac{\partial F(z)}{\partial x} = -2\pi.\frac{B\sqrt{A(A+\sigma)}}{(A-B)^{\frac{3}{2}}}-2\cos\eta\left[r\sin\theta\left(\Delta+1-\frac{2a\sqrt{-\sigma}}{\sqrt{(A+\sigma)}}\right)\right.$$
$$\left.+r\cos\theta.\left(\frac{\pi.A}{A-B}-\theta\right)\right]$$

wo

$$\cos\eta = \frac{\sqrt{B(A+\sigma)}}{\sqrt{-\sigma(A-B)}}$$

$$ia = \log\left(\frac{\sqrt{-\sigma}+i\sqrt{(A+\sigma)}}{\sqrt{A}}\right)$$

Ohne neue Rechnung, durch blosse Vertauschung von A mit B, kann man hieraus $\frac{\partial F(z)}{\partial y}$ bekommen. Nur die Vorzeichen erfordern einige

Vorsicht. $-\sigma$ liegt immer zwischen A und B, welches von beiden Halbaxenquadraten auch das grössere sein mag. Man darf also

$$-\sigma = A - C\cos^2\zeta, \quad A - B = C$$

setzen. Dann ist

$$\frac{\sqrt{A+\sigma}}{\sqrt{A-B}} = \cos\zeta$$

und kann auf einem pos. Werte festgehalten werden, während C (aus dem pos. Zustande in den neg.) durch null geht, muss also, wenn man nach geschehenem Durchgange B für A und A für B schreibt, durch $\frac{\sqrt{-B-\sigma}}{\sqrt{A-B}}$ dargestellt und pos. verstanden werden.

Aus $-\frac{2\pi B\sqrt{A}}{A-B} \cdot \frac{\sqrt{A+\sigma}}{\sqrt{A-B}}$ wird also

$$\frac{2\pi A\sqrt{B}}{A-B} \cdot \frac{\sqrt{-B-\sigma}}{\sqrt{A-B}}$$

und aus $\frac{\sqrt{B}}{\sqrt{-\sigma}} \cdot \frac{\sqrt{A+\sigma}}{\sqrt{A-B}}$ wird

$$\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{-\sigma}} \cdot \frac{\sqrt{-B-\sigma}}{\sqrt{A-B}} = \sin\eta$$

Dem Ausdrucke $-\frac{2a\sqrt{-\sigma}}{\sqrt{A+\sigma}}$ gebe man die Gestalt

$$-2\sqrt{-\sigma} \cdot \frac{1}{i\sqrt{(A+\sigma)}} \log\left(\frac{\sqrt{-\sigma}+i\sqrt{A+\sigma}}{\sqrt{A}}\right)$$

Es ist dann gleichgültig, ob man $i\sqrt{A+\sigma}$ durch $\sqrt{-B-\sigma}$ oder durch $-\sqrt{-B-\sigma}$ ersetzt, weil

$$-\frac{1}{\sqrt{-B-\sigma}} \log\left(\frac{\sqrt{-\sigma}-\sqrt{-B-\sigma}}{\sqrt{B}}\right) = \frac{1}{\sqrt{-B-\sigma}} \log\left(\frac{\sqrt{-\sigma}+\sqrt{-B-\sigma}}{\sqrt{B}}\right)$$

ist. Der Ausdruck geht also in

$$-\frac{2\sqrt{-\sigma}}{\sqrt{-B-\sigma}} \log\frac{\sqrt{-\sigma}+\sqrt{-B-\sigma}}{\sqrt{B}} = -\frac{2b\sqrt{-\sigma}}{\sqrt{-B-\sigma}}$$

über, und man bekommt

$$\frac{\partial F(z)}{\partial y} = \frac{2\pi A\sqrt{A(-B-\sigma)}}{(A-B)^{\frac{3}{2}}} - 2\sin\eta\left[r\sin\theta\left(A+1-\frac{2b\sqrt{-\sigma}}{\sqrt{-B-\sigma}}\right)\right.$$
$$\left. -r\cos\theta\left(\frac{\pi B}{A-B}+\theta\right)\right]$$

wo

$$\sin\eta = \frac{\sqrt{A(-B-\sigma)}}{\sqrt{-\sigma(A-B)}}, \quad b = \log\frac{\sqrt{-\sigma}+\sqrt{-B-\sigma}}{\sqrt{B}}$$

Bei der Berechnung von $\frac{\partial F(z)}{\partial z}$ ist

$$\frac{2\pi}{K}\left(\frac{\sqrt{B}}{\sqrt{A-B}}x\delta'+\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{A-B}}yz\right) = 4\frac{\sqrt{B}xa+\sqrt{A}yb}{\sqrt{A-B}}$$
$$-2\frac{B(A+\sigma)}{A-B}\cdot\frac{r\cos\theta}{-\sigma}-2\frac{A(-B-\sigma)}{A-B}\cdot\frac{r\cos\theta}{-\sigma}$$
$$= 4\frac{\sqrt{B}.xa+\sqrt{A}.yb}{\sqrt{A-B}}-2r\cos\theta$$

$$2z\left(\frac{\pi}{K}\beta-\pi\right) = -2\theta.r\sin\theta$$

$$\frac{\sqrt{AB}.z^2}{t'\sqrt{(t-t'')}} = -\frac{\sqrt{AB}.r^2\sin^2\theta}{pr.(1-\cos\theta).\sqrt{-\sigma}} = -r(1+\cos\theta)$$

$$\frac{\sqrt{B}}{\sqrt{A-B}}.xZ\delta' = \frac{B.(A+\sigma)}{A-B}\cdot\frac{r}{-\sigma}$$

$$\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{A-B}}.\frac{yZi\varepsilon}{i} = \frac{A(-B-\sigma)}{A-B}\cdot\frac{r}{-\sigma}$$

$$\frac{\sqrt{B}}{\sqrt{A-B}}.xZ\delta'+\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{A-B}}y\frac{Zi\varepsilon}{i} = r$$

$zZ\beta$ kommt nicht in Betracht. Also ist

$$\frac{\partial F(z)}{\partial z} = 4\frac{\sqrt{B}.xa+\sqrt{A}.yb}{\sqrt{A-B}}-2r\cos\theta(A+1)-2r\theta\sin\theta$$
$$-4\frac{\sqrt{AB}}{A-B}\cdot\left(a\sqrt{(A+\sigma)}+b\sqrt{(-B-\sigma)}\right)$$
$$+2r\cos\theta\left(-A-1+2\cdot\frac{aB\sqrt{(A+\sigma)}+bA\sqrt{(-B-\sigma)}}{(A-B).\sqrt{-\sigma}}\right)$$
$$-2r\sin\theta.\theta$$

Man soll nun $\frac{\partial F(z)}{\partial x}dx + \frac{\partial F(z)}{\partial y}dy + \frac{\partial F(z)}{\partial z}dz$ integriren, indem man σ festhält und nur r, θ variiren lässt. Man setze

$$\chi = r\cos\theta, \qquad \psi = r\sin\theta$$

also

$$\theta = \operatorname{arctg}\frac{\psi}{\chi}$$

$$A = \log\frac{8(-\sigma)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{AB}} - \tfrac{1}{2}\log(\chi^2+\psi^2)$$

Weil

$$dx = \cos\eta\,.\,d\chi, \qquad dy = \sin\eta\,.\,d\chi, \qquad dz = d\psi$$

so hat man

$$M = \frac{\partial F(z)}{\partial x}\cos\eta + \frac{\partial F(z)}{\partial y}\sin\eta$$

zu berechnen. Es sei dann noch

$$N = \frac{\partial F(z)}{\partial z}$$

so dass $Md\chi + Nd\psi$ zu integriren sein wird. In der nullten Ordnung hat man

$$\frac{2\pi\sqrt{AB}}{(A-B)^2\sqrt{-\sigma}}\cdot\Big(-B\,.\,(A+\sigma) - A(B+\sigma)\Big)$$

$$= -\frac{2\pi\sqrt{AB}}{\sqrt{-\sigma}}\cdot\frac{2AB+(A+B)\sigma}{(A-B)^2}$$

In der ersten Ordnung hat man vorweg ohne Mühe $2\chi\theta - 2\psi(A+1)$ dann

$$4\psi\left(a\cos^2\eta\frac{\sqrt{-\sigma}}{\sqrt{A+\sigma}} + b\sin^2\eta\frac{\sqrt{-\sigma}}{\sqrt{-B-\sigma}}\right)$$

$$= 4\psi\frac{aB\sqrt{A+\sigma}+bA\sqrt{-B-\sigma}}{(A-B)\sqrt{-\sigma}}$$

und

$$-2\pi\chi\cdot\left(\frac{A}{A-B}\cdot\cos^2\eta - \frac{B}{A-B}\sin^2\eta\right) = -2\pi\chi\cdot\frac{AB(A+B+2\sigma)}{-\sigma\,.\,(A-B)^2}$$

Also

$$M = -\frac{2\pi\sqrt{AB}}{\sqrt{-\sigma}}\cdot\frac{2AB+(A+B)\sigma}{(A-B)^2}$$

$$+\psi\,.\left(-2A-2+4\,.\,\frac{Ba\operatorname{tg}a+Ab\operatorname{tg}b}{A-B}\right)$$

$$+\chi\cdot\left(2\theta - 2\pi\frac{AB(A+B+2\sigma)}{-\sigma\,.\,(A-B)^2}\right)$$

$$N = \frac{4\sqrt{AB}}{A-B}\left(a\sqrt{A+\sigma}+b\sqrt{-B-\sigma}\right)$$
$$+\chi\cdot\left(-2A-2+4\cdot\frac{Ba\operatorname{tg}a+Ab\operatorname{tg}b}{A-B}\right)-\psi.2\theta$$

Die meisten Terme $Md\chi+Nd\psi$ können unmittelbar integrirt werden; nur $-2A(\psi d\chi+\chi d\psi)+2\theta(\chi d\chi-\psi d\psi)$ erfordert die Methode der partiellen Integration. Beachtet man, dass

$$-2A=\log\frac{AB}{(-4\sigma)^3}+\log pq,\quad \theta=\frac{1}{2i}\log\frac{p}{q}$$

wenn

$$p=\chi+i\psi,\qquad q=\chi-i\psi$$

dass also das vorliegende Differential

$$=d.(-2A.\chi\psi+\theta.(\chi^2-\psi^2))-\frac{1}{2i}\left(2i\chi\psi\left(\frac{dp}{p}+\frac{dq}{q}\right)\right.$$
$$\left.+(\chi^2-\psi^2)\left(\frac{dp}{p}-\frac{dq}{q}\right)\right)$$
$$=d.\left(-2A\chi\psi+\theta(\chi^2-\psi^2)\right)-\frac{1}{2i}\left(p^2\frac{dp}{p}-q^2\frac{dq}{q}\right)$$

wo

$$-\frac{1}{2i}\left(p^2\frac{dp}{p}-q^2\right)=-\frac{1}{4i}d.(p^2-q^2)=-d.(\chi\psi)$$

ist, so erkennt man, dass das vorliegende Differential

$$=d.[(-2A-1)\chi\psi+\theta(\chi^2-\psi^2)]$$

ist. Integrationsconstante ist der Wert von $F(z)$ im Punkte (x_0, y_0) der Ellipse. Hier ist aber

$$F(0)=\pi\sqrt{AB}\,L(0)=\left(\log(\sqrt{A}+\sqrt{B})-\frac{x_0^2}{A-B}\cdot\frac{\sqrt{B}}{\sqrt{A}}\right.$$
$$\left.+\frac{y_0^2}{A-B}\cdot\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}\right).\pi\sqrt{AB}$$
$$=\left(\log(\sqrt{A}+\sqrt{B})-\frac{\sqrt{AB}(A+B+2\sigma)}{(A-B)^2}\right).\pi\sqrt{AB}$$

Endlich ist mit einem Fehler von der Ordnung $r^3\log r$ die Function

$$F(z)=\pi\sqrt{AB}\left(\log(\sqrt{A}+\sqrt{B})-\frac{\sqrt{AB}(A+B+2\sigma)}{(A-B)^2}\right)$$
$$-\frac{2\pi\sqrt{AB}}{\sqrt{-\sigma}}\cdot\frac{2AB+(A+B)\sigma}{(A-B)^2}.r\cos\theta$$

$$+\frac{4\sqrt{-\sigma AB}}{A-B}(a\operatorname{tang}a+b\operatorname{tang}b).r\sin\theta+r^2\sin 2\theta\left(\log\frac{ABr^2}{(-4\sigma)^3}-3\right.$$
$$\left.+4\frac{Ba\operatorname{tang}a+Ab\operatorname{tang}b}{A-B}\right)+r^2\theta\cos 2\theta-\pi.\frac{AB(A+B+2\sigma)}{-\sigma(A-B)^2}.r^2\cos^2\theta$$

Wir machen eine kleine Probe. Wenn σ und r fest bleiben, aber θ um 2π wächst, so nimmt dieser Näherungswert von $F(z)$ um $2\pi r^2\cos 2\theta$ zu. Im allgemeinen nimmt aber $F(z)$ nach einem Umlaufe um die Ellipse um

$$2\pi\sqrt{AB}\,(L(0)-L(s))-2\pi z^2$$

zu, wenn

$$L(u)=\log\left(\sqrt{(A+u)}+\sqrt{B+u}\right)-\frac{x^2}{A-B}\cdot\frac{\sqrt{B+u}}{\sqrt{A+u}}+\frac{y^2}{A-B}\frac{\sqrt{A+u}}{\sqrt{B+u}}$$

Es soll nun untersucht werden, ob für ein kleines r dieser Zuwachs mit seinem vorigen Näherungswerte übereinstimme. Substituirt man

$$x^2=\frac{(A+s)(A+s'')}{A-B},\qquad y^2=\frac{(B+s)(-B-s'')}{A-B}$$

so wird

$$L(0)=\log(\sqrt{A}+\sqrt{B})-\frac{\sqrt{AB}}{(A-B)^2}\cdot\left(\frac{(A+s)(A+s'')}{A}+\frac{(B+s)(+B+s'')}{B}\right)$$
$$=\log(\sqrt{A}+B)-\sqrt{AB}.\frac{A+B+2s''}{(A-B)^2}-\frac{\sqrt{AB}}{(A-B)^2}\cdot\left(2+\frac{A+B}{AB}s''\right)s$$

und

$$L(s)=\log(\sqrt{A+s}+\sqrt{B+s})-\frac{\sqrt{(A+s)(B+s)}}{(A-B)^2}(A+B+2s'')$$

folglich

$$\frac{\partial L(s)}{\partial s}=-\frac{2AB+(A+B)s''+(A+B+2s'')s}{(A-B)^2.\sqrt{(A+s)(B+s)}}$$

und wenn man nach s entwickelt

$$\frac{\partial L(s)}{\partial s}=-\frac{2AB+(A+B)s''}{(A-B)^2\sqrt{AB}}+\tfrac{1}{2}\frac{s''}{2(AB)^{\frac{3}{2}}}.s+\ldots$$

also

$$L(s)=\log(\sqrt{A}+\sqrt{B})-\sqrt{AB}.\frac{A+B+2s''}{(A-B)^2}-\frac{2AB+(A+B)s''}{(A-B)^2\sqrt{AB}}s$$
$$+\tfrac{1}{4}.\frac{s''}{(AB)^{\frac{3}{2}}}.s^2+\ldots$$

Demnach ist

$$L(0) - L(s) = -\tfrac{1}{4} \cdot \frac{s''}{(AB)^{\frac{3}{2}}} \cdot s^2 + \ldots$$

Man darf nun $s'' = \sigma$ und

$$s^2 = 4\frac{AB}{-\sigma} \cdot r^2 \cos^3\theta$$

setzen und hat

$$L(0) - L(s) = \frac{r^2 \cos^2\theta}{\sqrt{AB}}$$

folglich

$$2\pi \sqrt{AB}(L(0) - L(s)) - 2\pi z^2 = 2\pi r^2 . (\cos^2\theta - \sin^2\theta) = 2\pi r^2 \cos 2\theta$$

also wie oben.

g) Ueber den Wert der ersten Abgeleiteten der Function $F(z)$ in unendlicher Form.

α') t und s sind beide sehr gross und $z > 0$.

Weil s sehr gross ist, so muss auch $x^2 + y^2$ sehr gross sein; z hingegen kann endlich oder sehr gross sein. Ich lege der Rechnung das Integral

$$= \int \frac{\sqrt{B+u}}{\sqrt{(A+u)}} \cdot \frac{P' du}{PW\sqrt{u}}$$ (Weg eine rechtl. Schlinge aus dem Ostpunkte um t allein)

zu Grunde. Es ist

$$\frac{1}{W\sqrt{u}} = \frac{\sqrt{(A+u)(B+u)}}{\sqrt{(u-t)(u-t')(u-t'')}}$$

$$P = \frac{u(u-s)(u-s'')}{(A+u)(B+u)}, \qquad \frac{P'}{P} = \frac{1}{u} + \frac{1}{u-s} + \frac{1}{u-s''} + \frac{1}{u+A} - \frac{1}{u+B}$$

also

$$J = \int \frac{u+B}{\sqrt{(u-t')(u-t'')}} \cdot \left(\frac{1}{u} + \frac{1}{u-s} + \frac{1}{u-s''} - \frac{1}{u+A} - \frac{1}{u+B}\right) \times \frac{du}{\sqrt{(u-t)}}$$

und weil im Integrale nur sehr grosse Werte von u in Betracht kommen, so ist auch

$$J = \int \left(1 + \frac{2B + t' + t''}{2u} + \dots\right) \cdot \left(\frac{1}{u - s} + \frac{s'' + A + B}{u^2} + \dots\right) \times \frac{du}{\sqrt{(u - t)}}$$

oder auch

$$J = \int \frac{1}{u - s} \frac{du}{\sqrt{(u - t)}} + \frac{2B + t' + t''}{2s} \int \left(\frac{1}{u - s} - \frac{1}{u}\right) \cdot \frac{du}{\sqrt{(u - t)}} + (s'' + A + B) \int \frac{1}{u^2} \cdot \frac{du}{\sqrt{(u - t)}}$$

$$= \left(1 + \frac{2B + t' + t''}{2s}\right) \cdot \frac{1}{i} \int (t - u)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{du}{u - s}$$

(Weg ein kleiner rechtl. Kreis um den Pol s)

$$+ (s'' + A + B) \int (t - u)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{du}{u^2}$$ (Weg ein kleiner rechtl. Kreis um den Pol null)

$$- \frac{2B + t' + t''}{2is} \int (t - u)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{du}{u}$$ (Weg ein kleiner rechtl. Kreis um den Pol null).

Nach einem Lehrsatze von Cauchy erhält man nun

$$J = \left(1 + \frac{2B + t' + t''}{2s}\right) \cdot \frac{2\pi}{\sqrt{(t - s)}} + (s'' + A + B) \cdot \frac{\pi}{t^{\frac{3}{2}}} - \frac{2B + t' + t''}{s} \cdot \frac{\pi}{\sqrt{t}}$$

$$= \left(2 + \frac{2B + t' + t''}{s} \cdot \frac{\pi}{\sqrt{(t - s)}} + (ss'' - t(t' + t'') + (A + B)s - 2Bt\right) \cdot \frac{\pi}{s t^{\frac{3}{2}}}$$

Die Gleichung

$$t = t \cdot \left(\frac{x^2}{A + t} + \frac{y^2}{B + t} + \frac{z^2}{t}\right)$$

rechts nach fallenden Potenzen des grossen t entwickelt, gibt

$$t = x^2 + y^2 + z^2 - \frac{Ax^2 + By^2}{t} + \dots$$

also, wenn man

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

setzt und sich mit zwei Termen begnügt

$$t = r^2 - \frac{Ax^2 + By^2}{r^2} + \dots$$

Die Gleichung

$$s = s\left(\frac{x^2}{A+s} + \frac{y^2}{B+s}\right)$$

ebenso behandelt, gibt

$$s = x^2+y^2 - \frac{Ax^2+By^2}{x^2+y^2} + \ldots$$

also

$$t-s = z^2\left(1+\frac{Ax^2+By^2}{(x^2+y^2).r^2} + \ldots\right)$$

und demnach

$$\frac{1}{\sqrt{(t-s)}} = \frac{1}{z}\left(1 - \tfrac{1}{2}\frac{Ax^2+By^2}{(x^2+y^2).r^2} + \ldots\right)$$

Man ziehe ferner die fünf streng richtigen Gleichungen

$$t+t'+t'' = r^2-(A+B), \qquad t(t'+t'')+t't'' = -(A+B)r^2+Ax^2+By^2$$
$$tt't'' = ABz^2, \qquad s+s'' = x^2+y^2-(A+B), \qquad ss'' = -Bx^2-Ay^2+AB$$

zu Rate. Die erste gibt

$$2B+t'+t'' = r^2-t-(A-B)$$

oder angenähert

$$= \frac{Ax^2+By^2}{r^2} - (A-B) + \ldots$$

demnach ist

$$\left(2+\frac{2B+t'+t''}{s}\right)\cdot\frac{\pi}{\sqrt{(t-s)}} = \frac{\pi}{z}\left(\frac{A-B}{x^2+y^2}\right)$$

Aus der zweiten und fünften Gleichung folgt ferner

$$ss''-t(t'+t'') = (A+B)z^2+AB-t't''$$

also mit Hülfe von Gleichung drei

$$= (A+B)z^2+AB\left(1-\frac{z^2}{t}\right)$$

oder annähernd

$$ss''-t(t'+t'') = (A+B)z^2+AB.\frac{x^2+y^2}{r^2}+\ldots$$

Ferner ist

$$(A+B)s-2Bt = (A-B)(x^2+y^2)-2Bz^2$$

Man erhält also

$$ss''-t(t'+t'')+(A+B)s-2Bt = (A-B)r^2+\ldots$$

und endlich ist

$$J = \frac{\pi}{2}\left(2-\frac{A-B}{x^2+y^2}+(A-B)\cdot\frac{z}{(x^2+y^2).r}+\ldots\right)$$

Der Näherungswert von $\frac{\partial F(s)}{\partial x}$ in dem Gebiete des Unendlichen, wo s und t sehr gross sind, ist demnach

$$\frac{\partial F(s)}{\partial x} = -\frac{\pi\sqrt{AB}}{A-B} \cdot xz\left(2-\frac{A-B}{x^2+y^2}+(A-B)\frac{z}{(x^2+y^2).r}+\cdots\right)$$

Ebenso findet man

$$\frac{\partial F(s)}{\partial y} = \frac{\pi\sqrt{AB}}{A-B} yz\left(2+\frac{A-B}{x^2+y^2}+(A-B)\frac{s}{(x^2+y^2).r}+\cdots\right)$$

$$\frac{\partial F(s)}{\partial z} = \pi\sqrt{AB}\left(\frac{1}{r}+\tfrac{1}{2}\frac{Ax^2+By^2}{r^5}+\cdots\right)$$

Ist z neg., t und s aber pos. sehr gross, so muss man die Formel

$$F(-z) = 2\pi\sqrt{AB}\,L(s) - F(z)$$

anwenden.

b'. Nur t ist sehr gross.

Die Coordinate z ist sehr gross, s ist endlich und kann pos. oder neg. sein, x^2+y^2 ist endlich. Der Punkt $(x, y, 0)$ liegt also innerhalb der Ellipse oder ausserhalb derselben in endlicher Entfernung.

Wenn

$$J = \int \frac{\sqrt{B+u}}{\sqrt{A+u}} \cdot \frac{P'}{PW\sqrt{u}}\,du$$

(Weg eine rechtl. Schlinge aus dem Ostp allein um den Pol t)

so erhält man auf gleiche Weise wie oben

$$J = \int\left(1+\frac{2B+t'+t''}{2u}+\cdots\right)\left(\frac{1}{u}+\frac{s+s''+A+B}{u^2}+\cdots\right)\cdot\frac{du}{\sqrt{(u-t)}}$$

$$= \int\left(\frac{1}{u}+\frac{2B+t'+t''}{2u^2}+\frac{s+s''+A+B}{u^2}+\cdots\right)\cdot\frac{du}{\sqrt{(u-t)}}$$

$$-\frac{1}{i}\int(t-u)^{-\frac{1}{2}}\frac{du}{u}$$

(Weg ein rechtl. Kreis allein um den Pol null)

$$+\left(\frac{2B+t'+t''}{2}+s+s''+A+B\right)\cdot\frac{1}{i}\int(t-u).^{-\frac{1}{2}}\frac{du}{u^2}$$

(Weg ein rechtl. Kreis allein um den Pol null).

Nach Cauchy erhält man

$$J = \frac{2\pi}{\sqrt{t}} + \left(\frac{2B + t' + t''}{2} + s + s'' + A + B\right) \cdot \frac{\pi}{t^{\frac{3}{2}}}$$

$$- \frac{\pi}{t^{\frac{3}{2}}}\left(2t + \frac{2B + t' + t''}{2} + s + s'' + A + B\right)$$

und mit Hülfe obiger fünf Relationen zwischen t und den s erhält man hieraus

$$J = \frac{\pi}{t^{\frac{3}{2}}}\left(2t + \frac{r^2 - t - (A - B)}{2} + x^2 + y^2\right)$$

$$= \pi \cdot \left(\frac{2}{t^{\frac{1}{2}}} - \frac{A - B}{2t^{\frac{3}{2}}} + \frac{x^2 + y^2}{t^{\frac{3}{2}}}\right)$$

Nun ist

$$t^{-\frac{1}{2}} = (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} = z^{-1}\left(1 + \frac{x^2 + y^2}{z^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{z} - \frac{x^2 + y^2}{2z^3} + \ldots$$

$$t^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{z^3} - \frac{3(x^2 + y^2)}{2z^5} + \ldots$$

demnach

$$\frac{2}{t^{\frac{1}{2}}} = \frac{2}{z} - \frac{x^2 + y^2}{z^3} + \ldots$$

$$- \frac{A - B}{2t^{\frac{3}{2}}} = - \frac{(A - B)}{2z^3} + \frac{3(A - B).(x^2 + y^2)}{4z^5}$$

$$\frac{x^2 + y^2}{t^{\frac{3}{2}}} = \frac{x^2 + y^2}{z^3} - \frac{3(x^2 + y^2)^2}{2z^5} + \ldots$$

somit

$$J = \pi \cdot \left(\frac{2}{z} - \frac{A - B}{2z^3} + \ldots\right)$$

und

$$\frac{\partial F(z)}{\partial x} = - \frac{\sqrt{AB} \cdot \pi x}{A - B}\left(2 - \frac{A - B}{2z^2} + \ldots\right)$$

Ebenso findet man

$$\frac{\partial F(z)}{\partial y} = - \frac{\sqrt{AB} \cdot \pi y}{A - B}\left(2 + \frac{A - B}{2z^2} + \ldots\right)$$

$$\frac{\partial F(z)}{\partial z} = \pi\sqrt{AB}\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{2} \cdot \frac{Ax^2 + By^2}{r^5} + \ldots\right)$$

Diese Formeln gelten zunächst nur für ein pos. z. Ist z neg., so muss man bei pos. z die Formel

$$F(-z) = 2\pi\sqrt{AB}\,L(z) - F(z)$$

und bei neg. z die Formel

$$F(-z) = 2\pi(\sqrt{AB}\,L(0) - z^2) - F(z)$$

anwenden.

C) *Berechnung des Differentialparameters zweiter Ordnung der Function $F(z)$.*

a) $x > 0$.

Aus der Formel

$$\frac{\partial F(z)}{\partial x} = -\frac{\sqrt{AB}}{A-B}xz\int_0^t \frac{\sqrt{B+u}}{\sqrt{A+u}}\cdot\frac{P'}{PW\sqrt{u}}du$$

(Weg eine Schlinge aus dem Ostp. um t allein)

folgt

$$\frac{\partial^2 F(z)}{\partial x^2} = -\frac{\sqrt{AB}}{A-B}\int_0^t \frac{\sqrt{B+u}}{\sqrt{A+u}}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\cdot\left(\frac{xzP'}{PW\sqrt{u}}\right)du \quad \text{(Weg wie vorhin)}$$

Weil

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{zP'}{PW\sqrt{u}}\right) = -2\frac{\partial}{\partial u}\cdot\left(\frac{xz\sqrt{u}}{(A+u)PW}\right)$$

so ist

$$\begin{aligned}
&\frac{\sqrt{B+u}}{\sqrt{A+u}}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{xzP'}{PW\sqrt{u}}\right) = \frac{\sqrt{B+u}}{\sqrt{A+u}}\;\frac{zP'}{PW\sqrt{u}}\\
&\quad -2x^2z\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\sqrt{B+u}}{\sqrt{B+u}}\cdot\frac{\sqrt{u}}{(A+u)PW}\right)\\
&\quad +2x^2z\cdot\tfrac{1}{2}\frac{A-B}{(A+u)\sqrt{(A+u)(B+u)}}\cdot\frac{\sqrt{u}}{(A+u)\cdot PW}\\
&= -2x^2z\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\sqrt{u(B+u)}}{(A+u)^{\frac{3}{2}}PW}\right)+\frac{\sqrt{B+u}}{\sqrt{A+u}}\cdot\frac{zP'}{PW\sqrt{u}}\\
&\quad +(A-B)z\cdot\frac{x^2}{(A+u)^2}\cdot\frac{u}{PWU}
\end{aligned}$$

Weil nun der Ausdruck unter dem Ableitungszeichen im Ostpunkte verschwindet, so erhält man

$$\frac{\partial^2 F(z)}{\partial x^2} = -\frac{\sqrt{AB}}{\sqrt{A-B}}\int \frac{\sqrt{B+u}}{\sqrt{A+u}} \cdot \frac{zP'}{PW\sqrt{u}}\,du$$

$$-\sqrt{AB}\int \frac{x^2}{(A+u)^2} \cdot \frac{zu}{PWU}\,du$$

und hieraus

$$\frac{\partial^2 F(z)}{\partial y^2} = \frac{\sqrt{AB}}{A-B}\int \frac{\sqrt{A+u}}{\sqrt{B+u}} \cdot \frac{zP'}{PW\sqrt{u}}\,du$$

$$-\sqrt{AB}\int \frac{y^2}{(B+u)^2} \cdot \frac{zu}{PWU}\,du$$

Addirt man diese beiden Ausdrücke und beachtet, dass

$$\frac{\sqrt{A+u}}{\sqrt{B+u}} - \frac{\sqrt{B+u}}{\sqrt{A+u}} = \frac{A-B}{\sqrt{(A+u)(B+u)}} = \frac{(A-B).\sqrt{u}}{U}$$

und

$$\frac{x^2}{(A+u)^2} + \frac{y^2}{(B+u)^2} = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{P}{u}\right) = \frac{P'}{u} - \frac{P}{u^2}$$

so erhält man

$$\frac{\partial^2 F(z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F(z)}{\partial^2 y} = \sqrt{AB}\int \frac{zP'}{PWU}\,du$$

$$-\sqrt{AB}\int\left(\frac{zP'}{PWU} - \frac{z}{WU_u}\right)du$$

oder

$$\frac{d^2 F(z)}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 F(z)}{\partial^2 y} = \sqrt{AB}\,z\int \frac{du}{WUu}$$

und weil nun

$$\frac{\partial^2 F(z)}{\partial^2 z} = -\sqrt{AB}\,z\int \frac{du}{WUu}$$

so folgt

$$\frac{\partial^2 F(z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F(z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F(z)}{\partial z^2} = 0$$

Diese Ableitung ist aber nur so lange zulässig, als die Integrale die ersten Abgeleiteten bestimmte Werte darstellen. Das ist a für $z = 0$ nicht mehr der Fall, weil dann der Integrationsweg ni mehr zwischen t und s hindurch kann, ohne dass ein Teil des In grals unendlich wird. Mit dem Factor z stellen sich demnach Ausdrücke für die ersten Abgeleiteten unter der unbestimmten Fo $0.\infty$ dar. Es ist nun

$$F(z) = \sqrt{AB} \cdot \pi L(s) + \tfrac{1}{2} \int \left(L(u) \cdot \frac{zP'}{PW\sqrt{u}} + z \frac{W}{U} \right) du$$

(Weg eine rechtl. Schlinge aus dem Ostp. um t und s allein)

oder

$$F(z) = \sqrt{AB} \cdot \pi L(s) + \bar{F}(z)$$

wenn $\bar{F}(z)$ obiges Integral bezeichnet. Weil nun dieses Integral auch für $z = 0$ seine Bedeutung nicht verliert, so lange als $s > 0$ ist, so ist nach dem Vorhergehenden die Gleichung

$$\frac{\partial^2 \bar{F}(z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{F}(z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{F}(z)}{\partial z^2} = 0$$

auch für $z = 0$ gültig, so lange $s > 0$ ist. Weil

$$L'(u) = \tfrac{1}{2} \frac{P}{U\sqrt{u}}, \quad P(s) = 0$$

so ist auch

$$L'(s) = 0$$

folglich

$$\frac{\partial L(s)}{\partial x} = -\frac{2x}{A-B} \cdot \frac{\sqrt{B+s}}{\sqrt{A+s}}$$

und weil ferner

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\sqrt{B+s}}{\sqrt{A+s}} \right) = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{A-B}{A+s} \cdot \frac{1}{\sqrt{(A+s)(B+s)}}$$

so ist auch

$$\frac{\partial^2 L(s)}{\partial x^2} = -\frac{2}{A-B} \cdot \frac{\sqrt{B+s}}{\sqrt{A+s}} - \frac{x}{A+s} \cdot \frac{1}{\sqrt{(A+s)(B+s)}} \cdot \frac{\partial s}{\partial x}$$

und ebenso

$$\frac{\partial^2 L(s)}{\partial y^2} = \frac{2}{A-B} \cdot \frac{\sqrt{(A+s)}}{\sqrt{(B+s)}} - \frac{y}{B+s} \cdot \frac{1}{\sqrt{(A+s)(B+s)}} \cdot \frac{\partial s}{\partial y}$$

Um addiren zu können, ist nur noch nötig zu wissen, was

$$\frac{x}{A+s} \cdot \frac{\partial s}{\partial x} + \frac{y}{B+s} \cdot \frac{\partial s}{\partial x}$$

ist. Die Gleichung

$$\frac{x^2}{A+s} + \frac{y^2}{B+s} = 1$$

gibt

$$\frac{\partial s}{\partial x} = \frac{2p^2 x}{A+s}, \quad \frac{\partial s}{\partial y} = \frac{2p^2 y}{B+s}$$

also

$$\frac{x}{A+s}\cdot\frac{\partial s}{\partial x}+\frac{y}{B+s}\cdot\frac{\partial s}{\partial y}-2p^2\left(\frac{x^2}{(A+s)^2}+\frac{y^2}{(B+s)^2}\right)=2$$

folglich ist

$$\frac{\partial^2 L(s)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 L(s)}{\partial y^2}=\frac{2}{A-B}\left(\frac{\sqrt{A+s}}{\sqrt{B+s}}-\frac{\sqrt{B+s}}{\sqrt{A+s}}\right)$$
$$-\frac{2}{\sqrt{(A+s)(B+s)}}=0$$

Die Gleichung

$$\frac{\partial^2 F(s)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 F(s)}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 F(s)}{\partial z^2}=0$$

ist somit auch für $z=0$ richtig, so lange als $s>0$ ist. Der Beweis kann auch auf folgende Weise geführt werden:

Ist $s>0$, so hat man

$$F(0)=\sqrt{AB}\,.\,\pi L(s)$$

also

$$\frac{\partial^2 F(0)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 F(0)}{\partial y^2}=\sqrt{AB}\,\pi\left(\frac{\partial^2 L(s)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 L(s)}{\partial y^2}\right)=0$$

Ferner ist

$$\frac{\partial^2 F(s)}{\partial z^2}=-\sqrt{AB}\,s\int\frac{du}{WUu}$$ (Weg eine Schlinge aus dem Ostp. um t allein)

und weil dieses Integral auch für $z=0$ einen bestimmten Wert behält, so lange als $s>0$ ist, so ist auch $\frac{\partial^2 F(s)}{\partial z^2}$ für $z=0$ gleich null und somit die Gleichung

$$\frac{\partial^2 F(s)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 F(s)}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 F(s)}{\partial z^2}=0$$

auch für $z=0$ richtig. Liegt der Punkt $(x, y, 0)$ innerhalb der Focalellipse, so setze man

$$F(z)=\pi\sqrt{AB}\,L(0)-\pi z^2+\tfrac{1}{2}\sqrt{AB}\int L(u)\cdot\frac{zP'}{PW\sqrt{u}}+\frac{zW}{U}\,du$$

(Weg eine rechtl. Schlinge aus dem Ostp. um t und 0 allein)

oder

$$F(z)=\pi\sqrt{AB}\,L(0)-\pi z^2+F_1(z)$$

also

$$\frac{\partial^2 F(z)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 F(z)}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 F(z)}{\partial z^2}=\pi_1\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\left(\sqrt{AB}\,L(0)-z^2\right)$$
$$+\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right).F_1(z)$$

Weil nun die Function $F_1(z)$ auch für $z=0$ in dem Falle einen bestimmten Wert behält, wo $s<0$ ist, so ist die Gleichung

$$\frac{\partial^2 F_1(z)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 F_1(z)}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 F_1(z)}{\partial z^2}=0$$

auch für $z=0$ richtig. Ferner ist

$$L(0)=\log(\sqrt{A}+\sqrt{B})+\frac{Ay^2-Bx^2}{(A-B)\sqrt{AB}}$$

also

$$\frac{\partial^2 L(0)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 L(0)}{\partial y^2}=\frac{2}{\sqrt{AB}}$$

folglich auch

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)(\sqrt{AB}\,L(0)-z^2)=0$$

somit die Gleichung

$$\frac{\partial^2 F(z)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 F(z)}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 F(s)}{\partial z^2}=0$$

auch für $z=0$ richtig, wenn $s<0$ ist. Zu demselben Resultate gelangt man auch durch folgende Betrachtung:

Es ist

$$F(0)=\pi\sqrt{AB}\,L(0)$$

also

$$\frac{\partial^2 F(0)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 F(0)}{\partial y^2}=2\pi$$

Ferner ist

$$\frac{\partial^2 F(z)}{\partial z^2}=-\sqrt{AB}\,z\int\frac{du}{WUu}\qquad\text{(Weg eine Schlinge um } t \text{ allein)}$$

$$=-2\pi-\sqrt{AB}z\int\frac{du}{WUu}\qquad\text{(Weg eine Schlinge um } t \text{ und } 0 \text{ allein)}$$

Weil nun dieses Integral für $z=0$ verschwindet, so ist

$$\frac{\partial^2 F(0)}{\partial z^2}=-2\pi$$

somit auch

$$\frac{\partial^2 F(0)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 F(0)}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 F(0)}{\partial z^2}=0$$

b) $z < 0$.

Liegt der Punkt $(x, y, 0)$ ausserhalb der Grundfläche, so ist

$$F(-z) = 2\pi\sqrt{AB} \times L(s) - F(z)$$

also, wenn

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \square$$

gesetzt wird

$$\square F(-z) = 2\pi\sqrt{AB}\,\square L(z) - \square F(z)$$
$$= 0$$

Liegt hingegen der Punkt $(x, y, 0)$ innerhalb der Grundellipse, so hat man

$$F(-z) = 2\pi(\sqrt{AB}\,L(0) - z^2) - F(z)$$

also

$$\square F(-z) = 2\pi.\square(\sqrt{AB}\,L(0) - z^2) - \square F(z)$$
$$= 0$$

Der Differentialparameter zweiter Ordnung der Function $F(z)$ ist also im ganzen Raume null mit Ausnahme der Unstetigkeitscurve $\left(z = 0,\ \frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} = 1\right)$.

§ 18. Betrachtung des Potentials der elliptischen Walze.

a) Das Potential.

α) Der Bezugspunkt liege oberhalb der obern Grundfläche.

$$V = F(z) - F(z-c)$$

$$= \sqrt{AB}\int_{t_0}^{\infty}\left(\frac{L(u).zP'}{PW_0\sqrt{u}} + \frac{zW_0}{U}\right)du$$

$$-\sqrt{AB}\int_{t_1}^{\infty}\left(\frac{L(u)(z-c).P'}{PW_1\sqrt{u}} + \frac{(z-c)W_1}{U}\right)du$$

Sind t und s sehr gross, so hat man

$$F(z) = \pi\sqrt{AB}\left[\frac{y^2 - x^2}{A - B} + \log 2(r + z) + \tfrac{1}{2}\right]$$

$$F(z-c) = \pi\sqrt{AB}\left[\frac{y^2 - x^2}{A - B} + \log 2(r_1 + z - c) + \tfrac{1}{2}\right]$$

also

$$V = \pi \sqrt{AB}\,(\log(r+z) - \log(r'+z-c))$$

Wenn z sehr gross ist, so kann man c als Differential von z betrachten und hat

$$V = \pi \sqrt{AB}\, c \frac{\partial}{\partial z} \cdot \log(r+z) = \frac{\pi \sqrt{AB}\, c}{r}$$

Ist aber z endlich, so hat man

$$r_1^2 = r^2 - (2cz - c^2) = r^2\left(1 - \frac{2cz - c^2}{r^2}\right)$$

$$r_1 = r - \frac{2cz - c^2}{2r}$$

$$r_1 + z - c = r + z - \frac{2c(r+z) - c^2}{2r} = (r+z)\left(1 - \frac{c}{r} + \frac{c^2}{2r(r+z)}\right)$$

$$= (r+z)\left(1 - \frac{c}{r}\right)$$

wenn man den Term $\frac{c^2}{2r(r+z)}$ vernachlässigt. Es ist somit

$$V = \pi \sqrt{AB}\left(\log(r+z) - \log(r+z) - \log\left(1 - \frac{c}{r}\right)\right) = \frac{\pi \sqrt{AB}\, c}{r}$$

Ist nur t sehr gross, s also endlich, so folgt aus den Gleichungen

$$F(z) = \pi \sqrt{AB}\left[\frac{y^2 - x^2}{A - B} + \log 4z + \tfrac{1}{2}\right]$$

$$F(z-c) = \pi \sqrt{AB}\left[\frac{y^2 - x^2}{A - B} + \log 4(z-c) + \tfrac{1}{2}\right]$$

dass

$$V = \pi \sqrt{AB}\left(\log 4z - \log 4z\left(1 - \frac{c}{z}\right)\right) = \frac{\pi \sqrt{AB}\, c}{r}$$

b) Der Bezugspunkt liege auf der obern Grundfläche ausserhalb der Randellipse.

$$V = F(c) - \pi \sqrt{AB}\, L(s)$$

$$= \sqrt{AB} \int_0^t \left(\frac{L(u)\, c\, P'}{P W_0 \sqrt{u}} + \frac{c\, W_0}{U}\right) du - \pi \sqrt{AB}\, L(s)$$

Wenn t und s sehr gross sind, so hat man

$$L(s) = \frac{y^2 - x^2}{A - B} + \tfrac{1}{2} . \log 4s + \frac{x^2 + y^2}{2s} + \dots$$

Obgleich

$$s = x^2 + y^2 - \frac{Ax^2 + By^2}{x^2 + y^2} + \dots$$

so begeht man doch nur einen Fehler von der Ordnung $\frac{1}{r^2}$, w
man s durch $x^2 + y^2$ ersetzt, wodurch man erhält

$$L(s) = \frac{y^2 - x^2}{A - B} + \tfrac{1}{2} \log 4(x^2 + y^2) + \tfrac{1}{2}$$

somit

$$V = \pi \sqrt{AB} \left[\log 2(r + c) - \tfrac{1}{2} \log 4(x^2 + y^2) \right]$$

$$= \pi \sqrt{AB} \left[\log (r + c) - \tfrac{1}{2} \log (x^2 + y^2) \right]$$

Weil

$$x^2 + y^2 = r^2 - c^2$$

so ist

$$(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} = r \left(1 - \frac{c^2}{r^2}\right)^{\frac{1}{2}} = r \left(1 - \frac{c^2}{2r^2} + \dots\right)$$

also

$$\log (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} = \log r - \frac{c^2}{2r^2}, \quad \log (r + c) = \log r + \frac{c}{r}$$

und

$$V = \frac{\pi \sqrt{AB}\, c}{r}$$

c) Der Bezugspunkt liege auf der obern Grundfläche innerhalb Randellipse.

$$V = F(c) - \pi \sqrt{AB}\, L(0)$$

$$= \sqrt{AB} \int_{t_0}^{\infty} \left(\frac{L(u) . cP'}{PW_0 \sqrt{u}} + \frac{cW_0}{U} \right) du - \pi \sqrt{AB}\, L(0)$$

b) Der Bezugspunkt liege in unmittelbarer Nähe der obern Randellipse oberhalb der obern Grundfläche.

$$V = F(z) - \pi \sqrt{AB}\, L(0) + \frac{2\pi \sqrt{AB}}{\sqrt{-\sigma}} \cdot \frac{2AB + (A + B)\sigma}{(A - B)^2} . r_1 \cos\theta$$

$$- \frac{4\sqrt{-\sigma AB}}{A - B} . (a \operatorname{tang} a + b \operatorname{tang} b) . r_1 \sin\theta - r_1^2 \sin 2\theta \times$$

$$\times\left(\log\frac{ABr_1^2}{(-4\sigma)^3}-3+4\,\frac{Ba\operatorname{tg}a+Ab\operatorname{tg}b}{A-B}\right)-r_1^2\theta\cos 2\theta$$
$$+\pi\frac{AB(A+B+2\sigma)}{-\sigma.(A-B)^2}\cdot r_1^2\cos^2\theta$$

Liegt der Bezugspunkt auf der Randellipse, so ist also

$$V=F(c)-\pi\sqrt{AB}\,L(0)$$

e) Der Bezugspunkt liege ausserhalb der Walze auf einer mit den Grundflächen || Ebene, welche zwischen denselben hindurch geht.

Weil in diesem Falle $z-c$ neg. ist, so ersetze man $F(z-c)$ durch $2\pi\sqrt{AB}\,L(s)-F(c-z)$ und erhält

$$V=F(z)+F(c-z)-2\pi\sqrt{AB}\,L(s)$$

oder

$$V=\sqrt{AB}\int_{t_0}^{\infty}\left(\frac{L(u).zP'}{PW_0\sqrt{u}}+z\frac{W_0}{U}\right)du$$
$$+\sqrt{AB}\int_{t_1}^{\infty}\left(\frac{L(u).(c-z)P'}{PW_1\sqrt{u}}+\frac{(c-z)W_1}{U}\right)du-2\pi\sqrt{AB}\,L(s)$$

Sind t und s sehr gross, so geht diese Formel in

$$V=\pi\sqrt{AB}\left[\log(r+z)+\log(r_1+c-z)-\log(x^2+y^2)\right]$$

über. Es ist

$$x^2+y^2=r^2-z^2=(r+z)(r-z),\quad r_1=r+\frac{c^2-2cz}{2r}$$

also

$$r_1+c-z=r-z+\frac{c}{r}(r-z)+\frac{c^2}{2r}=(r-z)\left(1+\frac{c}{r}+\frac{c^2}{2r(r-z)}\right)$$

folglich

$$\log\left(\frac{r_1+c-z}{r-z}\right)=\frac{c}{r}$$

und demnach

$$V=\frac{\pi\sqrt{AB}\,c}{r}$$

f) Der Bezugspunkt liege auf der untern Grundfläche ausserhalb der Randellipse.

$$V=F(c)-\pi\sqrt{AB}\,L(s)$$

$$= \sqrt{AB} \int_{t_1}^{\infty} \left(\frac{L(u) . cP'}{PW_1 \sqrt{u}} + \frac{cW_1}{U} \right) du - \pi \sqrt{AB}\, L(s)$$

ρ) Der Bezugspunkt liege unterhalb der untern Grundfläche.

$$V = F(c-z) - F(-z)$$

$$V = \sqrt{AB} \int_{t_1}^{\infty} \left(\frac{L(u) . (c-z)P'}{PW_1 \sqrt{u}} + \frac{(c-z)W_1}{U} \right) du$$

$$- \sqrt{AB} \int_{t_0}^{\infty} \left(\frac{L(u)\,(-z)P'}{PW_0 \sqrt{u}} + \frac{(-z)W_0}{U} \right) du$$

Vermöge der Continuität gilt diese Gleichung auch, wenn sich der Bezugspunkt unter der Ebene der untern Grundfläche in dasjenige Gebiet des Raumes begibt, wo s neg. ist. Für einen Punkt der untern Grundfläche innerhalb der Randellipse ist demnach

$$V = F(c) - \pi \sqrt{AB}\, L(0)$$

und für einen Punkt in der Nähe der Randellipse erhält man eine ähnliche Formel wie bei b.

ι) Der Bezugspunkt liege im Innern der Walze.

Eine durch den Bezugspunkt mit den Grundflächen parallel gelegte Ebene teilt die Walze in zwei Walzen. Für jede derselben liegt der Bezugspunkt nicht innerhalb, sondern nur auf einer Grundfläche, weshalb die Function V angewendet werden kann, wie wenn der Bezugspunkt ausserhalb der betreffenden Walze läge. Bei der obern Walze hat das Potential den Wert $-F(0)+F(c-z)$ und bei der untern $F(z)-F(0)$. Die Summe beider ist der Wert des Potentials der ganzen Walze für einen inneren Punkt, welches mit V bezeichnet werden soll. Weil s neg. ist, so ist

$$F(0) = \pi \sqrt{AB}\, L(0)$$

also

$$V' = F(z) + F(c-z) - 2\pi \sqrt{AB}\, L(0)$$

$$= \sqrt{AB} \int_{t_0}^{\infty} \left(\frac{L(u) . zP'}{PW \sqrt{u}} + \frac{zW_0}{U} \right) du$$

$$+ \sqrt{AB} \int_{t_1}^{\infty} \left(\frac{L(u) . (c-z)P'}{PW_1 \sqrt{u}} + \frac{(c-z)W_1}{U} \right) du - 2\pi \sqrt{AB}\, L(0)$$

Derselbe ist innerhalb der Walze eindeutig und unterscheidet sich von V. Denn führt man V durch die obere Grundfläche in die Walze, so ist

$$V = V' + 2\pi(c-z)^2$$

geschieht es durch die untere Grundfläche, so ist

$$V = V' + 2\pi + z^2$$

i) Der Bezugspunkt liege ausserhalb der Walze zwischen den beiden Grundfiächen und in unmittelbarer Nähe der obern Randellipse.

Weil hier das Potential die Form

$$V = F(z) + F(c-z) - 2\pi\sqrt{AB}\,L(s)$$

hat, so hat man noch $L(s)$ für einen Punkt in der Nähe der Randellipse zu entwickeln. Nach Seite 269 ist für diesen Fall

$$L(s) = \log(\sqrt{A}+\sqrt{B}) - \frac{\sqrt{AB}}{(A-B)^2}\cdot(A+B+2s'')$$

$$-\frac{1}{(A-B)^2\cdot\sqrt{AB}}\cdot(2AB+(A+B)s'')\cdot s+\tfrac{1}{4}\cdot\frac{s''}{(AB)^{\frac{3}{2}}}\cdot s^2+\ldots$$

ferner ist nach Seite 257

$$s'' = \sigma - \frac{(A+\sigma)(-B-\sigma)}{(-\sigma)^2}\cdot r^2\cos^2\theta+\ldots$$

und nach Seite 258

$$s = 2pr\cos\theta + \frac{p^2r^2\cos^2\theta}{C}$$

wo

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{A}+\frac{1}{B}-\frac{1}{(-\sigma)}$$

Setzt man nun diese Werte in den Ausdruck für $L(s)$ ein und vernachlässigt die dritte Ordnung, so erhält man

$$L(s) = \log(\sqrt{A}+\sqrt{B}) - \frac{\sqrt{AB}}{(A-B)^2}\cdot(A+B+2\sigma)$$

$$-\frac{2}{(A-B)^2\sqrt{-\sigma}}\cdot(2AB+(A+B)\sigma)\cdot r\cos\theta$$

$$+\frac{\sqrt{AB}}{(A-B)^2}\cdot\frac{1}{(-\sigma)}\cdot\left(\frac{2(A+\sigma)(-B-\sigma)}{(-\sigma)}-\frac{(A-B)^2\cdot(-\sigma)}{AB}\right.$$

$$\left.-\frac{2AB+(A+B)\sigma}{C}\right)\cdot r^2\cos^2\theta+\ldots$$

Demnach ist

$$V = -\pi\sqrt{AB}\left(\log(\sqrt{A}+\sqrt{B}) - \frac{\sqrt{AB}}{(A-B)^2}(A+B+2\sigma)\right)$$
$$+\frac{2\pi\sqrt{AB}}{\sqrt{-\sigma}}\cdot\frac{2AB+(A+B)\sigma}{(A-B)^2}\cdot r_1\cos\theta$$
$$-\frac{4\sqrt{-\sigma AB}}{A-B}\cdot(a\,\mathrm{tang}\,a+b\,\mathrm{tang}\,b)\,r_1\sin\theta$$
$$-r_1^2\sin 2\theta\left(\log\frac{ABr_1^2}{(-4\sigma)^2}-3+\cdot\frac{Ba\,\mathrm{tang}\,a+Ab\,\mathrm{tang}\,b}{A-B}\right)-r_1^2\theta\cos 2\theta$$
$$-\frac{2\pi AB}{(A-B)^2(-\sigma)}\cdot\left(\frac{2(A+\sigma)(-B-\sigma)}{(-\sigma)}-\frac{(A-B)^2(-\sigma)}{AB}\right.$$
$$\left.-\frac{2AB+(A+B)\sigma}{C}+\frac{A+B+2\sigma}{2}\right)\cdot r_1^2\cos^2\theta$$
$$+\sqrt{AB}\int_{t_0}^{\infty}\left(\frac{L(u)\cdot zP'}{PW_0\sqrt{u}}+\frac{zW_0}{U}\right)du$$

t) Der Bezugspunkt liege innerhalb der Walze in unmittelbarer Nähe der obern Randellipse.

Das Potential für einen innern Punkt hat die Form

$$V_1 = F(z)+F(c-z)-2\pi\sqrt{AB}\,L(0)$$

und demnach muss $L(0)$ entwickelt werden. Nach Seite 270 ist

$$L(0) = L(s)+\frac{r^2\cos^2\theta}{\sqrt{AB}}$$

also auch gleich

$$L(0) = \log(\sqrt{A}+\sqrt{B})-\frac{\sqrt{AB}}{(A-B)^2}\cdot(A+B+2\sigma)$$
$$-\frac{2}{(A-B)^2\cdot\sqrt{-\sigma}}(2AB+(A+B)\sigma)\cdot r\cos\theta$$
$$-\frac{\sqrt{AB}}{(A-B)^2\cdot(-\sigma)}\cdot\frac{2(A+\sigma)(-B-\sigma)}{(-\sigma)}$$
$$\left.-\frac{2AB+(A+B)\sigma}{C}\right)\cdot r^2\cos^2\theta$$

mithin ist

$$V_1 = -\pi\sqrt{AB}\left(\log(\sqrt{A}+\sqrt{B}) - \frac{\sqrt{AB}\,(A+B+2\sigma)}{(A-B)^2}\right)$$

$$+\frac{2\pi\sqrt{AB}}{-\sigma}\left(\frac{2AB+(A+B)\sigma}{(A-B)^2}\right).r_1\cos\theta - 4\,.\,\frac{\sqrt{-\sigma AB}}{A-B}$$

$$\times(a\,\mathrm{tang}\,a+b\,\mathrm{tang}\,b).r_1\sin\theta - r_1^2\sin 2\theta\left(\log\frac{ABr_1^2}{(-4\sigma)^2}-3\right.$$

$$\left.+4\frac{Ba\,\mathrm{tang}\,a+Ab\,\mathrm{tang}\,b}{A-B}\right) - r_1^2\theta\cos 2\theta$$

$$-\frac{2\pi AB}{(A-B)^2.(-\sigma)}\cdot\left(\frac{2(A+\sigma)\,(-B-\sigma)}{(-\sigma)} - \frac{2AB+(A+B)\sigma}{C}\right.$$

$$\left.+\frac{A+B+2\sigma}{2}\right).r_1^2\cos^2\theta + \sqrt{AB}\int_{t_0}^{\infty}\left(\frac{L(u).zP'}{PW_0\sqrt{u}}+\frac{zW_0}{U}\right)du$$

l) Der Beznpspunkt liege ausserhalb der Walze zwischen den beiden Grundflächen in unmittelbarer Nähe der untern Randellipse.

Weil auch hier V die Form $F(z)+F(c-z)-2\pi\sqrt{AB}\,L(s)$ hat, so folgt aus den Formeln bei i) unmittelbar

$$V = -\pi\sqrt{AB}\left(\log(\sqrt{A}+\sqrt{B}) - \frac{\sqrt{AB}\,.\,(A+B+2\sigma)}{(A-B)^2}\right)$$

$$+\frac{2\pi\sqrt{AB}}{\sqrt{-\sigma}}\cdot\frac{2AB+(A+B)\sigma}{(A-B)^2}\,.\,r\cos\theta$$

$$+\frac{4\sqrt{-\sigma AB}}{A-B}(a\,\mathrm{tang}\,a+b\,\mathrm{tang}\,b)\,r\sin\theta + r^2\sin 2\theta$$

$$\times\left(\log\frac{ABr^2}{(-4\sigma)^2}-3+4\,.\,\frac{Ba\,\mathrm{tang}\,a+Ab\,\mathrm{tang}\,b}{A-B}\right) + r^2\theta\cos 2\theta$$

$$-\frac{2\pi AB}{(A-B)^2(-\sigma)}\left(\frac{2(A+\sigma)\,(-B-\sigma)}{(-\sigma)} - \frac{(A-B)^2(-\sigma)}{AB}\right.$$

$$\left.-\frac{2AB+(A+B)\sigma}{C}+\frac{A+B+2\sigma}{2}\right)\times r^2\cos^2\theta$$

$$+\sqrt{AB}\int_{t_1}^{\infty}\left(\frac{L(u)\,(c-z).P'}{PW_1\sqrt{u}}+\frac{(c-z)W_1}{U}\right)du$$

m) Der Bezugspunkt liege innerhalb der Walze in unmittelbarer Nähe der untern Randellipse.

Aus den Formeln bei l) folgt, dass

$$V = -\pi\sqrt{AB}\left(\log\sqrt{A}+\sqrt{B}) - \frac{\sqrt{AB}(A+B+2\sigma)}{(A-B)^2}\right)$$
$$+\frac{2\pi\sqrt{AB}}{\sqrt{-\sigma}}\,\frac{2AB+(A+B)\sigma}{(A-B)^2}\,.\,r\cos\theta$$
$$+\frac{4\sqrt{-\sigma AB}}{A-B}\,(a\,\mathrm{tang}\,a+b\,\mathrm{tang}\,b)\,.\,r\sin\theta+r^2\sin 2\theta$$
$$\times\left(\log\frac{ABr^2}{(-4\sigma)^3}-3+4\,.\,\frac{Ba\,\mathrm{tang}\,a+Ab\,\mathrm{tang}\,b}{A-B}+r^2\theta\cos 2\theta\right.$$
$$-\frac{2\pi AB}{(A-B)^2(-\sigma)}\cdot\left(\frac{2(A+\sigma)(-B-\sigma)}{(-\sigma)}-\frac{2AB+(A+B)\sigma}{C}\right.$$
$$\left.\left.+\frac{A+B+2\sigma}{2}\right)\,.\,r^2\cos^2\theta+\sqrt{AB}\int_{t_1}^{\infty}\left(\frac{L(u)\,.\,(c-z)\,P'}{PW_1\sqrt{u}}-\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{(c-z)\,W_1}{U}\right)\,du\right.$$

n) Der Bezugspunkt liege auf der untern Randellipse.

Aus obigen Formeln folgt

$$V=-\pi\sqrt{AB}\left(\log(\sqrt{A}+\sqrt{B})-\frac{\sqrt{AB}(A+B+2\sigma)}{(A-B)^2}\right)$$
$$+\sqrt{AB}\int_{t_1}^{\infty}\left(\frac{L(u)\,.\,(c-z)\,.\,P'}{PW_1\sqrt{u}}+\frac{(c-z)\,.\,W_1}{U}\right)\,du$$

o) Der Bezugspunkt liege unterhalb der untern Grundfläche in unmittelbarer Nähe der Randellipse.

$$V=-\pi\sqrt{AB}\left(\log\sqrt{A}+\sqrt{B})-\frac{\sqrt{AB}\,(A+B+2\sigma)}{(A-B)^2}\right)$$
$$+\frac{2\pi\sqrt{AB}}{\sqrt{-\sigma}}\cdot\frac{2AB+(A+B)\sigma}{(A-B)^2}\,.\,r\cos\theta$$
$$+\frac{4\sqrt{-\sigma AB}}{A-B}\,(a\,\mathrm{tang}\,a+b\,\mathrm{tang}\,b)\,r\sin\theta+r^2\sin 2\theta$$

$$\times\left(\log\frac{ABr^2}{(-4\sigma)^3}-3+4.\frac{Ba\operatorname{tg}a+Ab\operatorname{tg}b}{A-B}\right).r^2\theta\cos 2\theta$$

$$+\pi.\frac{AB(A+B+2\sigma)}{-\sigma(A-B)^2}r^2\cos^2\theta+\sqrt{AB}\int_{t_1}^{\infty}\left(\frac{L(u)(c-z).P'}{PW_1\sqrt{u}}\right.$$

$$\left.+\frac{(c-z)W_1}{U}\right)du$$

Die Formel, welche Herr Röthig in Berlin für das Potential der Walze angibt (J. v. Crelle, Bd. 61, S. 182), hat folgende Gestalt:

$$P=\frac{b}{2}\cdot\int_0^{2\pi}\cos\varphi.X(b\sin\varphi-y,\ a\cos\varphi-x,\ c+z).d\varphi$$

$$+\frac{b}{2}\cdot\int_0^{2\pi}\cos\varphi.X(b\sin\varphi-y,\ a\cos\varphi-x,\ c-z).d\varphi$$

a und b sind die Halbaxen der Randellipse, c ist die Höhe der Walze und der Function X wird durch die Formel

$$X(\alpha,\beta,\gamma)=\beta\log\frac{\varrho+\gamma}{\varrho-\gamma}+\gamma\log\frac{\varrho+\beta}{\varrho-\beta}-2\alpha\operatorname{arc\,tg}\frac{\beta\gamma}{\alpha\varrho}$$

wo $\varrho^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$, definirt.

Herr Hattendorff äussert sich in seinem neu erschienenen Werke über „Schwere, Electricität und Magnetismus" folgendermassen: „Die Untersuchung (des Potentials der ellipt. Walze) lässt sich auf eine einfachere zurückführen. Man betrachte einen Cylinder, der mit dem gegebenen die krumme Oberfläche gemein hat, aber keine Endflächen besitzt, also von $x=-\infty$ bis $x=+\infty$ sich erstreckt. In seinem Innern sei die Dichtigkeit $=-\frac{1}{2}\varrho$ von $x=-\infty$ bis $x=0$ und $=+\frac{1}{2}\varrho$ von $x=0$ bis $x=+\infty$. Auch hier soll die im Punkte (x, y, z) concentrirte pos. Masseneinheit angezogen werden von einer pos. Masse, dagegen abgestossen werden von einer neg. Masse. Man denke sich, die Potentialfunction dieser Masse sei bekannt, nämlich $F(x, y, z)$. Dann ist, wie man leicht sieht, $F(x-a, y, z)$ die Potentfalfunction, die von demselben Cylinder herrührt, wenn die Dichtigkeit $=-\frac{1}{2}\varrho$ ist von $x=-\infty$ bis $x=+a$, und $=+\frac{1}{2}\varrho$ von $x=+a$ bis $x=+\infty$. Durch Superposition erhält man

$$F(x, y, z)-F(x-a, y, z)$$

als Potentialfunction für den Fall, dass im Innern des Cylinders

die Dichtigkeit $= 0$ ist von $x = -\infty$ bis $x = 0$ und von $x = a$ bis $x = +\infty$, dagegen ϱ von $x = 0$ bis $x = a$. Dieser Fall ist der unserer Aufgabe." Ferner Seite 104: „Die Potentialfunction $F(x, y, z)$ kann man durch ein einfaches Integral nicht ausdrücken, wol aber jede der Kraft-Componenten X, Y, Z." Der Sinn dieser Behauptung kann nicht der sein, dass man die Function nicht durch einen einzigen Term, der ein einfaches Integral ist, sondern nur durch mehrere solche Terme darstellen könne; vielmehr muss die Behauptung bedeuten, dass man zur Darstellung der Function ein mehrfaches Integral bedürfe. Dann aber ist die Behauptung leicht zu widerlegen.

Ich will Herrn Hattendorffs X, Y, Z der Reihe nach mit (III), (I), (II) bezeichnen und seine y, z, x, β^2, γ^2, a, s', t, σ', σ, ϱ der Reihe nach mit x, y, z, A, B, c, u, P, s, t, 1 ersetzen. Sein σ' kommt mit unserem s nur so lange überein, als s pos. ist. Wenn s neg. ist, so ist sein $\sigma' = 0$. Sein $\sqrt{(t - x^2)}$ ist unser $W\sqrt{u}$ und statt seines $\dfrac{1}{\sqrt{\left(1+\frac{s}{\beta^2}\right)\left(1+\frac{s}{\gamma^2}\right)}}$ haben wir $\dfrac{\sqrt{AB}}{\sqrt{(A+u)(B+u)}}$

$$= \frac{\sqrt{AB}\sqrt{u}}{U}$$

$$(III) = X = \frac{\partial \overline{F}(x, y, z)}{\partial z} = 2\sqrt{AB}\int_{t_0}^{\infty} \frac{\overline{W}}{U}\, du = \frac{\partial F(z)}{\partial z}$$

$$(I) = Y = \frac{\partial \overline{F}(x, y, z)}{\partial x} = -\frac{2\sqrt{AB}}{A-B}\, xz \int_t^{\infty} \frac{\sqrt{B+u}}{\sqrt{A+u}}, \frac{P'}{P}, \frac{du}{W\sqrt{u}}$$

$$+ \frac{2\pi\sqrt{AB}}{A-B} \cdot \frac{x\sqrt{B+s}}{\sqrt{A+s}}$$

$$= \frac{\partial F(z)}{\partial x} + \frac{2\pi\sqrt{AB}\,x}{A-B} \cdot \frac{\sqrt{B+s}}{\sqrt{A+s}}$$

$$= \frac{\partial F(z)}{\partial x} - \pi\sqrt{AB}\,\frac{\partial L(s)}{\partial x}$$

$$(II) = Z = \frac{\partial \overline{F}(x, y, z)}{\partial y} = \frac{2\sqrt{AB}}{A-B} \cdot yz \int_t^{\infty} \frac{\sqrt{A+u}}{\sqrt{B+u}}, \frac{P'}{P} \cdot \frac{du}{W\sqrt{u}}$$

$$- \frac{2\pi\sqrt{AB}\,y}{A-B} \cdot \frac{\sqrt{A+s}}{\sqrt{B+s}}$$

$$= \frac{\partial F(z)}{\partial y} - \frac{2\pi\sqrt{AB}\,y}{A-B}\,\frac{\sqrt{A+s}}{\sqrt{B+s}}$$

$$= \frac{\partial F(z)}{\partial y} - \pi\sqrt{AB}\,\frac{\partial L(s)}{\partial y}$$

somit

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,\partial z = \frac{\partial \overline{F}(x,y,z)}{\partial z}\,dz + \frac{\partial \overline{F}(x,y,z)}{\partial y}\,dy + \frac{\partial \overline{F}(x,y,z)}{\partial x}\,dx$$

$$= \frac{\partial F(z)}{\partial z}\,dz + \frac{\partial F(z)}{\partial y}\,dy + \frac{\partial F(z)}{\partial x}\,dx$$

$$- \pi\sqrt{AB}\left(\frac{\partial L(s)}{\partial y} + \frac{\partial L(s)}{\partial x}\right)$$

Diese Formeln gelten zunächst nur, wenn z und s pos. sind. Wenn aber z pos. und s neg. ist, so sind die Zusätze bei (I), (II) resp. $\frac{2\pi Bx}{A-B}$, $-\frac{2\pi Ay}{A-B}$. Demnach ist die Hattendorff'sche Potentialfunction im ersten Falle

$$\overline{F}(x,y,z) = F(z) - \pi\sqrt{AB}\,L(s)$$

und im zweiten Falle

$$\overline{F}(x,y,z) = F(z) - \pi\sqrt{AB}\,L(0)$$

Hieraus folgt

$$\square\,\overline{F}(x,y,z) = \square\,F(z) - \pi\sqrt{AB}\,\square\,L(s)$$
$$= 0 \quad \text{und}$$
$$\square\,\overline{F}(x,y,z) = \square\,F(z) - \pi\sqrt{AB}\,\square\,L(0)$$
$$= -2\pi$$

was der Dichtigkeit $\frac{1}{2}$ entspricht.

Ist aber z neg. und s pos., so erhält man

$$\overline{F}(x,y,z) = \pi\sqrt{AB}\,L(s) - F(-z)$$

und begibt sich schliesslich der Bezugspunkt in das Gebiet des Raumes, wo auch s neg. ist, so folgt

$$\overline{F}(x,y,z) = \pi\sqrt{AB}\,L(0) - F(-z)$$

also auch

$$\square\,\overline{F}(x,y,z) = \pi\sqrt{AB}\,\square\,L(s) - \square\,F(-z)$$
$$= 0 \quad \text{und}$$
$$\square\,\overline{F}(x,y,z) = \pi\sqrt{AB}\,\square\,L(0) - \square\,F(-z)$$
$$= 2\pi$$

was der Dichtigkeit $-\frac{1}{2}$ entspricht.

b) Ueber die Darstellung des Potentials der ellipt. Walze durch elliptische Integrale.

Schon Herr Röthig bemerkt (Crelle, Bd. 61, S. 185), dass sich das Potential der Walze nicht lauter durch ellipt Integrale erster, zweiter und dritter Art darstellen lasse, dass vielmehr neben denselben noch Integrale auftreten, die den Grad der elliptischen übersteigen. Auch dieses zeigen unsere Formeln.

$$\frac{P'}{P} = \frac{1}{u} + \frac{1}{u-s} + \frac{1}{u-s''} - \frac{1}{A+u} - \frac{1}{B+u}$$

$$\frac{P'}{PW\sqrt{u}} = \left(\frac{1}{u} + \frac{1}{u-s} + \frac{1}{u-s''} - \frac{1}{A+u} - \frac{1}{B+u}\right) \times \frac{\sqrt{(A+u)(B+u)}}{\sqrt{(u-t)(u-t')(u-t'')}}$$

also

$$\frac{L(u).P'}{PW\sqrt{u}} = \log\left(\sqrt{A+u} + \sqrt{B+u}\right) \cdot \frac{P'}{P} \cdot \frac{\sqrt{(A+u)(B+u)}}{R} - \frac{x^2}{A-B} \cdot \frac{P'}{P} \cdot \frac{B+u}{R} + \frac{y^2}{A-B} \cdot \frac{P'}{P} \cdot \frac{A+u}{R}$$

folglich

$$F(z) = \sqrt{AB}\, z \int_{t_0}^{\infty} \left[\log\left(\sqrt{A+u} + \sqrt{B+u}\right) \cdot \frac{P'\sqrt{(A+u)(B+u)}}{P} - \frac{x^2(B+u)}{A-B} \cdot \frac{P'}{P} + \frac{y^2(A+u)}{A-B} \cdot \frac{P'}{P} + \left(1 - \Sigma \frac{x^2}{A+u}\right)\right] \cdot \frac{du}{R}$$

Sondert man in diesem Ausdrucke den log. Teil ab, so lässt sich jeder Term des Restes in elliptische Integrale verwandeln, und das Integral

$$\int_t^{\infty} \frac{a+u}{b+u} \cdot \frac{du}{R} = \int_t^{\infty} \frac{du}{R} + (a-b) \int_t^{\infty} \frac{1}{b+u} \cdot \frac{du}{R}$$

bildelt die allgemeine Formel der zu verwandelnden Integrale. Diese Verwandlung hier auszuführen, hat wenig Interesse, weil die auftretenden Formeln doch eine sehr compl. Gestalt haben werden. Es wird genügen, gezeigt zu haben, dass in der Function $F(z)$, also auch im Potential der Walze, neben ellipt. Integralen auch noch Integrale höherer Art auftreten, und dass sich ferner die zu verwandelnden ellipt. Integrale auf Formen zurück führen lassen, die bei der Betrachtung des Potentials des Ringes und der Scheibe schon verwandelt worden sind. *)

*) Arch. d. Math. u. Ph. 2. Reihe, T. III. u. IV.

c) Die Kraftcomponenten der elliptischen Walze.

α) Der Bezugspunkt liege oberhalb der obern Grundfläche.

Wir hatten

$$V = F(z) - F(z-c)$$

also

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial F(z)}{\partial x} - \frac{\partial F(z-c)}{\partial x}$$

oder

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{2\sqrt{AB}}{A-B}\, x \left[\int_{t_1}^{\infty} \frac{\sqrt{B+u}}{\sqrt{A+u}} \cdot \frac{(z-c).P'}{W_1 P}\, du - \int_{t_0}^{\infty} \frac{\sqrt{B+u}}{\sqrt{A+u}} \cdot \frac{zP'}{P\,W_0}\, du\right]$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{2\sqrt{AB}}{A-B}\, y \left[\int_{t_0}^{\infty} \frac{\sqrt{A+u}}{\sqrt{B+u}} \cdot \frac{zP'}{P\,W_0}\, du - \int_{t_1}^{\infty} \frac{\sqrt{A+u}}{\sqrt{B+u}} \cdot \frac{(z-c).P'}{PW_1}\, du\right]$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = 2\sqrt{AB} \cdot \left[\int_{t_0}^{\infty} \frac{W_0}{U}\, du - \int_{t_1}^{\infty} \frac{W_1}{U}\, du\right]$$

Begibt sich nun der Bezugspunkt in das Gebiet des Unendlichen, wo t und s sehr gross sind ($z-c$ kann endlich od. sehr gross sein), so erhält man aus den Formeln auf Seite 273

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\pi\sqrt{AB}\, x}{x^2+y^2} \cdot \left(\frac{z-c}{r'} - \frac{z}{r}\right)$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\pi\sqrt{AB}}{x^2+y^2}\, y \cdot \left(\frac{z-c}{r'} - \frac{z}{r}\right)$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = -\pi\sqrt{AB} \cdot \left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{r}\right)$$

Ist nun z sehr gross, so kann man $-c$ als Differential von z ansehen; folglich ist

$$\frac{z-c}{r'} - \frac{z}{r} = -c\,\frac{\partial\left(\frac{z}{r}\right)}{\partial z} = -c \cdot \frac{r^2-z^2}{r^3} = -c \cdot \frac{x^2+y^2}{r^3}$$

$$\frac{1}{r'} - \frac{1}{r} = -c \cdot \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} = -c \cdot \frac{z}{r^3}$$

also

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{\pi\sqrt{AB}\,cx}{r^3} = -\frac{\pi\sqrt{AB}\,c}{r^2}\cdot\cos(rx)$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{\pi\sqrt{AB}\,cy}{r^3} = -\frac{\pi\sqrt{AB}\,c}{r^2}\cdot\cos(ry)$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{\pi\sqrt{AB}\,cz}{r^3} = -\frac{\pi\sqrt{AB}\,c}{r^2}\cdot\cos(rz)$$

Ist hingegen $z = c$, also auch z endlich, so ist

$$\left(\frac{z-c}{r'}-\frac{z}{r}\right) = ((z-c)(x^2+y^2+z^2-2cz+c^2)^{-\frac{1}{2}} - z(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}})$$

$$= -\frac{z}{r}\left(\left(1-\frac{c}{z}\right)\left(1+\frac{c^2-2cz}{r^2}\right)^{-\frac{1}{2}}-1\right)$$

$$= \frac{z}{r}\left(\left(1-\frac{c}{z}\right)\left(1+\frac{cz}{r^2}\right)-1\right) = \frac{z}{r}\left(-\frac{c}{z}+\frac{cz}{r^2}\right)$$

$$= \frac{c}{r^3}(c^2-r^2) = -\frac{c}{r^3}(x^2+y^2)$$

$$\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r'}\right) = \left(\frac{1}{r}-(x^2+y^2+z^2-2cz+c^2)^{-\frac{1}{2}}\right) = \left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r}\left(1+\frac{cz}{r^2}\right)\right)$$

$$= -\frac{cz}{r^3}$$

Man erhält also wieder

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{\pi\sqrt{AB}\,c}{r^2}\cdot\cos(rx),\quad \frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{\pi\sqrt{AB}\,c}{r^2}\cdot\cos(ry)$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{\pi\sqrt{AB}\,c}{r^2}\cdot\cos(rz)$$

Liegt der Bezugspunkt in dem Gebiete des Unendlichen, wo nur t sehr gross ist, s also endlich bleibt, so erhält man nach den Formeln auf Seite 274

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{\pi\sqrt{AB}\,x}{2}\left(\frac{1}{(s-c)^2}-\frac{1}{s^2}\right)$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{\pi\sqrt{AB}\,y}{2}\left(\frac{1}{(s-c)^2}-\frac{1}{s^2}\right)$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = \pi\sqrt{AB}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r'}\right)$$

Weil nun z sehr gross ist, so kann man c als Differential von z betrachten. Es ist also

$$z = r, \quad \frac{1}{(z-c)^2} - \frac{1}{z^2} = -c\frac{\partial\left(\frac{1}{z^2}\right)}{\partial z} = \frac{2c}{z^3}$$

folglich

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{\pi\sqrt{AB}\,cx}{r^3} = -\frac{\pi\sqrt{AB}}{r^2}\cdot\cos(rx)$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{\pi\sqrt{AB}\,cy}{r^3} = -\frac{\pi\sqrt{AB}}{r^2}\cdot\cos(ry)$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{\pi\sqrt{AB}\,cz}{r^3} = -\frac{\pi\sqrt{AB}}{r^2}\cdot\cos(rz)$$

b) Der Bezugspunkt liege auf der obern Grundfläche ausserhalb der Randellipse.

$$V = F(c) - \pi\sqrt{AB}\,L(s)$$

also

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{2\pi x\sqrt{AB}}{A-B}\cdot\frac{\sqrt{B+s}}{\sqrt{A+s}} - \frac{2\sqrt{AB}}{A-B}xc\int_{t_0}^{\infty}\frac{\sqrt{B+u}}{\sqrt{A+u}}\cdot\frac{P'}{PW_0\sqrt{u}}\,du$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{2\pi y\sqrt{AB}}{A-B}\cdot\frac{\sqrt{A+s}}{\sqrt{B+s}} + \frac{2\sqrt{AB}}{A-B}yc\int_{t_0}^{\infty}\frac{\sqrt{A+u}}{\sqrt{B+u}}\cdot\frac{P'}{PW_0\sqrt{u}}\,du$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = 2\sqrt{AB}\cdot\left[\int_{t_0}^{\infty}\frac{W_0}{U}\,du - \int_{t_1}^{\infty}\frac{W_1}{U}\,du\right]$$

Rückt der Bezugspunkt auf der Ebene in's Unendliche, so erhält man annähernd

$$\frac{2\pi x\sqrt{AB}}{A-B}\,\frac{\sqrt{B+s}}{\sqrt{A+s}} = \frac{2\pi x\sqrt{AB}}{A-B}\cdot\left(1-\frac{A-B}{2s}+\ldots\right)$$

$$= \frac{2\pi x\sqrt{AB}}{A-B}\left(1-\frac{A-B}{2(x^2+y^2)}\right)$$

und

$$-\frac{2\sqrt{AB}}{A-B}\int_{t_0}^{\infty} xc\,\frac{\sqrt{B+u}}{\sqrt{A+u}}\cdot\frac{P'}{PW_0\sqrt{u}}du$$

$$=-\frac{\pi\sqrt{AB}\,x}{A-B}\left(2-\frac{A-B}{x^2+y^2}+\frac{(A-B)}{(x^2+y^2)}\right.$$

also

$$\frac{\partial V}{\partial x}=-\frac{\pi\sqrt{AB}\,cx}{(x^2+y^2)r}=-\frac{\pi c\sqrt{AB}}{r^2}\cdot\cos(rx)$$

$$\frac{\partial V}{\partial y}=-\frac{\pi\sqrt{AB}\,cy}{(x^2+y^2)r}=-\frac{\pi c\sqrt{AB}}{r^2}\cdot\cos(ry)$$

$$\frac{\partial V}{\partial z}=-\frac{\pi\sqrt{AB}\,c^2}{r^3}=-\frac{\pi c\sqrt{AB}}{r^2}\cdot\cos(rz)$$

c) Der Bezugspunkt liege in unmittelbarer Nähe der obern Randellipse oberhalb der obern Grundfläche.

$$\frac{\partial V}{\partial x}=-\frac{2\pi B\sqrt{A(A+\sigma)}}{(A-B)^{\frac{3}{2}}}+2\cos\eta\left[r_1\sin\theta\left(A_1+1-2a\frac{\sqrt{-\sigma}}{\sqrt{A+\sigma}}\right)\right.$$

$$\left.+r_1\cos\theta\left(\frac{\pi A}{A-B}-\theta\right)\right]-\frac{2\sqrt{AB}}{A-B}\int_{t_0}^{\infty} xz\,\frac{\sqrt{B+u}}{\sqrt{A+u}}\cdot\frac{P'}{PW_0\sqrt{u}}du$$

$$\frac{\partial V}{\partial y}=-\frac{2\pi A\sqrt{B(-B-\sigma)}}{(A-B)^{\frac{3}{2}}}+2\sin\eta\left[r_1\sin\theta\left(A_1+1-2b\frac{\sqrt{-\sigma}}{\sqrt{-B-\sigma}}\right)\right.du$$

$$\left.-r_1\cos\theta\left(\frac{\pi B}{A-B}+\theta\right)\right]+\frac{2\sqrt{AB}}{\sqrt{A-B}}\int_{t_0}^{\infty} yz\,\frac{\sqrt{A+u}}{\sqrt{B+u}}\cdot\frac{P'}{PW_0\sqrt{u}}du$$

$$\frac{\partial V}{\partial z}=-\frac{4\sqrt{AB}}{A-B}(a\sqrt{A+\sigma}+b\sqrt{B+\sigma})$$

$$-2r_1\cos\theta\left(-A_1-1+2\frac{aB\sqrt{A+\sigma}+bA\sqrt{-B-\sigma}}{(A-B)\cdot\sqrt{-\sigma}}\right)$$

$$+2r_1\sin\theta_1\theta+2\sqrt{AB}\int_{t_0}^{\infty}\frac{W_0}{U}du$$

b) Der Bezugspunkt liege auf der obern Randellipse.

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{2\pi B\sqrt{A(A+\sigma)}}{(A-B)^{\frac{3}{2}}} - \frac{2\sqrt{AB}}{A-B}\int_{t_0}^{\infty} xc\,\frac{\sqrt{B+u}}{\sqrt{A+u}}\cdot\frac{P'}{PW_0\sqrt{u}}\,du$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{2\pi A\sqrt{B(-B-\sigma)}}{(A-B)^{\frac{3}{2}}} + \frac{2\sqrt{AB}}{A-B}\int_{t_1}^{\infty} yc\,\frac{\sqrt{A+u}}{\sqrt{B+u}}\cdot\frac{P'}{PW_0\sqrt{u}}\,du$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{4\sqrt{AB}}{A-B}(a\sqrt{A+\sigma}+b\sqrt{B+\sigma}) + 2\sqrt{AB}\int_{t_0}^{\infty}\frac{W_0}{U}\,du$$

c) Der Bezugspunkt liege auf der obern Grundfläche innerhalb der Randellipse.

$$V = F(c) - \pi\sqrt{AB}\,L(s)$$

also

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{2\pi xB}{A-B} - \frac{2\sqrt{AB}}{A-B}\cdot\int_{t_1}^{\infty} xc\,\frac{\sqrt{B+u}}{\sqrt{A+u}}\cdot\frac{P'}{PW_0\sqrt{u}}\,du$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{2\pi yA}{A-B} + \frac{2\sqrt{AB}}{A-B}\cdot\int_{t_0}^{\infty} yc\,\frac{\sqrt{A+u}}{\sqrt{B+u}}\cdot\frac{P'}{PW_0\sqrt{u}}\,du$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = 2\sqrt{AB}\int_{t_0}^{\infty}\frac{W_0}{U}\,du - 2\sqrt{AB}\int_{0}^{\infty}\frac{W_1}{U}\,du$$

f) Der Bezugspunkt liege ausserhalb der Walze auf einer zwischen den beiden Grundflächen hindurch gehenden und mit denselben ∥ Ebene.

Es ist

$$V = F(z) + F(c-z) - 2\pi\sqrt{AB}\,L(s)$$

also

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{4\pi x\sqrt{AB}}{A-B}\cdot\frac{\sqrt{B+s}}{\sqrt{A+s}} - \frac{2\sqrt{AB}}{A-B}\cdot\int_{t_2}^{\infty} xc\,\frac{\sqrt{B+u}}{\sqrt{A+u}}\cdot\frac{P'}{PW_0\sqrt{u}}\,du$$

$$-\frac{2\sqrt{AB}}{A-B}\cdot\int_{t_1}^{\infty}(x_1(c-z)\cdot\frac{\sqrt{B+u}}{\sqrt{A+u}},\frac{P'}{PW_1\sqrt{u}}\,du$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{4\pi y\sqrt{AB}}{A-B}\cdot\frac{\sqrt{A+s}}{\sqrt{B+s}} + \frac{2\sqrt{AB}}{A-B}\cdot\int_{t_0}^{\infty} yz\,\frac{\sqrt{A+u}}{\sqrt{B+u}}\cdot\frac{P'}{PW_0\sqrt{u}}\,du$$

$$+\frac{2\sqrt{AB}}{A-B}\cdot\int_{t_1}^{\infty} y(c-z)\cdot\frac{\sqrt{A+u}}{\sqrt{B+u}}\cdot\frac{P'}{PW_1\sqrt{u}}\,du$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = 2\sqrt{AB}\int_{t_0}^{\infty}\frac{W_0}{U}\,du - 2\sqrt{AB}\int_{t_1}^{\infty}\frac{W_1}{U}\,du$$

Lässt man auch hier den Bezugspunkt in's Unendliche rücken, so erhält man

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{4\pi x\sqrt{AB}}{A-B}\left(1-\frac{A-B}{2s}+\cdots\right)$$

$$-\frac{\pi\sqrt{AB}\,x}{A-B}\left(2-\frac{A-B}{x^2+y^2}+\frac{(A-B)\cdot z}{r\cdot(x^2+y^2)}+\cdots\right)$$

$$-\frac{\pi\sqrt{AB}\,x}{A-B}\left(2-\frac{A-B}{x^2+y^2}+\frac{(A-B)(c-z)}{r\cdot(x^2+y^2)}+\cdots\right)$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{\pi\sqrt{AB}\,x}{x^2+y^2}\cdot\left(\frac{z}{r}+\frac{c-z}{r_1}\right) = -\frac{\pi c\sqrt{AB}}{r^2}\cdot\cos(rx)$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = +\frac{\pi\sqrt{AB}\,y}{x^2+y^2}\cdot\left(\frac{z}{r}+\frac{c-z}{r_1}\right) = -\frac{\pi c\sqrt{AB}}{r^2}\cdot\cos(ry)$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = \pi\sqrt{AB}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_1}\right) = -\frac{\pi c\sqrt{AB}}{r^2}\cdot\cos(rz)$$

g) Der Bezugspunkt liege innerhalb der Walze auf einer zwischen den beiden Grundflächen hindurch gehenden und mit denselben ‖ Ebene.

Weil

$$V_1 = F(z)+F(c-z)-2\pi\sqrt{AB}\,L(0)$$

so folgt

$$\frac{\partial V_1}{\partial x} = \frac{4\pi xB}{A-B} - \frac{2\sqrt{AB}}{A-B}\int_{t_0}^{\infty} xz\,\frac{\sqrt{B+u}}{\sqrt{A+u}}\cdot\frac{P'}{PW_0\sqrt{u}}\,du$$

$$-\frac{2\sqrt{AB}}{A-B}\int_{t_1}^{\infty} x\cdot(c-z)\,\frac{\sqrt{B+u}}{\sqrt{A+u}}\cdot\frac{P'}{PW_1\sqrt{u}}\,du$$

$$\frac{\partial V_1}{\partial y} = -\frac{4\pi yA}{A-B} + \frac{2\sqrt{AB}}{A-B}\int_{t_0}^{\infty} yz\,\frac{\sqrt{A+u}}{\sqrt{B+u}}\cdot\frac{P'}{PW_0\sqrt{u}}\,du$$

$$+\frac{2\sqrt{AB}}{A-B}\int_{t_1}^{\infty} y\,.\,(c-z)\,\frac{\sqrt{A+u}}{\sqrt{B+u}}\cdot\frac{P'}{PW_1\sqrt{u}}\,du$$

$$\frac{\partial V_1}{\partial z} = 2\sqrt{AB}\int_{t_0}^{\infty}\frac{W_0}{U}\,du - 2\sqrt{AB}\int_{t_1}^{\infty}\frac{W_1}{U}\,du$$

b) Der Bezugspunkt liege auf der untern Grundfläche ausserhalb der Randellipse.

Aus der Formel

$$V = F(c) - \pi\sqrt{AB}\,L(s)$$

folgt

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{2\pi x\sqrt{AB}}{A-B}\cdot\frac{\sqrt{B+s}}{\sqrt{A+s}} - \frac{2\sqrt{AB}}{A-B}\int_{t_1}^{\infty} xc\,\frac{\sqrt{B+u}}{\sqrt{A+u}}\cdot\frac{P'}{PW_1\sqrt{u}}\,du$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{2\pi y\sqrt{AB}}{A-B}\cdot\frac{\sqrt{A+s}}{\sqrt{B+s}} + \frac{2\sqrt{AB}}{A-B}\int_{t_1}^{\infty} yc\,\frac{\sqrt{A+u}}{\sqrt{B+u}}\cdot\frac{P'}{PW_1\sqrt{u}}\,du$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = 2\sqrt{AB}\int_{t_0}^{\infty}\frac{W_0}{U}\,du - 2\sqrt{AB}\int_{t_1}^{\infty}\frac{W_1}{U}\,du$$

Rückt der Bezugspunkt auf der Ebene in's Unendliche, so erhält man wie früher

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{\pi c\sqrt{AB}}{r^2}\cos(rx)$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{\pi c\sqrt{AB}}{r^2}\cos(ry)$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{\pi c\sqrt{AB}}{r^2}\cos(rz)$$

i) Der Bezugspunkt liege ausserhalb der Walze zwischen d
beiden Grundflächen und in unmittelbarer Nähe der unte
Randellipse.

Nach f) haben wir noch den Ausdruck $\frac{4\pi x\sqrt{AB}}{A-B}\cdot\frac{\sqrt{B+s}}{\sqrt{A+s}}$ fü
kleines s zu entwickeln.

$$(B+s)^{\frac{1}{2}}\cdot(A+s)^{-\frac{1}{2}}=\frac{B^{\frac{1}{2}}}{A^{\frac{1}{2}}}\left(1+\frac{s}{2B}+\ldots\right)\left(1-\frac{s}{2A}+\ldots\right)$$

$$=\frac{\sqrt{B}}{\sqrt{A}}\cdot\left(1+s\frac{(A-B)}{2AB}\right)$$

nach Seite 258 ist aber

$$s=2pr\cos\theta=\frac{2\sqrt{AB}}{\sqrt{-\sigma}}\cdot r\cos\theta$$

somit

$$\frac{\sqrt{B+s}}{\sqrt{A+s}}=\frac{\sqrt{B}}{\sqrt{A}}\cdot\left(1+\frac{A-B}{\sqrt{-\sigma AB}}\cdot r\cos\theta\right)$$

also

$$\frac{4\pi x\sqrt{AB}}{A-B}\cdot\frac{\sqrt{B+s}}{\sqrt{A+s}}=\frac{4\pi xB}{A-B}\cdot\left(1+\frac{A-B}{\sqrt{\sigma-AB}}\cdot r\cos\theta\right)$$

Nun ist

$$x=x_0+r\cos\eta\cos\theta$$

(nach der auf Seite 255 angegebenen Erklärung). Ferner

$$\cos\eta=\frac{\sqrt{B(A+\sigma)}}{\sqrt{-\sigma(A-B)}}=\frac{\sqrt{B}}{\sqrt{-\sigma A}}x_0$$

also

$$x=x_0\left(1+\frac{\sqrt{B}}{\sqrt{-\sigma A}}\cdot r\cos\theta\right)$$

somit

$$\frac{4\pi x\sqrt{AB}}{A-B}\cdot\frac{\sqrt{B+s}}{\sqrt{A+s}}=\frac{4\pi x_0B}{A-B}\left(1+\frac{A}{\sqrt{-\sigma AB}}r\cos\theta\right)$$

$$=\frac{4\pi B\sqrt{A(A+\sigma)}}{(A-B)^{\frac{3}{2}}}\left(1+\frac{A}{\sqrt{-\sigma AB}}r\cos\theta\right)$$

Man erhält demnach

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{2\pi B\sqrt{A(A+\sigma)}}{(A-B)^{\frac{3}{2}}} + \frac{4\pi A\sqrt{B(A+\sigma)}}{(A-B)^{\frac{3}{2}}\sqrt{-\sigma}} \cdot r\cos\theta$$

$$-2\cos\eta\left[r\sin\theta\left(A+1-\frac{2a\sqrt{-\sigma}}{\sqrt{(A+\sigma)}}\right)+r\cos\theta\left(\frac{A\pi}{A-B}-\theta\right)\right]$$

$$-\frac{2\sqrt{AB}}{A-B}\int_{t_1}^{\infty} x(c_i-z)\,\frac{\sqrt{B+u}}{\sqrt{A+u}}\cdot\frac{P'}{PW_1\sqrt{u}}\,du$$

Ebenso ist

$$\frac{\sqrt{A+s}}{\sqrt{B+s}} = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}\left(1-\frac{A-B}{\sqrt{-\sigma AB}}\cdot r\cos\theta\right)$$

also

$$\frac{4\pi y\sqrt{AB}}{A-B}\cdot\frac{\sqrt{A+s}}{\sqrt{B+s}} = \frac{4\pi yA}{A-B}\left(1-\frac{A-B}{\sqrt{-\sigma AB}}\cdot r\cos\theta\right)$$

und weil

$$y = y_0 + r\sin\eta\cos\theta,$$

$$\sin\eta = \frac{\sqrt{A(-B-\sigma)}}{\sqrt{-\sigma(A-B)}}, \qquad y_0 = \frac{\sqrt{B(-B-\sigma)}}{\sqrt{A-B}}$$

also

$$\sin\eta = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{-\sigma B}}\cdot y_0$$

$$y = y_0\left(1-\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{-\sigma B}}\,r\cos\theta\right) = \frac{\sqrt{B(-B-\sigma)}}{\sqrt{(A-B)}}\left(1+\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{-\sigma B}}\cdot r\cos\theta\right)$$

so ist auch

$$\frac{4\pi y\sqrt{\sqrt{AB}}}{A-B}\cdot\frac{\sqrt{A+s}}{\sqrt{B+s}} = \frac{4\pi A\sqrt{B(-B-\sigma)}}{(A-B)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\times\left(1+\left(\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{-\sigma B}}-\frac{A-B}{\sqrt{-\sigma AB}}\right)r\cos\theta\right)$$

$$= \frac{4\pi A\sqrt{B(-B-\sigma)}}{(A-B)^{\frac{3}{2}}} + \frac{4\pi B\sqrt{A(-B-\sigma)}}{(A-B)^{\frac{3}{2}}\sqrt{-\sigma}}\cdot r\cos\theta$$

Es ist demnach

$$\frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{2\pi A\sqrt{B(-B-\sigma)}}{(A-B)^{\frac{3}{2}}} - \frac{4\pi B\sqrt{A(-B-\sigma)}}{(A-B)^{\frac{3}{2}}\sqrt{-\sigma}} \cdot r\cos\theta$$

$$-2\sin\eta\left[r\cos\theta\left(A+1-\frac{2b\sqrt{-\sigma}}{\sqrt{-B-\sigma}}\right) - r\cos\theta\left(\frac{\pi B}{A-B}+\right.\right.$$

$$+\frac{2\sqrt{AB}}{A-B}\int_{t_1}^{\infty} y\,.\,(c-z)\frac{\sqrt{A+u}}{\sqrt{B+u}}\cdot\frac{P'}{PW_1\sqrt{u}}\,du$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{2\sqrt{AB}}{A-B}\left(a\sqrt{(A+\sigma)}+b\sqrt{(-B-\sigma)}\right)$$

$$+2r\cos\theta\left(-A-1+2\,.\,\frac{aB\sqrt{A+\sigma}+bA\sqrt{-B-\sigma}}{(A-B)\sqrt{-\sigma}}\right)$$

$$-2r\sin\theta\,.\,\theta - 2\sqrt{AB}\int_{t_1}^{\infty}\frac{W_1}{U}\,du$$

f) Der Bezugspunkt liege innerhalb der Walze in unmittelbarer Nähe der untern Randellipse.

Weil hier

$$V_1 = F(z)+F(c-z)-2\pi\sqrt{AB}\,L(0)$$

so hat man noch $\frac{4\pi xB}{A-B}$ und $-\frac{4\pi xA}{A-B}$ für einen solchen Punkt berechnen.

$$\frac{4\pi Bx}{A-B} = \frac{4\pi B}{A-B}x_0\left(1+\frac{\sqrt{B}}{\sqrt{-\sigma A}}\cdot r\cos\theta\right)$$

$$= \frac{4\pi B\sqrt{A(A+\sigma)}}{(A-B)^{\frac{3}{2}}}\left(1+\frac{\sqrt{B}}{\sqrt{-\sigma A}}\cdot r\cos\theta\right)$$

$$= \frac{4\pi B\sqrt{A(A+\sigma)}}{(A-B)^{\frac{3}{2}}} + \frac{4\pi B\sqrt{B(A+\sigma)}}{(A-B)^{\frac{3}{2}}\sqrt{-\sigma}}\cdot\cos\theta$$

und

$$-\frac{4\pi yA}{A-B} = -\frac{4\pi A\sqrt{B(-B-\sigma)}}{(A-B)^{\frac{3}{2}}} - \frac{4\pi A\sqrt{A(-B-\sigma)}}{(A-B)^{\frac{3}{2}}\sqrt{-\sigma}}\cdot r\c$$

ergeben sich nun folgende Werte:

$$= \frac{2\pi B\sqrt{A(A+\sigma)}}{(A-B)^{\frac{3}{2}}} + \frac{4\pi B\sqrt{B(A+\sigma)}}{(A-B)^{\frac{3}{2}}\sqrt{-\sigma}} \cdot r\cos\theta$$

$$-2\sin\eta\left[r\sin\theta\left(A+1-\frac{2a\sqrt{-\sigma}}{\sqrt{A+\sigma}}\right)+r\cos\theta\,\frac{\pi A}{A-B}-\theta\right)\Big]$$

$$-\frac{2\sqrt{AB}}{A-B}\int_{t_1}^{\infty} x(c-z)\cdot\frac{\sqrt{B+u}}{\sqrt{A+u}}\cdot\frac{P'}{PW_1\sqrt{u}}\,du$$

$$= -\frac{2\pi A\sqrt{B(-B-\sigma)}}{(A-B)^{\frac{3}{2}}} - \frac{4\pi A\sqrt{A(-B-\sigma)}}{(A-B)^{\frac{3}{2}}\sqrt{-\sigma}} \cdot r\cos\theta$$

$$-2\sin\eta\left[r\sin\theta\left(A+1-\frac{2b\sqrt{-\sigma}}{\sqrt{-B-\sigma}}\right)-r\cos\theta\left(\frac{\pi B}{A-B}+\theta\right)\right]$$

$$+\frac{2\sqrt{AB}}{A-B}\int_{t_1}^{\infty} y(c-z)\cdot\frac{\sqrt{A+u}}{\sqrt{B+u}}\cdot\frac{P'}{PW_1\sqrt{u}}\,du$$

$$= \frac{4\sqrt{AB}}{A-B}\left(a\sqrt{A+\sigma}+b\sqrt{-B-\sigma}\right)$$

$$+2r\cos\theta\left(-A-1+2\cdot\frac{aB\sqrt{A+\sigma}+bA\sqrt{-B-\sigma}}{(A-B)\sqrt{-\sigma}}\right)$$

$$-2r\sin\theta\cdot\theta-2\sqrt{AB}\int_{t_1}^{\infty}\frac{W_1}{U}\,du$$

l) Der Bezugspunkt liege auf der untern Randellipse.

Aus den Formeln bei i) oder l) folgt

$$= \frac{2\pi B\sqrt{A(A+\sigma)}}{(A-B)^{\frac{3}{2}}} - \frac{2\sqrt{AB}}{A-B}\int_{t_1}^{\infty} x\cdot c\,\frac{\sqrt{B+u}}{\sqrt{A+u}}\cdot\frac{P'}{PW_1\sqrt{u}}\,du$$

$$= -\frac{2\pi A\sqrt{B(-B-\sigma)}}{(A-B)^{\frac{3}{2}}} + \frac{2\sqrt{AB}}{A-B}\int_{t_1}^{\infty} y\cdot c\,\frac{\sqrt{A+u}}{\sqrt{B+u}}\cdot\frac{P'}{PW_1\sqrt{u}}\,du$$

$$= \frac{4\sqrt{AB}}{A-B}\left(a\sqrt{A+\sigma}+b\sqrt{-B-\sigma}-2\sqrt{AB}\int_{t_1}^{\infty}\frac{W_1}{U}\,du\right.$$

Ich will hier noch zeigen, dass durch die Einführung der Function

$$M(u) = L(u) + \frac{x^2 - y^2}{A - B}$$

statt $L(u)$ die auftretenden Formeln eine solche Gestalt erhalten, dass der Uebergang zum Kreiscylinder unmittelbar, also ohne Grenzprocess vollzogen werden kann. Weil

$$L(u) = M(u) - \frac{x^2 - y^2}{A - B}$$

so ist

$$F(z) = \sqrt{AB}\int_t^\infty \left(\left(M(u) - \frac{x^2-y^2}{A-B}\right)\cdot\frac{zP'}{PW\sqrt{u}} + \frac{zW}{U}\right)du$$

$$= \sqrt{AB}\int_t^\infty \left(M(u)\cdot\frac{zP'}{PW\sqrt{u}} + \frac{zW}{U}\right)du$$

$$- \sqrt{AB}\,\frac{x^2-y^2}{A-B}\int_t^\infty \frac{zP'}{PW\sqrt{u}}\,du$$

Nun war

$$-\frac{2\partial\eta}{\partial u} = \frac{P'z}{PW\sqrt{u}}$$

also

$$\int_t^\infty \frac{zP'}{PW\sqrt{u}}\cdot du = -2\int_t^\infty \frac{\partial\eta}{\partial u}\,du = \Big[-2\pi\Big]_t^\infty = \pi$$

und somit

$$F(z) = \sqrt{AB}\int_t^\infty \left(M(u)\cdot\frac{zP'}{PW\sqrt{u}} + \frac{zW}{U}\right)du - \pi\sqrt{AB}\cdot\frac{x^2-y^2}{A-B}$$

also

$$\text{I}\quad V = F(z) - F(z-c) = \sqrt{AB}\int_{t_0}^\infty \left(M(u)\cdot\frac{zP'}{PW_0\sqrt{u}} + \frac{zW_0}{U}\right)du$$

$$- \sqrt{AB}\int_{t_1}^\infty \left(M(u)\cdot\frac{(z-c)P'}{PW_1\sqrt{u}} + \frac{(z-c)W_1}{U}\right)du$$

Weil nun

$$M(u) = \log\left(\sqrt{A+u} + \sqrt{B+u}\right) + \frac{x^2}{A-B}\left(1 - \frac{\sqrt{B+u}}{\sqrt{A+u}}\right)$$

$$+\frac{y^2}{A-B}\left(\frac{\sqrt{A+u}}{\sqrt{B+u}}-1\right)=\log\left(\sqrt{A+u}+\sqrt{B+u}\right)$$

$$+\frac{x^2}{A-B}\left(\frac{\sqrt{A+u}-\sqrt{B+u}}{\sqrt{A+u}}\right)+\frac{y^2}{A-B}\left(\frac{\sqrt{A+u}-\sqrt{B+u}}{\sqrt{B+u}}\right)$$

$$=\log\left(\sqrt{A+u}+\sqrt{B+u}\right)+\frac{1}{\sqrt{A+u}+\sqrt{B+u}}$$

$$\times\left(\frac{x^2}{\sqrt{A+u}}+\frac{y^2}{\sqrt{B+u}}\right)$$

so gestattet die Formel I unmittelbar den Uebergang zum Kreiscylinder. Ferner ist

$$\frac{\partial M(u)}{\partial x}=\frac{2x}{A-B}\cdot\left(1-\frac{\sqrt{B+u}}{\sqrt{A+B}}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{zP'}{PW\sqrt{u}}\right)=-2xz\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{(A+u)}\cdot\frac{\sqrt{u}}{PW}\right)$$

folglich

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(M(u)\frac{zP'}{PW\sqrt{u}}+\frac{zW}{U}\right)=\frac{2x}{A-B}\left(1-\frac{\sqrt{B+u}}{\sqrt{A+u}}\right)\cdot\frac{zP'}{PW\sqrt{u}}$$

$$-2xzM(u)\cdot\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{A+u}\cdot\frac{\sqrt{u}}{PW}\right)-\frac{xz}{A+u}\cdot\frac{1}{UW}$$

$$=\frac{2x}{A-B}\cdot\left(1-\frac{\sqrt{B+u}}{\sqrt{A+u}}\right)\cdot\frac{zP'}{PW\sqrt{u}}+2xz\cdot\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{M(u)}{(A+u)}\cdot\frac{\sqrt{u}}{PW}\right)$$

also

$$\frac{\partial F(z)}{\partial x}=\frac{\sqrt{AB}}{A-B}\int xz\left(1-\frac{\sqrt{B+u}}{\sqrt{A+u}}\right)\cdot\frac{P'du}{PW\sqrt{u}}-\frac{2\pi x\sqrt{AB}}{A-B}$$

(Weg eine rechtl. Schlinge aus dem Ostpunkte um t allein)

oder

$$\frac{\partial F(z)}{\partial x}=\frac{2\sqrt{AB}}{A-B}\int_t^\infty xz\left(1-\frac{\sqrt{B+u}}{\sqrt{A+u}}\right)\cdot\frac{P'}{PW\sqrt{u}}du-\frac{2\pi x\sqrt{AB}}{A-B}$$

somit

$$\frac{\partial V}{\partial x}=\frac{2\sqrt{AB}}{A-B}\int_{t_0}^\infty xz\left(1-\frac{\sqrt{B+u}}{\sqrt{A+u}}\right)\cdot\frac{P'}{PW_0\sqrt{u}}du$$

$$-\frac{2\sqrt{AB}}{A-B}\int_{t_1}^{\infty} x(z-c)\left(1-\frac{\sqrt{B+u}}{\sqrt{A+u}}\right)\cdot\frac{P'}{PW_1\sqrt{u}}\,du$$

$$=2\sqrt{AB}\int_{t_0}^{\infty}\frac{xz}{\sqrt{A+u}\,(\sqrt{A+u}+\sqrt{B+u})}\cdot\frac{P'}{PW_0\sqrt{u}}\,du$$

$$-2\sqrt{AB}\int_{t_1}^{\infty}\frac{x(z-c)}{\sqrt{A+u}\,(\sqrt{A+u}+\sqrt{B+u})}\cdot\frac{P'}{PW_1\sqrt{u}}\,du$$

Auch in dieser Formel kann man sogleich $A = B$ setzen, um entsprechenden Ausdruck für den Kreiscylinder zu erhalten.

Bern, den 22. Febr. 1884.

XV.

Ueber Cassinische Curven.

Von

Ulrich Bigler.

Ich betrachte zunächst die Abbildung der Function $F = t^2 - 1$. Das Bild der t Ebene ist eine zweiblättrige Ebene, die durch die beiden Verzweigungspunkte -1 und ∞ mit einander verbunden sind und sich längs der Uebergangslinie von -1 bis zum Westpunkte des Horizontes gegenseitig durchdringen. Isophasen nenne ich solche Curven auf der t Ebene, längs welchen die Function die gleiche Phase behält. Isotimen sollen solche Curven bezeichnen, längs welchen der absolute Wert der Function constant bleibt. Ich setze nun

$$re^{i\zeta} = t - 1, \qquad se^{i\eta} = t + 1$$

dann ist

$$F = rse^{i(\zeta+\eta)}, \qquad F' = rse^{-i(\zeta+\eta)}$$

Für eine Isotime muss nun $sr = \text{Const} = a$ sein. Bezeichnen nun x und y die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes der t Ebene, so ist

$$r^2 = (x-1)^2 + y^2, \qquad s^2 = (x+1)^2 + y^2$$

und man erhält für eine Isolime, die dem absoluten Werte a entspricht, die Gleichung

$$1) \qquad (x^2 + y^2 + 1)^2 - 4x^2 = r^2 s^2 = a^2$$

$a = 1$ gibt die Lemniskate mit den Polen 1 und -1; $a < 1$ gibt zwei getreunte Curven, die die Nullpunkte der Function umgeben und innerhalb der Lemniskatenschleifen liegen; $a > 1$ gibt eine geschlossene Curve, die die Lemniskate umgibt.

Setzt man $\zeta + \eta = \text{Const} = \alpha$, so erhält man auf dem t Felde die Isophasen. In diesem Falle ist

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{tg}\zeta + \operatorname{tg}\eta}{1 - \operatorname{tg}\zeta \operatorname{tg}\eta} = \frac{2xy}{x^2 - y^2 - 1}$$

somit die Gleichung einer Isophase

$$2) \qquad (x^2 - y^2)\sin\alpha - 2xy\cos\alpha = \sin\alpha$$

Durch die Substitution

$$x = \sin\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right)t - \sin\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}\right)u$$

$$y = \sin\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}\right)t + \sin\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right)u$$

verwandelt sich diese Gleichung in

$$3) \qquad t^2 - u^2 = \sin\alpha$$

Die Isophasen sind also gleichseitige Hyperbeln mit den Halbaxenquadraten $\sin\alpha$. Wird der Winkel, den die t Axe mit der x Axe bildet, mit θ bezeichnet und die Entfernung des Brennpunktes vom Ursprunge mit c, so hat man

$$\sin\theta = \sin\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}\right), \quad \cos\theta = \sin\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right), \quad c = \sqrt{2\sin\alpha}$$

somit die Coordinaten des Brennpunktes der gleichseitigen Hyperbel

$$t' = \sqrt{\sin\alpha}\left(\sin\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\alpha}{2}\right), \quad u' = \sqrt{\sin\alpha}\left(\sin\frac{\alpha}{2} - \cos\frac{\alpha}{2}\right)$$

Wird aus diesen beiden Gleichungen der Winkel α eliminirt, so erhält man für die Coordinaten der Brennpunkte die Gleichung:

$$4) \qquad (t'^2 + u'^2 + 1)^2 - 4u'^2 = 1$$

Aus dieser Formel erkennt man nun, dass die Brennpunkte auf der Isotime, die dem abs. Werte t entspricht, also auf der Lemniskate θ liegen. Aus Gleichung 2) erkennt man auch, dass sich alle Hyperbeln in den Punkten $+1$ und -1 schneiden. Wenn $F = N^2 = t^2 - 1$ gesetzt wird, wo N eine pos. sehr grosse Zahl bedeutet, so sei im Ostpunkte des ersten Blattes der F Ebene $t = N$ und im gleichen Punkte des zweiten Blattes $t = -N$. Das Innere der östl. Lemniskatenschleife bildet sich in das Innere des Einheitskreises des ersten Blattes ab, während sich das Innere der westl. Schleife in das Innere des Einheitskreises des zweiten Blattes abbildet. Ferner ist das Aeussere des Einheitskreises des ersten Blattes Bild desjenigen Teiles

der t Ebene, der östlich der lateralen Axe und ausserhalb der Lemniskatenschleife liegt. Ebenso ist das Aeussere des Einheitskreises des zweiten Blattes Bild des Aeussern der westl. Lemniskatenschleife, das westl. der lateralen Axe liegt. Die Realitätslinie des t Feldes vom Punkte 1 an bis zum Ostpunkte gibt als Bild den östl. Teil der Realitätslinie des ersten Blattes der F Ebene. Läuft ferner t von 1 bis null, dann auf der lateralen Axe bis zum Nordpunkte, so durchläuft die Function F von null an die westl. Hälfte der Realitätslinie des ersten Blattes. Bewegt sich ferner t vom Punkte -1 aus nach dem Westpunkte, so durchläuft F den östlichen Teil der Realitätslinie des zweiten Blattes, während der westl. Teil derselben Realitätslinie Bild der Realitätslinie des t Feldes von -1 bis null und der südl. Hälfte der lateralen Axe ist. Ferner bildet sich die Hyperbel $x^2-y^2=1$ auf der lateralen Axe der F Ebene ab und zwar der östl. Zweig im obern Blatte und der westl. Zweig im untern Blatte.

Im Folgenden sollen die Isotimen oder die Cassinischen Curven noch näher betrachtet werden und zwar zunächst für den Fall $a<1$ und dann für den Fall $a>1$. Zur Abkürzung setze ich:

$$\sin\mathrm{am}\, u = S(u), \quad \cos\mathrm{am}\, u = C(u), \quad \Delta\mathrm{am}\, u = D(u)$$

I. $a<1$.

Es ist

$$F = t^2-1 = (x+iy)^2-1$$

Ich setze nun

$$(x+iy)^2 = D^2u, \qquad (x-iy)^2 = D^2v$$

somit

$$F = -k^2S^2u, \qquad F' = -k^2S^2v$$

und demnach

5) $$F.F' = k^4S^2uS^2v = a^2$$

Setzt man nun $k=a$, so folgt aus Gleichung 5)

5′) $$Su.S'v = -\frac{1}{k}$$

und vermöge der Formel

$$S(L-x)\,Sx = -\frac{1}{k}$$

kann man nun auf $u+v=L$ schliessen. Ich setze nun

$$u = \frac{L}{2}-z, \qquad v = \frac{L}{2}+z$$

und finde so

$$x+iy = D\left(\frac{L}{2}-z\right), \quad x-iy = D\left(\frac{L}{2}+z\right)$$

folglich

$$6) \qquad x = \sqrt{1+k}\cdot\frac{Dz}{1+kS^2z}, \quad y = \sqrt{1+k}\cdot\frac{kSz\,Cz}{1+kS^2z}$$

Setzt man hier $z=0$, so folgt

$$x = \sqrt{1+k}, \quad y = 0$$

setzt man ferner $z = K$, so ergibt sich

$$x = \sqrt{1-k}, \quad y = 0$$

Setze ich ferner $z = 2K-z'$, so ist

$$x = \sqrt{1+k}\cdot\frac{Dz'}{1+kS^2z} \quad \text{und} \quad y = -\sqrt{1+k}\cdot\frac{kSz'Cz'}{1+kS^2z'}$$

Um also den Teil der Curve zu erhalten, der innerhalb der östl. Schleife der Lemniskate liegt, muss man z von null bis $2K$ laufen lassen. Den andern Teil der Curve, der innerhalb der westl. Lemniskatenschleife liegt, erhält man, wenn z von $2L$ an bis zu $2L+2K$ wächst. Die Länge des Strahles, der einen Punkt der Curve mit dem Ursprunge verbindet, sei mit r bezeichnet. Weil nun $r^2=x^2+y^2$ ist, so folgt aus Gleichung 6) sofort

$$7) \qquad r = \sqrt{1+k}\cdot\frac{\sqrt{1-kS^2}}{\sqrt{1+kS^2}}$$

Das Curvenelement kann nach Grösse und Richtung durch $dx+idy$ dargestellt werden. Nun ist aber

$$dx+idy = dD\left(\frac{L}{2}-z\right) = k^2S\left(\frac{L}{2}-z\right)C\left(\frac{L}{2}-z\right)dz$$

folglich

$$(dx+idy)(dx-idy)$$
$$= k^4S\left(\frac{L}{2}-z\right)C\left(\frac{L}{2}+z\right)S\left(\frac{L}{2}+z\right)C\left(\frac{L}{2}-z\right)dz^2$$

Weil aber

$$kS\left(\frac{L}{2}-z\right)C\left(\frac{L}{2}+z\right) = iD\left(\frac{L}{2}-z\right)$$

so ist auch

$$ds^2 = k^2D\left(\frac{L}{2}-z\right)D\left(\frac{L}{2}+z\right)dz^2$$

oder auch

$$8) \qquad ds = k\,r\,dz$$

Um das Azimut des Curvenelementes zu erhalten, bezeichne ich die Phase von $C\left(\frac{L}{2}-z\right)$ mit χ und schreibe

$$\text{Phase}\left(C\left(\frac{L}{2}-z\right)\right)=\chi$$

also ist

$$\text{Phase}\left(C\left(\frac{L}{2}+z\right)\right)=-\chi$$

Aus der Formel

$$kS\left(\frac{L}{2}-z\right)C\left(\frac{L}{2}+z\right)=iD\left(\frac{L}{2}-z\right)$$

folgt ferner, dass

$$\text{Phase}\left(S\left(\frac{L}{2}-z\right)\right)=\frac{\pi}{2}+\varphi+\chi$$

ist, wenn das Azimut des Leitstrahles r mit φ bezeichnet wird. Man hat somit

9) $$\text{Phase}\,(ds)=\frac{\pi}{2}+\varphi+2\chi$$

Weil

$$C\left(\frac{L}{2}-z\right)=\sqrt{\frac{1+k}{k}}\cdot\frac{Cz+iSz\,Dz}{1+kS^2z}$$

$$D\left(\frac{L}{2}-z\right)=\sqrt{1+k}\cdot\frac{Dz+ikSz\,Cz}{1+kS^2z}$$

so erhält man für die Tangenten von φ und χ die Ausdrücke

$$\operatorname{tg}\chi=\frac{Sz\,Dz}{Cz},\quad \operatorname{tg}\varphi=\frac{kSz\,Cz}{Dz}$$

Ist nun $z=0$, so ist $\chi=0$ und $\varphi=0$, somit

$$\text{Phase}\,(ds)=\frac{\pi}{2}$$

Ist $z=K$, so ergibt sich

$$\chi=\frac{\pi}{2}\quad\text{und}\quad\varphi=0$$

folglich

$$\text{Phase}\,(ds)=\frac{3\pi}{2}$$

Die Curve schneidet also die Abscissenaxe rechtwinklig. Im Punkte $z=\frac{K}{2}$ ist $\chi=\frac{\pi}{4}$ somit

$$\text{Phase}\,(ds)=\pi+\varphi$$

Der Leitstrahl r, der nach diesem Punkte hingeht, ist somit Tan-

gente an die Curve, und seine Länge r'' ist nach Formel 7) gleich $\sqrt{l}$. Die Tangente des Polarwinkels φ wächst also von null bis zu dem Werte $\frac{\sqrt{1-l}}{\sqrt{1+l}}$ und sinkt von hier aus wieder auf null herab, um nachher in's Negative über zu gehen. In $K-z$ hat die Tangente von φ den gleichen Wert, wie im Punke z; somit entsprechen den beiden Schnittpunkten des Leitstrahles r mit der Curve die Werte $K-z$ und z. Werden die Längen mit r und r' bezeichnet, so hat man

10) $$r r' = l = r''^2$$

also gleich dem Quadrat der Tangente, die vom Ursprunge aus an die Curve gelegt wird. Weil ferner für den Punkt $K-z$

$$\operatorname{tg}\chi' = \operatorname{cotg}\chi$$

also

$$\chi' = \frac{\pi}{2} - \chi$$

ist, so hat man als Phase des Curvenelementes im Punkte $K-z$

$$\text{Phase } (ds) = \frac{3\pi}{2} + \varphi - 2\chi$$

Die beiden Tangenten in den Punkten z und $K-z$ bilden also mit der Sehne als Basis ein gleichschenkliges Dreieck.

Aus Formel 8) folgt sogleich

11) $$s = k\sqrt{1+k}\int_0^z \frac{\sqrt{1-kS^2}}{\sqrt{1+Sk^2}}\,dz$$

Weil aber

$$\sqrt{1+k} = \sqrt{\frac{1+l}{2}} + \sqrt{\frac{1-l}{2}}, \quad -k = -2\sqrt{\frac{1+l}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1-l}{2}}$$

so kann man der Formel 11) auch folgende Gestalt geben:

12) $$s = k\left(\sqrt{\frac{1+l}{2}}\int_0^z \frac{1-(1-l)S^2}{\sqrt{1-k^2S^4}}\,dz + \sqrt{\frac{1-l}{2}}\int_0^z \frac{1-(1+l)S^2}{\sqrt{1-k^2S^4}}\,dz\right)$$

Ich setze nun

$$T = \sqrt{\frac{1+l}{2}} \int_0^z \frac{1-(1-l)S^2}{\sqrt{1-k^2S^4}}\, dz$$

$$U = \sqrt{\frac{1-l}{2}} \int_0^z \frac{1-(1+l)S^2}{\sqrt{1-k^2S^4}}\, dz$$

Um das Integral T umzuformen, setze ich

$$t = \frac{1-(1+l)S^2}{D}$$

dann ist

$$\frac{\partial t}{\partial z} = -(1+l)^2 \frac{SC}{D^2}(1-(1-l)S^2)$$

also

$$dz = -\frac{1}{(1+l)^2} \cdot \frac{D^2}{SC} \cdot \frac{dt}{1-(1-l)S^2}$$

$$\sqrt{1-t^2} = (1+l)\frac{SC}{D}$$

$$\frac{\sqrt{\frac{1+l}{2}}}{\sqrt{1-\frac{1-l}{2}t^2}} = \frac{Dz}{\sqrt{1-k^2S^4}}$$

folglich

$$dT = -\tfrac{1}{2} \cdot \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)\left(1-\frac{1-l}{2}t^2\right)}}$$

Um das Integral U auf ähnliche Art umzuformen, setze man

$$u = \frac{1-(1-l)S^2}{D}$$

man findet

$$dU = -\tfrac{1}{2} \cdot \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)\left(1-\frac{1+l}{2}u^2\right)}}$$

Nun müssen noch die Grenzen für die neuen Variabeln t und u bestimmt werden. Ist $z = 0$, so ist $t = 1$, und ist $z = \frac{K}{2}$, so ist $t = 0$. Weil ferner für das Intervall $0 < z < K$ mit wachsendem z die Variable t beständig abnimmt, so sinkt t von 1 an fortwährend bis auf null herab, während z von null an bis auf $\frac{K}{2}$ wächst. Ebenso

ist für $z = 0$ auch $u = 1$, und für $z = \frac{K}{2}$ ist $u = \frac{2\sqrt{l}}{1+l}$. In dem Intervalle $0 < z < \frac{K}{2}$ ist aber auch du beständig neg., wenn dz pos. ist. Läuft also z von null bis $\frac{K}{2}$, so sinkt u von 1 an fortwährend bis auf $\frac{2\sqrt{l}}{1+l}$ herab. Die Länge des Bogens, der von $z = 0$ bis $z = \frac{K}{2}$ reicht, ist demnach

$$13)\quad s = \frac{k}{2}\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(u-t^2)\left(1-\frac{1-l}{2}t^2\right)}} + \frac{k}{2}\int_{\frac{2\sqrt{l}}{1+l}}^1 \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)\left(1-\frac{1+l}{2}u^2\right)}}$$

Lässt man z von $\frac{K}{2}$ bis K wachsen, so ist dt beständig neg.; t nimmt also von null aus fortwährend ab und erreicht schliesslich den Wert -1. Anders ist es mit u. Der Punkt $z = \frac{K}{2}$ ist für u ein Minimum, und während z von $\frac{K}{2}$ auf K steigt, nimmt auch u von $\frac{2\sqrt{l}}{1+l}$ bis auf 1 fortwährend zu. Die Länge des Bogens, der vom Punkte $\frac{K}{2}$ bis zum Punkte k reicht, ist also

$$14)\quad s' = \frac{k}{2}\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)\left(1-\frac{1-l}{2}t^2\right)}} - \frac{k}{2}\int_{\frac{2\sqrt{l}}{1+l}}^1 \frac{du}{\sqrt{(u-u^2)\left(1-\frac{1+l}{2}u^2\right)}}$$

Aus 13) und 14) folgt nun

$$15)\quad s + s' = kK\left(\sqrt{\frac{1-l}{2}}\right)$$

somit der Umfang der Curve, den ich mit U bezeichnen will,

$$16)\quad U = 2kK\left(\sqrt{\frac{1-l}{2}}\right)$$

Ist nun $a = k$ sehr klein, so folgt aus 16)

$$16')\quad U = 2\left(\frac{a}{2}\right)\pi$$

also gleich dem Umfange eines Kreises, dessen Radius $\frac{a}{2}$ ist.

Wir wollen noch den Inhalt der von der Curve umschlossenen Fläche berechnen. Vom Ursprunge aus ziehe man unter dem Azimute φ einen Strahl, der die Curve in den Punkten $K-z$ und z schneidet. Werden die Abschnitte resp. mit r' und r bezeichnet, so kann ein Flächenstück $\mathfrak{S}$ durch folgendes Integral dargestellt werden:

$$17) \qquad \mathfrak{S} = \tfrac{1}{2}\int_0^z \left(r^2\frac{d\varphi}{dz} - r'^2\frac{d\varphi}{dz}\right) dz$$

Ich setze nun

$$\Omega(z) = r^2\frac{\partial\varphi}{\partial z}$$

also

$$\Omega(K-z) = -\frac{r'^2\partial\varphi}{\partial(k-z)}$$

folglich

$$18) \qquad S = \tfrac{1}{2}\int_0^z (\Omega(z)+\Omega(K-z))\,dz$$

Es ist nun

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \frac{\frac{\partial \operatorname{tg}\varphi}{\partial z}}{1+\operatorname{tg}^2\varphi}$$

$$\frac{\partial \operatorname{tg}\varphi}{\partial z} = \frac{D^4 - l^2}{kD^2} = \frac{k(C^2 - S^2D^2)}{D^2}$$

somit

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \frac{k(C^2 - S^2D^2)}{D^2 + k^2S^2C^2} = k\cdot\frac{C^2 - S^2D^2}{1-k^2S^4}$$

und demnach

$$\Omega(z) = k(1+k)\cdot\frac{C^2 - S^2D^2}{(1+kS^2)^2}$$

folglich auch

$$\Omega(K-z) = -k(1-k)\cdot\frac{C^2 - S^2D^2}{(1-k^2S^2)^2}$$

Aus diesen zwei Formeln ergibt sich nun

$$\Omega(z)+\Omega(K-z) = 2k^2\left(\frac{C^2 - S^2D^2}{1-k^2s^4}\right)^2 = 2k^2C^2(2z)$$
$$= 2(D^2(2z) - l^2)$$

also ist auch

$$19) \qquad \mathfrak{S} = \int_0^z (D^2(2z) - l^2)\,dz = \tfrac{1}{2}E\operatorname{am}2z - l^2z$$

Um die Hälfte des Inhaltes der Fläche zu erhalten, muss man

$z = \frac{K}{2}$ setzen, und die Multiplication mit 2 gibt dann schliesslich den vollen Inhalt. Bezeichne ich denselben mit J, so ist

20) $$J = E - l^2 K$$

Aus den Formeln

$$E = \frac{\pi}{2}\left(1 - \sum_1^\infty \frac{1}{2n-1}\binom{-\frac{1}{2}}{n}^2 k^{2n}\right)$$

$$K = \frac{\pi}{2}\left(1 + \sum_1^\infty \binom{-\frac{1}{2}}{n}^2 k^{2n}\right)$$

erkennt man leicht, dass

$$E - l^2 K = \frac{\pi}{2} \cdot \sum_1^\infty \frac{2n}{(2n-1)^2}\binom{-\frac{1}{2}}{n}^2 k^{2n}$$

ist, also für ein kleines k oder a hat man

20') $$J = \pi\left(\frac{a}{2}\right)^2$$

Zu der Formel 20) kann man auch auf folgendem Wege gelangen: $\frac{r^2 d\varphi}{2}$ ist der Inhalt eines infinitesimalen Sectors, der seine Spitze im Ursprunge hat. Also

$$d\mathfrak{S} = \frac{r^2}{2}\frac{\partial \varphi}{\partial z} dz$$

folglich

21) $$\mathfrak{S} = \tfrac{1}{2}\int_0^s r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz = \frac{k(1+k)}{2}\int_0^s \frac{(1 - 2s^2 + k^2 s^4)}{(1+ks^2)^2} dz$$

Ich setze nun

$$1 + kS^2 = p$$

also

$$\frac{k(1+k)}{2}\,\frac{(1-2S^2+k^2S^4)}{(1+kS^2)^2} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{2(1+k)^2}{p^2} - \frac{2(1+k)^2}{p} + k(1+k)\right)$$

Ferner ist

$$\tfrac{1}{2}\frac{\partial \log p}{\partial z} = \frac{kSCD}{p}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{kSCD}{p}\right) = p\,\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{kSCD}{p}\right)^2 = p\,\frac{\partial}{\partial p}\left(-\frac{(1+k)^2}{p^2} + \frac{2(1+k)^2}{p} - ((1+k)+k) + kp\right)$$

$$= \frac{2(1+k)^2}{p^2} - \frac{2(1+k)^2}{p} + kp$$

folglich

$$\frac{k(1+k)}{2}\,\frac{(1-2S^2+k^2S^4)}{(1+kS^2)^2} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{kSCD}{p}\right) - kp + k(1+k)\right)$$

$$= \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{kSCD}{p}\right) + D^2 - l^2\right)$$

und somit ist

22) $$\mathfrak{S} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{kSCD}{1+kS^2} + E\,\mathrm{am}\,z - l^2 z\right)$$

Setzt man in dieser Formel $z = K$ und multipl. mit 2, so folgt

23) $$J = E - l^2 K$$

II. $a > 1$

In diesem Falle setze ich

$$(x+iy)^2 = C^2u, \quad (x-iy)^2 = C^2v$$

somit

$$F = -S^2u, \quad F' = -S^2v$$

folglich

24) $$F.F' = S^2S^2v = a^2$$

Weil nun $a > 1$ ist, so setze ich $k = \frac{1}{a}$ und erhalte aus 24)

24') $$Su.Sv = -\frac{1}{k}$$

Wie im ersten Falle, wo $a < 1$ war, nehme ich auch hier an, dass $u + v = L$ sei, und setze

$$u = \frac{L}{2} - z, \quad v = \frac{L}{2} + z$$

somit

$$x+iy = C\left(\frac{L}{2} - z\right), \quad x-iy = C\left(\frac{L}{2} + z\right)$$

Aus diesen Gleichungen folgt nun

25) $$x = \frac{\sqrt{1+k}}{\sqrt{k}}\,\frac{Cz}{1+kS^2}, \quad y = \frac{\sqrt{1+k}}{\sqrt{k}}\cdot\frac{SzDz}{1+kS^2z}$$

und aus diesen Werten für x und y erkennt man sogleich, dass z von null bis $4k$ laufen muss, damit der Punkt (x, y) die ganze Curve beschreibe. Dieselbe wird ferner durch die beiden Axen in 4 congruente Teile geteilt. $z = 0$ und $z = 2K$ geben die Schnittpunkte mit der Abscissenaxe, während $z = K$ und $z = 3K$ diejenigen mit der Ordinatenaxe geben. Aus Gleichung 25) folgt

26) $$r = \frac{\sqrt{1+k}}{\sqrt{k}} \frac{\sqrt{1-kS^2}}{\sqrt{1+kS^2}}$$

Wird der Strahl nach dem Punkte $K-z$ mit r' bezeichnet, so folgt aus 26), dass

26') $$r' = \frac{\sqrt{1-k}}{\sqrt{k}} \frac{\sqrt{1+kS^2}}{\sqrt{1-kS^2}}$$

und für den Strahl r'' nach dem Punkte $z-\frac{K}{2}$ erhält man

$$r'' = \sqrt{\frac{l}{k}}$$

folglich

27) $$rr' = \frac{l}{k} = r''^2$$

Um das Curvenelement zu erhalten, gehe ich von der Formel

$$x+iy = C\left(\frac{L}{2}-z\right)$$

aus. Es ist

$$dx+idy = dC\left(\frac{L}{2}-z\right) = S\left(\frac{L}{2}-z\right)\left(D\left(\frac{L}{2}-z\right)dz\right.$$

somit

$$d(x+idy)(dx-idy) = -S\left(\frac{L}{2}+z\right)D\left(\frac{L}{2}-z\right)S\left(\frac{L}{2}-z\right) D\left(\frac{L}{2}+z\right)dz^2$$

$$-C\left(\frac{L}{2}-z\right)C\left(\frac{L}{2}-z\right)dz^2$$

folglich ist

28) $$ds = r\,dz$$

Aus dieser Formel folgt nun sogleich

29) $$s = \frac{\sqrt{1+k}}{\sqrt{k}} \int_0^z \frac{\sqrt{1-kS^2}}{\sqrt{1+kS^2}}\,dz$$

also der ganze Umfang

29') $$U = 4\,\frac{\sqrt{1+k}}{\sqrt{k}} \int_0^K \frac{\sqrt{1-kS^2}}{\sqrt{1+kS^2}}\,dz$$

oder nach früherem

30) $$U = \frac{4}{k}\,K\left(\sqrt{\frac{1-l}{2}}\right.$$

Ist a sehr gross, so folgt aus dieser Formel

30') $$U = 2\sqrt{a}\,\pi$$

Wird der Winkel, den der Leitstrahl r mit der Abscissenaxe bildet, mit φ bezeichnet und der Inhalt eines Sectors der Fläche mit $\mathfrak{S}$, so ist

$$d\mathfrak{S} = \frac{r^2}{2}\, d\varphi$$

somit

$$31) \qquad \mathfrak{S} = \tfrac{1}{2} \int_0^s r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial z}\, dz$$

Aus der Formel

$$x + iy = C\left(\frac{L}{2} - z\right)$$

erkennt man sofort, dass

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{Sz\, Dz}{Cz}$$

ist, somit

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{1 - 2k^2 S^2 + k^2 S^4}{1 - k^2 S^4}$$

folglich

$$32) \qquad \mathfrak{S} = \frac{1+k}{2k} \int_0^s \frac{1 - 2k^2 S^2 + k'' S^4}{(1 + kS^2)^2}\, dz$$

Ich setze nun wieder

$$1 + kS^2 = p$$

somit

$$(1+k)\,\frac{1 - 2k^2 S^2 + k^2 S^4}{(1+kS^2)^2} = \frac{2(1+k)^2}{p^2} - \frac{2(1+k)^2}{p} + (1+k)$$

Ferner ist

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{kSCD}{p}\right) = \frac{2(1+k)^2}{p^2} - \frac{2(1+k)^2}{p} + kp$$

folglich

$$33) \qquad \mathfrak{S} = \frac{1}{2k} \int_0^s \left(\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{kSCD}{p}\right) + D^2\right) dz$$

$$34) \qquad \mathfrak{S} = \frac{1}{2k}\left(\frac{kSCD}{1+kS^2} + E\,\mathrm{am}\, z\right)$$

Um den vollen Inhalt zu erhalten, muss $z = K$ gesetzt und mit 4 multiplicirt werden; also

$$35) \qquad J = \frac{2E}{k}$$

Das Integral $\int_0 \frac{1 - 2k^2 S^2 + k^2 S^4}{(1+kS^2)^2}\, dz$ steht mit der Gleichung des Periodenverhältnisses in Zusammenhang.

$$s' = (1+k)s, \quad K' = (1+k)K', \quad L' = \frac{1+k}{2}L, \quad S' = \frac{(1+k)S}{1+kS^2}$$

$$C' = \frac{CD}{1+kS^2}, \quad D' = \frac{1-kS^2}{1+kS^2}$$

$$\frac{1+k}{2}(l'+D'^2) = \frac{\frac{1}{2}}{(1+kS^2)^2}((1-k)(1+kS^2)^2+(1+k)(1-kS^2)^2)$$

$$- \frac{1-2k^2S^2+k^2S^4}{(1+kS^2)^2}$$

folglich ist

$$\int_0^s \frac{1-2k^2S^2+k^2S^4}{(1-kS^2)^2}\,ds = \frac{1}{2}\int_0^{s_1}(l'+D'^2)\,ds'$$

Für den Zweck der Integration ist damit aber nichts gewonnen, denn um $E'\,\mathrm{am}\,(s')$ in den auf k und s bezüglichen Functionen auszudrücken, muss man doch dieselbe Rechnung vornehmen, die wir oben durchlaufen haben.

XVI.

Einige Sätze über geometrische Orte und Enveloppen bei Kegelschnittbüscheln und Kegelschnittscharen.

Von

Josef Heller,

k. k. Professor an der Staatsoberrealschule in Linz a. Donau.

Im 69. Teile dieser Blätter, Seite 30 u. s. f. hat Max Greiner „über den Ort der Berührungspunkte der Tangenten von einem „Punkte an die Kegelschnitte einer Schar oder eines Büschels" unter I(10) und II(6) zwei Sätze analytisch nachgewiesen, denen sich mit Rücksicht auf das dualistische Entsprechen von Kegelschnittbüscheln und Kegelschnittscharen einerseits und Punkten und Geraden andrerseits sofort zwei entsprechende ebenso allgemeine Sätze an die Seite stellen lassen. Im Folgenden sind die von Greiner bewiesenen Sätze mit 1a und 2a bezeichnet, und werden denselben die nach den Gesetzen der Dualität davon abgeleiteten Sätze ohne weiteres gegenüber gestellt; wir erhalten demnach:

1a) „Der geometrische Ort der „Berührungspunkte aller Tangenten, die von einem gegebenen „Punkte P an die Kegelschnitte „einer Schar gezogen werden „können, ist eine Curve 3. Ordnung, welche die sechs Schnitt„punkte der vier gemeinsamen „Tangenten (Grundtangenten) der

1b) „Die Enveloppe aller Tangenten, die in den Schnittpunkten „einer Geraden g mit den Kegelschnitten eines Büschels an diese „gezogen werden, ist eine Curve „dritter Classe, welcher die sechs „Verbindungslinien der vier gemeinsamen Punkte (Grundpunkte) „als Tangenten und die gegebene

„Kegelschnittschar enthält und „den Punkt P zum Doppelpunkte „hat."

„Gerade g als Doppeltangente „angehören."

2a) „Der geometrische Ort der „Berührungspunkte aller Tangen- „ten, die von einem gegebenen „Punkte P an die Kegelschnitte „eines Büschels gelegt werden „können, ist eine Curve dritter „Ordnung, welche die vier Grund- „punkte des Kegelschnittbüschels „und den gegebenen Punkt P „enthält."

2b) „Die Enveloppe der in den „Schnittpunkten einer gegebenen „Geraden g mit den Kegelschnitten „einer Schar an diese gelegten „Tangenten ist eine Curve dritter „Classe, welcher die vier Grund- „tangenten der Kegelschnittschar „und die gegebene Gerade als „Tangenten angehören."

Aus den vorstehenden vier Sätzen lassen sich nun sehr leicht neue Sätze dadurch finden, dass man dem Punkte P, beziehungsweise der Geraden g eine besondere Lage zuweist, wie dies im Folgenden ausgeführt werden soll, und wollen wir uns bei diesen Erörterungen der Synthesis bedienen, weil wir auf diesem Wege schneller zum Ziele zu gelangen glauben.

Nehmen wir z. B. an, der Punkt P, von welchem aus an alle Kegelschnitte einer Schar Tangenten gezogen werden sollen, liege auf einer der vier gemeinsamen Grundtangenten, so fällt stets mit diesen Grundtangenten eine von den beiden vom Punkte P an jeden Schar-Kegelschnitt möglichen Tangenten zusammen, und da ferner jeder Kegelschnitt der Schar die gedachte Grundtangente in einem andern Punkte berührt, so erfüllen die unendlich vielen Berührungspunkte die ganze Gerade; dieselbe gehört also als Träger einer Punktreihe der im Satze 1a definirten Curve dritter Ordnung an. — Diese Curve degenerirt demnach in diesem Falle in eine Gerade als Gebilde erster Ordnung und einen Kegelschnitt

Nehmen wir an, die Gerade g, in deren Schnittpunkten mit den Kegelschnitten eines Büschels Tangenten an diese errichtet werden sollen, gehe durch einen der vier gemeinsamen Grundpunkte, so fällt stets mit diesem Grundpunkte einer der beiden möglichen Schnittpunkte dieser Geraden g mit den einzelnen Büschelkegelschnitten zusammen, und da alle Kegelschnitte des Büschels durch diesen Punkt gehen, ohne sich zu berühren, so schneiden sich in demselben unendlich viele Tangenten. Dieser Punkt gehört also als Träger eines Strahlenbüschels der im Satze 1b) definirten Curve dritter Classe an. Diese Curve degenerirt demnach in diesem Falle in einen Punkt als Gebilde erster Classe und

als Gebilde zweiter Ordnung. — Da auf der gedachten Grundtangente schon 3 Schnittpunkte der vier Grundtangenten liegen, so werden die drei anderen auf den Kegelschnitten zu suchen sein; somit folgt:

3a) „Die Berührungspunkte der „Tangenten, welche von einem „Punkte P, der auf einer Grund„tangente einer Kegelschnittschar „liegt an die einzelnen Kegel„schnitte der Schar gezogen wer„den, liegen auf einem Kegel„schnitte, welcher durch die drei „Schnittpunkte der drei anderen „Grundtangenten, sowie auch durch „den Punkt P hindurchgeht."

Liege ferner der Punkt P, von welchem aus an alle Kegelschnitte eines Büschels Tangenten gezogen werden sollen, auf einer Verbindungslinie zweier Grundpunkte, so ist auch sofort klar, dass diese Verbindungslinie als Träger einer Punktreihe dem geometrischen Orte der Berührungspunkte angehören muss; denn diese Gerade ist als ein Teil eines in ein Geradenpaar degenerirenden Büschelkegelschnittes zu betrachten, und jeder Punkt dieser Geraden kann als Berührungspunkt gelten. Die im Satze 2a) definirte Curve dritter Ordnung degenerirt demnach auch in diesem Falle in eine Gerade und einen Kegelschnitt, wobei nur auf dem letzteren die eigentlichen Berührungspunkte liegen, während die Gerade keinen einzigen Berührungspunkt eines einen Kegelschnitt als Gebilde zweiter Classe. Da durch den gedachten Grundpunkt schon 3 Verbindungslinien der vier Grundpunkte gehen, so werden die drei anderen Tangenten an den Kegelschnitt sein; daher folgt:

3b) „Die Tangenten, welche in „den Schnittpunkten einer Gera„den g, die durch einen Grund„punkt eines Kegelschnittbüschels „hindurchgeht, mit den einzelnen „Kegelschnitten des Büschels an „diese gezogen werden, umhüllen „einen Kegelschnitt, welcher von „den drei Verbindungslinien der „drei anderen Grundpunkte, sowie „auch von der Geraden g berührt „wird."

Gehe ferner die Gerade g in deren Schnittpunkten mit den Kegelschnitten einer Schar an diese Tangenten gezogen werden sollen, durch einen Schnittpunkt zweier Grundtangenten hindurch, so folgt sogleich, dass wieder dieser Schnittpunkt als Träger eines Strahlenbüschels der Enveloppe der Tangenten angehören muss; denn dieser Punkt ist als ein Teil eines in ein Punktepaar degenerirenden Scharkegelschnittes zu betrachten, und jeder durch diesen Punkt gezogene Strahl kann als Tangente gelten. Die im Satze 2b) definirte Curve dritter Classe degenerirt demnach auch in diesem Falle in einen Punkt und einen Kegelschnitt, wobei nur der letztere von den eigentlichen Tangenten umhüllt wird, während durch den Punkt keine einzige

eigentlichen Kegelschnitts, sondern nur aus Punkten eines in ein Geradenpaar degenerirenden Kegelschnittes des Büschels besteht.

Mit Rücksicht auf den Satz 2a) ergibt sich demnach:

4a) „Die Berührungspunkte der „Tangenten, welche von einem „Punkte P der auf der Verbin„dungslinie zweier Grundpunkte „liegt, an die Kegelschnitte eines „Büschels gezogen wergen, liegen „auf einem Kegelschnitte, welcher „durch die beiden anderen Grund„punkte hindurchgeht."

Tangente eines eigentlichen Kegelschnittes der Schar hindurchgeht, sondern nur Strahlen, die als Tangenten eines in ein Punktpaar degenerirenden Kegelschnittes der Schar gelten können.

Mit Rücksicht auf den Satz 2b) ergibt sich demnach:

4b) „Die Tangenten, welche in „den Schnittpunkten einer Gera„den g, welche durch den Schnitt„punkt zweier Grundtangenten „hindurchgeht, mit den Kegel„schnitten einer Schar an diese „gezogen werden, umhüllen einen „Kegelschnitt, welcher von den „beiden anderen Grundtangenten „berührt wird."

Andere Sätze ergeben sich aus den Sätzen 1) und 2), wenn man den Punkt P beziehungsweise die Gerade g unendlich fern annimmt und bedenkt, dass die beiden Berührungspunkte der Tangenten an einen Kegelschnitt, die von einem unendlich fernen Punkte ausgehen, auf einem Durchmesser liegen, und dass andererseits Tangenten an einen Kegelschnitt, deren Berührungspunkte unendlich weit liegen, Asymptoten genannt werden. So können die Sätze 1a) und 2a) unter der Voraussetzung, dass der Punkt P unendlich fern liege, in den folgenden Satz zusammengefasst werden:

5) „Die Endpunkte aller Durchmesser der Kegelschnitte eines „Büschels oder einer Schar, welche derselben Sehnenrichtung conju„girt sind, liegen auf einer Curve dritter Ordnung; der dieser Seh„nenrichtung zugehörige unendlich ferne Punkt ist bei der Kegel„schnittschar ein Doppelpunkt der Curve."

Ferner ergeben die Sätze 1b und 2b unter der Voraussetzung, dass die Gerade g mit der unendlich fernen Geraden der Ebene zusammenfällt, folgenden Satz:

6) „Die Asymptoten der Kegelschnitte eines Büschels oder „einer Schar umhüllen eine Curve dritter Classe; beim Kegelschnitt-

„büschel ist die unendlich ferne Gerade für diese Curve eine Dop-„peltangente.“

Der letzte Satz wurde, jedoch nur für Kegelschnittbüschel, auch von M. Trebitscher auf einem anderen Wege gefunden [1]).

Linz, im Februar 1887.

---

1) Sitzungsberichte der k. k. Akad. d. Wissensch. in Wien. LXXXI. Band. II. Abth. Seite 1080 u. f.

Vergleiche ferner J. Heller: Kegelschnittbüschel und Kegelschnittscharen. Linz 1887. Selbstverlag.

XVII.

Ueber Kraftlinien der Anziehung von Linien.

Von

R. Hoppe.

Kraftlinie (auch wol statische Bahn) eines Punktes heisst diejenige Linie, deren Tangente die Richtung der auf den Berührungspunkt wirkenden Kraft darstellt. Sie lässt sich daher denken als die Bahn eines Punktes, der ohne Beharrung in jedem Augenblicke der Kraft folgt.

Besteht die Kraft in der Anziehung eines Gebildes, so geht durch jeden Punkt des Raumes eine, und im allgemeinen nur eine Kraftlinie; letzteres erleidet nur Ausnahmen in Punkten des Gleichgewichts. Durch die Gesamtheit der Kraftlinien einer bestimmten Anziehung wird demnach der Raum in ein System unverzweigter, weder sich noch einander schneidender Linien geordnet, die nur in gewissen Gleichgewichtspolen zusammenlaufen können.

Das Kraftliniensystem bestimmt die Anziehung nur einseitig; durch eine Schar transversaler Flächen würde man die ganz unbestimmt bleibende Intensität darstellen können, worauf ich nicht eingehe.

Das Folgende behandelt nur Beispiele ebener Kraftliniensysteme der Newton'schen Anziehung ebener Linien.

§. 1.

Die anziehende Linie sei eine begrenzte Gerade. Sie sei Axe der x, ihre Mitte Anfang der xy, ihre Grenzen $x = \pm a$, die Coordinaten des angezogenen Punktes x, y. Da das gesuchte System symmetrisch zu beiden Axen ist, so können wir x und y positiv annehmen.

Bezeichnet ∂s das Element einer beliebigen Linie, $\varrho\varphi$ dessen Polarcoordinaten in Bezug auf ein beliebiges Centrum, und h den

Abstand des Centrums von der Tangente der Linie, so ist das doppelte Dreieck zwischen ∂s und dem Centrum

$$= h\partial s = \varrho^2 \partial\varphi$$

woraus:

$$\frac{\partial s}{\varrho^2} = \frac{\partial\varphi}{h}$$

Diese Grösse drückt, wenn man die Anziehung der Linieneinheit in der Entfernung $1 = 1$ setzt, die Anziehung von ∂s auf das Centrum, und

$$\frac{\partial\varphi \cos\varphi}{h}, \quad \frac{\partial\varphi \sin\varphi}{h}$$

deren Componenten aus. Ist nun die Linie gerade, so ist h constant, daher erhält man nach Integration die Componenten der Anziehung der ganzen Linie:

$$X = \frac{\sin\varphi - \sin\varphi_1}{h}, \quad Y = \frac{\cos\varphi_1 - \cos\varphi}{h} \tag{1}$$

wo φ, φ_1 den Enden entsprechen, $\varphi > \varphi_1$ und $h > 0$ ist.

In unserm Falle ist (xy) das Centrum, und $h = y$, ferner

$$\cos\varphi = \frac{+a-x}{\varrho}; \quad \sin\varphi = \frac{-y}{\varrho}$$

$$\cos\varphi_1 = \frac{-a-x}{\varrho_1}; \quad \sin\varphi_1 = \frac{-y}{\varrho_1}$$

woraus:

$$x = a\,\frac{\cot\varphi_1 + \cot\varphi}{\cot\varphi_1 - \cot\varphi}; \quad y = \frac{2a}{\cot\varphi_1 - \cot\varphi}$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial\cot\varphi - \partial\cot\varphi_1}{\cot\varphi_1\,\partial\cot\varphi - \cot\varphi\,\partial\cot\varphi_1}$$

Führt man diesen Wert in die Gleichung der Kraftlinie $Y\partial x - X\partial y = 0$ ein, so geht sie nach Division durch den positiven Factor $1 - \cos(\varphi - \varphi_1)$ über in

$$\frac{\partial\varphi}{\sin\varphi} + \frac{\partial\varphi_1}{\sin\varphi_1} = 0$$

Das Integral ist:

$$\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\operatorname{tg}\frac{\varphi_1}{2} = c \tag{2}$$

und zwar ist, weil φ und φ_1 zwischen 2R und 4R liegen, c stets positiv. Rational ausgedrückt in x, y lautet die Gleichung des Kraftliniensystems:

$$\left(\frac{1+c}{1-c}\right)^2 \frac{x^2}{a^2} - \frac{(1+c)^2}{4c}\,\frac{y^2}{a^2} = 1 \tag{3}$$

Die Excentricität dieser Hyperbeln ist $= a$. Bei Substitution von

$\frac{1}{c}$ für c bleibt die Gleichung unverändert; daher ist das System schon vollständig, wenn c von 0 bis 1 variirt. Dann variirt die Haupthalbaxe von a bis 0, die Nebenhalbaxe von 0 bis a. Das Resultat ist der Satz:

„Die Kraftlinien der Anziehung einer begrenzten Geraden bilden „ein System confocaler Hyperbeln, deren Brennpunkte in den End„punkten der Geraden liegen".

Die Hyperbeln erzeugen bei Variation von c die ganze Ebene, anfangend in den Verlängerungen der Geraden und endigend in der halbirenden Normale.

Ist die Gerade nach positiver Seite hin unbegrenzt, so setze man $x-a$ statt x, dann $\frac{c}{4a}$ statt c, dann $a=\infty$. Gl. (3) geht über in

$$y^2 = c^2 - 2cx$$

und stellt ein System confocaler Parabeln dar, deren Brennpunkt im Anfang der Geraden liegt. Wächst c von 0 bis ∞, so erzeugt die Parabel die ganze Ebene, beginnend in der negativen Verlängerung der Geraden und zustrebend der Normale $x=\infty$.

Ist die Gerade nach beiden Seiten unbegrenzt, so bilden offenbar ihre Normalen das Kraftliniensysystem.

§. 2.

Der Fall, wo die anziehende Linie gerade ist, scheint mir der einzige zu sein, für welchen die Berechnung des Kraftliniensystems sich ausführen, d. h. die Gleichung $Y\partial x = X\partial y$ sich integriren lässt.

Die Kraftlinien eines anziehenden Kreises sind offenbar seine Radien, bieten mithin kein Problem dar.

Dennoch kann man auch an andern Kraftliniensystemen einige Bemerkungen machen.

Von selbst leuchtet ein, dass jede Gerade, die Teil eines anziehenden Gebildes ist, in jedem ihrer Punkte, mit Ausnahme ihrer Endpunkte, von einer Kraftlinie normal geschnitten wird. Dass von Curven im allgemeinen dasselbe gilt, möchte wol nicht unmittelbar einleuchten.

Sei ein Punkt unendlich nahe der anziehenden Curve s, die von ihm darauf gefällte Normale Axe der y, die Tangente im Fusspunkte Axe der x, also 0, y die Coordinaten jenes Punktes, x_1, y_1 die eines

um s vom Anfang abstehenden Punktes. Bezeichnen u, u', u'' ... die Krümmung und deren Differentialquotienten nach s im Anfang, so erhält man durch Reihenentwickelung:

$$x_1 = s - \frac{u^2}{6} s^3 - \frac{1}{8} uu' s^4 + \ldots$$

$$y_1 = \frac{u}{2} s^2 - \frac{u'}{6} s^3 + \ldots$$

Ist ϱ der Abstand der Punkte $(0.y)$ und (x_1, y_1), und man setzt:

$$\sigma^2 = s^2 + y^2$$

so findet man:

$$\varrho^2 = \sigma^2 \left(1 - \frac{u^2}{12} \frac{s^2}{\sigma^2} - \frac{uu'}{12} \frac{s^3}{\sigma^2} + \ldots - u \frac{s^2 y}{\sigma^2} + \ldots\right)$$

Woraus:

$$\varrho^{-3} = \sigma^{-3} \left(1 + \frac{u^2}{8} \frac{s^2}{\sigma^2} + \frac{uu'}{8} \frac{s^3}{\sigma^2} + \ldots + \frac{3}{2} u \frac{s^2 y}{\varrho^2} + \ldots\right)$$

$$\frac{x_1}{\varrho_3} = \frac{s}{\sigma^3} \left(1 - \frac{u^2}{6} s^2 - \frac{uu'}{8} s^3 + \frac{u^2}{8} \frac{s^4}{\sigma^2} + \frac{uu'}{8} \frac{s^5}{\sigma^3} + \frac{3u}{2} \frac{s^2 y}{\sigma^2} + \ldots\right)$$

$$\frac{y_1 - y}{\varrho^3} = \frac{u}{2} \frac{s^2}{\sigma^3} + \frac{u'}{6} \frac{s^3}{\sigma^3} + \frac{u^3}{16} \frac{s^6}{\sigma^5} + \frac{u^2 u'}{12} \frac{s^7}{\sigma^5} - \frac{y}{\sigma^3} + \ldots$$

$$x = \int_{-s}^{s} \frac{x_1 \partial s}{\varrho^3} = \frac{uu'}{4} y^2 \left(\frac{4\sigma^2 - y^2}{\sigma^3} - \log \frac{\sigma + s}{\sigma - s}\right)$$

$$Y = \int_{-s}^{s} \frac{y_1 - y}{\varrho^3} \partial s = -u \left(\frac{s}{\sigma} - \log \frac{\sigma + s}{\sigma - s}\right) - \frac{2s}{y\sigma}$$

Hier bedeuten $\pm s$ die Grenzen des anziehenden Bogens. Ist nun s unendlich klein und $\frac{y}{s}$ gleichfalls, so ist $\lim \frac{s}{\sigma} = 1$, und die Hauptwerte sind:

$$X = uu' y^2 \left(s - \frac{R}{8}\right); \quad Y = -\frac{2}{y}$$

und längs der Kraftlinie hat man:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{Y}{X} = -\frac{2}{uu' \left(1 - \frac{R}{8}\right) y^3} = \infty$$

wofern u, u' endlich sind. Bei verschwindendem y hat also die Anziehung normale Richtung gegen die Curve, und dies Resultat ändert sich nicht, wenn man die Curve nach beiden Seiten beliebig verlängert, weil dann das unendlich kleine X nur endlich wird, während das unendlich grosse Y unendlich gross bleibt.

Hiermit ist bewiesen, dass jede anziehende Linie von ihren Kraftlinien normal geschnitten wird mit Ausnahme derer, die durch gewisse Punkte gehen. Ausgenommen können sein Doppelpunkte und Punkte, in denen der Krümmungsradius null ist, insbesondere Rückkehrpunkte.

In Betreff der Doppelpunkte leuchtet ein, dass eine Symmetrieaxe einer anziehenden Figur stets deren Kraftlinie ist. Demnach ist auch die Halbirungslinie eines Winkels von gleichen Schenkeln Kraftlinie dieses Winkels, und somit ein Beispiel einer Kraftlinie, welche die anziehenden Schenkel unter schiefen Winkeln schneidet, während in einem dem Scheitel noch so nahen Punkte eines Schenkels normaler Schnitt stattfindet. Da die Wirkung endlich ferner Teile der Figur auf einen dem Scheitel unendlich nahen Punkt gegen die der unendlich nahen Teile verschwindet, so folgt, dass die Anfangsrichtung der von einem Doppelpunkt einer Curve ausgehenden Kraftlinie den Winkel zwischen den Tangenten der zwei Curvenzweige halbirt. Der Durchschnittspunkt zweier Linien, als Scheitel von zwei Par Scheitelwinkeln, ist demnach auch Schnittpunkt zweier Kraftlinien, die sich unter rechten Winkeln treffen.

§. 3.

Curvenpunkte, in denen der Krümmungsradius null ist, sind Endpunkte oder Rückkehrpunkte. In beiden Fällen ergibt sich unabhängig vom Krümmungsradius, der auch endlich oder unendlich gross sein kann, dass die den Endpunkt oder Rückkehrpunkt treffende Kraftlinie eine Verlängerung der Curve in gleicher Richtung bildet.

Sei nämlich O ein Endpunkt der Curve s, P ein Punkt ausserhalb der Endtangente T und OS ein Bogen von s; dann liegt S für alle hinreichend kleinen OS auf derselben Seite der Geraden OP. Ist nun $OP = r$ unendlich klein, $OS = \mu r$, und μ endlich, so ist auch $PS : r$ endlich, daher die von P ausgehende Kraftlinie PL innerhalb des Winkels $OPS = \sigma$ enthalten, und zwar Wkl. $OPL = \lambda$ endlich. Wächst jetzt OS, so wächst im Anfang σ und ebensolange λ. Erreicht σ ein Maximum bei $S \equiv S_1$, so ist OS_1 endlich, mithin $OS_1 : r = \mu_1$ unendlich gross. Ist die Curve s in O und S_2 begrenzt, so verschwindet die Anziehung ihres Restes $S_1 S_2$ gegen die von OS_1, also auch gegen die von OS_1, und λ bleibt bis $S \equiv S_2$ endlich. Im Fall σ kein Maximum hat, findet dasselbe ohnedas statt. Folglich kann PL den Punkt O nicht erreichen und muss s in einem andern Punkte treffen. Dies gilt für alle Nachbarpunkte von O, die nicht

auf T liegen, so dass nur die Verlängerung der Endtangente als einzig mögliche Ausgangsrichtung der Kraftlinie aus O übrig bleibt.

Ist die Curve nach S_2 hin unbegrenzt, so hat ihre Anziehung auf P nicht immer eine bestimmte Richtung. Soll eine solche existiren, so muss bei unendlichem Wachsen von OS_2 sich λ nur unendlich wenig ändern. Das Resultat besteht also fort.

Bei Rückkehrpunkten lässt sich die vorstehende Betrachtung auf beide Curvenzweige anwenden und ergibt dasselbe.

§. 4.

Der Mittelpunkt eines Kreises ist Gleichgewichtspunkt der Anziehung des ganzen Kreises und Schnittpunkt aller Kraftlinien. Untersuchen wir in beiden Beziehungen die Anziehung eines Kreisbogens.

Der Radius sei a, der Mittelpunkt Anfang der xy, die Symmetrieaxe des Bogens $2a\beta$ Axe der x. Seien $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ die Coordinaten des angezogenen Punkts, ϱ sein Abstand vom Bogenelement $a\,\partial\vartheta$. Dann sind die Componenten der Anziehung des so begrenzten Kreisbogens:

$$X = \int_{-\beta}^{\beta} \frac{(a\cos\vartheta - r\cos\varphi)\,a\,\partial\vartheta}{\varrho^3}; \quad Y = \int_{-\beta}^{\beta} \frac{(a\sin\vartheta - r\sin\varphi)\,a\,\partial\vartheta}{\varrho^3}$$

und zwar ist

$$\varrho^2 = a^2 - 2ar\cos(\vartheta - \varphi) + r^2$$

Ist r unendlich klein, so hat man nach Entwickelung auf 1. Ordnung:

$$\varrho^{-3} = a^{-3}\left[1 + \frac{3r}{a}\cos(\vartheta - \varphi) + \ldots\right]$$

Führt man dies mit Vernachlässigung höherer Potenzen von r ein, so ergibt die Integration:

$$X = \frac{1}{2a^2}\{4a\sin\beta + (2\beta + 3\sin 2\beta)\,x\}$$

$$Y = \frac{1}{2a^2}(2\beta - 3\sin 2\beta)\,y$$

Hieraus ersieht man, dass ein Gleichgewichtspunkt existirt, nahezu für

$$x = -\frac{4a\sin\beta}{2\beta + 3\sin 2\beta}; \quad y = 0 \qquad (4)$$

wofern dieser Bruch hinreichend klein ist. Für $\beta < \mathrm{R}$ ist er nie $< \frac{1}{2}$; überdies ist der Fall nur denkbar, wenn $x > a\cos\beta$ ist, woraus: $\beta > \mathrm{R}$. Demnach muss $2\mathrm{R} - \beta$ hinreichend klein sein.

In unendlicher Nähe des Mittelpunkts findet man die Gleichung der Kraftlinien, als Integral der Gleichung $Y\partial x - X\partial y = 0$:

$$y = c\left\{1 + \frac{2\beta + 3\sin 2\beta}{4\sin\beta}\,\frac{x}{a}\right\}^{\frac{2\beta - 3\sin 2\beta}{2\beta + 3\sin 2\beta}} \qquad (5)$$

Für $x = 0$ wird $y = c$; folglich drückt c den seitlichen Abstand aus, in welchem die Kraftlinie (c) am Mittelpunkte vorbeigeht. Allein die Kraftlinie $c = 0$, das ist die Symmetrieaxe

$$y = 0$$

geht durch den Mittelpunkt.

Ferner ersieht man aus Gl. (5), dass alle der x Axe nahen Kraftlinien durch den Gleichgewichtspunkt (4) gehen.

Eine einfache Betrachtung zeigt ausserdem, dass jeder Punkt $(0 > x > -a,\ y = 0)$ Gleichgewichtspunkt der Anziehung eines durch $\vartheta = \pm\beta$ begrenzten Kreisbogens sein muss, wo $\cos\beta$ zwischen $\frac{x}{a}$ und -1 enthalten ist. Denn für $\cos\beta \gtrless \frac{x}{a}$ liegt die ganze Figur auf der positiven Seite, ist also X positiv, für $\beta = 2\mathrm{R}$ aber ist X negativ.

Die Bestimmung von x erfordert die Auflösung der folgenden transcendenten Geichung. Setzt man

$$\vartheta = 2\,\mathrm{am}\,u, \quad \text{Modul } k = \frac{2\sqrt{-ax}}{a-x}, \quad k' = \frac{a+x}{a-x}$$

$$\beta = 2\,\mathrm{am}\,b$$

so wird

$$X = \frac{2aB}{x(a+x)}; \quad B = \mathrm{el}\,b - k'b - k^2\,\mathrm{sn}\,b\,\mathrm{snc}\,b$$

(el bedeutet das Integral 2. Gattung, snc die Complementarfunction von sn).

Durch $B = 0$ wird x als Function von β bestimmt, von der man jedoch weiss, dass bei beständig von 0 bis $-a$ abnehmendem x zu Anfang und zu Ende $\beta = 2\mathrm{R}$ ist, folglich ein Minimum $\beta = \beta_0$ hat, so dass für $\beta < \beta_0$ kein Gleichgewichtspunkt, für $\beta > \beta_0$ deren zwei existiren. Die Berechnung von β_0 verspare ich für einen spätern Aufsatz.

XVIII.

Die Lemniskate.

Von

Emil Oekinghaus.

Während Kreis und Kegelschnitte vermöge ihrer hervorragenden Bedeutung in der Curventheorie von jeher die Aufmerksamkeit der Mathematiker an sich gefesselt haben und mit besonderer Vorliebe untersucht worden sind, kann von der Lemniskate nicht gerade dasselbe behauptet werden, obschon das Entstehungsgesetz dieser Curve auf ganz besondere Eigenschaften derselben schliessen lassen musste.

Der Hauptgrund dieser Erscheinung mag wol der sein, dass die Curve, als vom vierten Grade, den bisherigen Auflösungsmethoden ihrer Gleichungen sich nicht zugänglich zeigte, da diese zwar einer analytischen, nicht aber einer geometrischen Interpretation unterzogen werden können, was doch für das volle Verständnis einer Curve erforderlich ist.

Die Lemniskate ist als eine Art von Grenzfall zweier verschiedenen Curvensysteme anzusehen, indem sie einerseits den Cassinischen Linien, andererseits den Fusspunktcurven der Kegelschnitte angehört. Aus dieser bevorzugten Stellung lässt sich schon a priori erkennen, dass in ihr die Eigenschaften beider Gattungen sich vereinigt finden werden. Es kommt also nur noch auf die zweckmässigste Methode an, um sich erfolgreichen Eingang in diese Curve zu verschaffen.

Indem wir uns nun fast ausschliesslich derjenigen Methoden bedienen, welche wir in früheren Abhandlungen entwickelt haben, glauben wir, dass die daraus hervorgegangenen Resultate sämtlich neu sind und wegen ihrer Vielseitigkeit einiger Aufmerksamkeit wol wert erscheinen.

Wir geben zuerst die Beziehungen der Lemniskate zu einer sie schneidenden Geraden, betrachten den Fall der Tangente und der Brennpunktsgeraden genauer und stellen wegen ihrer Verwandtschaft zum Kreise die Bedeutung der Focal-Polar- und Scheitelwinkel unter steter Berücksichtigung der allgemeinen Curven eingehend dar.

Ebenso entwickeln wir unter Anwendung der Cosinusresolventen die Relationen zwischen Curve und Kreis, vergleichen sie mit denen der Kegelschnitte, namentlich der gleichseitigen Hyperbel und führen alsdann die Linien gleicher Producte oder Potenzen ein.

Die auf die Rectification der Lemniskaten sich beziehenden hyperelliptischen Integrale haben wir vermittelst einer Transformation einer geometrischen Discussion zugänglich gemacht und die daraus hervorgehenden Sätze und Relationen mit analogen aus der Theorie der isogonalen Verwandtschaft in interessante Verbindung gebracht. Die hierauf bezüglichen Reihenentwickelungen zeichnen sich durch besondere Einfachheit aus, was seinen Grund in der Wahl einer Variabelen hat, die sich vor allen übrigen durch ihre leichte Verwendung empfahl.

Ferner ermöglicht die Curve in Verbindung mit den Kegelschnitten eine geometrische Construction des Additionstheorems der elliptischen Integrale der 1. Art, und bei der Einführung der elliptischen Integralfunctionen ergeben sich mannigfache anregende Sätze über Rectificationsverhältnisse auf allgemeinster Grundlage, die einer weiteren Durchbildung und Verwertung fähig sind.

Von besonderem Werte dürften die conformen Abbildungen neu eingeführter, den Lemniskaten verwandter Curven sein, indem sie in geometrischer Hinsicht manches neue bieten und sich auch den Principien der Theorie der isogonalen Verwandtschaften in anschmiegendster Form unterwerfen.

Im Anschluss daran begründen wir eine neue Curvengattung, die der Ionoiden, welche als eine Art von Geschwindigkeitscurven dem Hamilton'schen Hodograph in etwa verwandt sind und die Bewegungsverhältnisse der einen Curve auf die ihr verwandte in elegantester Art übertragen lassen.

Wir geben Anwendung davon in der Central- und Wurfbewegung, in der Bewegung auf der Cykloide, der Trochoide, dem Kreise und der Ellipse, sowie auch in den elliptischen Schwingungen. Sie zeigen die Bedeutung der Lemniskaten in neuem Lichte.

Zum Beschluss haben wir noch der Curve einen Abschnitt gewidmet, in welchem wir vermittelst derselben eine geometrische Construction der Wurzeln der Gleichungen 4. Grades herleiten.

§ 1.

Die Gleichungen der Lemniskaten.

Die allgemeine Gleichung der Lemniskaten oder Cassinischen Linien in rechtwinkeligen Coordinaten ist

1) $$(x^2+y^2)^2-2c^2(x^2-y^2)+c^4=q^4$$

Diese Curven sind vom vierten Grade und stellen den geometrischen Ort aller derjenigen Punkte dar, für welche das Product der Leitstrahlen mn nach den Brennpunkten $\pm c$ eine constante Grösse q^2 ist.

In Polarcoordinaten würde die Gleichung sein

2) $$r^4-2c^2r^2\cos 2\varphi+c^4=q^4$$

Nicht unerwähnt wollen wir lassen, dass die Gleichung auch in folgender neuen Form sich darstellen lässt:

3) $$\sqrt{\frac{q^4}{4c^2}+x^2}\pm\sqrt{\frac{q^4}{4c^2}-y^2}=c$$

Die Leitstrahlen mn mögen den Winkel Θ miteinander einschliessen. Nun ist aber für jedes Dreieck, dessen Basis $2c$, dessen Mittellinie r, und dessen Winkel an der Spitze Θ ist, leicht die folgende Formel zu beweisen:

$$\operatorname{tg}\Theta=\frac{2cr\sin\varphi}{r^2-c^2}$$

woraus

$$\cos\Theta=\frac{r^2-c^2}{\sqrt{r^4-2c^2r^2\cos 2\varphi+c^4}}$$

folgt. φ ist die Neigung von r gegen c.

Daher ist für die Lemniskate im allgemeinen die folgende Relation gültig

4) $$r^2=c^2+q^2\cos\Theta$$

wonach zwischen dem Radiusvector r und dem Focalwinkel Θ eine sehr einfache Beziehung besteht, die uns später von grossen Nutzen sein wird. Den Krümmungshalbmesser erhält man aus

$$\varrho = \frac{q^2 r}{c^2 \cos 2\varphi + r^2}$$

Für die Brennstrahlen $m\,n$ findet man leicht

5)
$$m\sqrt{2} = \sqrt{r^2 + c^2 + q^2} + \sqrt{r^2 + c^2 - q^2}$$
$$n\sqrt{2} = \sqrt{r^2 + c^2 + q^2} - \sqrt{r^2 + c^2 - q^2}$$

oder

6)
$$\frac{m}{n} = \sqrt{c^2 + q^2 \cos\tfrac{1}{2}\Theta^2} + \sqrt{c^2 - q^2 \sin\tfrac{1}{2}\Theta^2}$$

und die Abhängigkeit zwischen Θ und φ drückt sich durch die Formel

7)
$$\frac{2c}{q^2}\sin\varphi = \frac{\sin\Theta}{\sqrt{c^2 + q^2\cos\Theta}}$$

aus. Der Winkel zwischen Normale und Vector r sei h, so ist

8)
$$\sin h = \frac{c^2}{q^2}\sin 2\varphi$$

Für die Lemniskate im engeren Sinne werden diese Relationen einfacher. Die Polargleichung wird für $c = q$

9)
$$r^2 = a^2 \cos 2\varphi, \qquad a^2 = 2c^2$$

worin $\pm a$ die Scheitelradien der Curve bezeichnen. Man kann sie auch durch

9)
$$r = a\cos\tfrac{1}{2}\Theta$$

ersetzen, woraus

$$\cos 2\varphi = \cos\tfrac{1}{2}\Theta^2 \quad \text{folgt.}$$

Aus der Formel für den Winkel zwischen Normale und r folgt, dass er das Doppelte des Polarwinkels ist.

Die Brennstrahlen sind

10)
$$m\sqrt{2} = \sqrt{a^2 + r^2} + r$$
$$n\sqrt{2} = \sqrt{a^2 + r^2} - r$$

Bemerkenswert ist noch, dass die Halbirungsgerade von Θ mit r den Winkel φ einschliesst. Bezeichnet man daher die Winkel zwischen Normale und m, n mit ε, ε', so ist

11)
$$\varepsilon = \tfrac{1}{2}\Theta + \varphi$$
$$\varepsilon' = \tfrac{1}{2}\Theta - \varphi$$

Schliessen ferner mn mit der positiven Achse die Winkel γ, γ_1 ein, so folgt

$$\gamma = 2\varphi + \tfrac{1}{2}\Theta$$

12)

$$\gamma_1 = 2\varphi - \tfrac{1}{2}\Theta$$

Aus dieser Relation entspringen einige Sätze über Focal- und Centriwinkel, die wir andeuten wollen.

Für 2 beliebige Punkte $P_1 P_2$, oder $\varphi_1 \Theta_1 \gamma_1$ und $\varphi_2 \Theta_2 \gamma_2$ bestehen die Beziehungen

$$\gamma_1 = 2\varphi_1 + \tfrac{1}{2}\Theta$$

$$\gamma_1' = 2\varphi_1 - \tfrac{1}{2}\Theta_1$$

$$\gamma_2 = 2\varphi_2 + \tfrac{1}{2}\Theta_2$$

$$\gamma_2' = 2\varphi_2 - \tfrac{1}{2}\Theta_2$$

Durch Subtraction folgt, wenn $\gamma_1 - \gamma_2 = \alpha$ etc.

$$\alpha = 2(\varphi_1 - \varphi_2) + \tfrac{1}{2}(\Theta_1 - \Theta_2)$$

$$\beta = 2(\varphi_1 - \varphi_2) - \tfrac{1}{2}(\Theta_1 - \Theta_2)$$

also

$$\alpha + \beta = 4(\varphi_1 - \varphi_2) = 4\delta$$

oder

13)

$$\delta = \tfrac{1}{4}(\alpha + \beta)$$

Hierbei muss auf die Lage der Sehne $P_1 P_2$ gegen die Focallinie $2c$ Rücksicht genommen werden:

1. Fall. Die Sehne trifft verlängert keinen Punkt der Focallinie $2c$. Dann folgt:

> Der Centriwinkel ist gleich dem 4ten Teil der Summe der beiden Focalwinkel, welche mit ihm auf gleichem Bogen stehen.

2, Fall. Die Sehne schneidet verlängert $2c$:

> Der Centriwinkel ist gleich dem 4ten Teil der Differenz der beiden Focalwinkel, welche mit ihm auf gleichem Bogen stehen.

3. Fall. Die Sehne geht durch einen Brennpunkt:

> Der Centriwinkel ist gleich dem 4ten Teil des Focalwinkels, welcher mit ihm auf gleichem Bogen steht.

§ 2.

Die Lemniskate und die Gerade.

Die Gerade habe gegen die Achse die Neigung τ und vom Centrum den Abstand h. Vermöge der Formeln

$$r^2 = a^2 \cos 2\varphi, \qquad h = r \sin(\varphi - \tau)$$

erhält man durch Elimination von r

14) $$\operatorname{tg}\varphi^4 (h^2 + 2c^2 \cos\tau^2) - 2c^2 \sin 2\tau \operatorname{tg}\varphi^3 + 2(h^2 - c^2 \cos 2\tau) \operatorname{tg}\varphi^2 + 2c^2 \sin 2\tau \operatorname{tg}\varphi + h^2 - 2c^2 \sin\tau^2 = 0$$

Die nachfolgende Untersuchung derselben gründet sich auf die in § 12. unserer Abhandlung: Trig. Aufl. biquadr. Gleichungen gegebenen Formeln.

Die Gleichung hat die Gestalt

$$\operatorname{tg}\varphi^4 - A \operatorname{tg}\varphi^3 + B \operatorname{tg}\varphi^2 + A \operatorname{tg}\varphi + D = 0$$

Wir berechnen zunächst

$$\operatorname{tg}(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4) = \frac{2A}{1 - B + D}$$

und finden

15) $$\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 = 2\tau + 360^0$$

d. i.

Die Summe der Winkel, welche die Radien nach den Schnittpunkten von Gerade und Lemniskate mit der Achse bilden, ist gleich dem doppelten Neigungswinkel der Geraden $+360^0$.

Für parallele Geraden bleibt demnach die Summe constant.

Die Cosinusresolvente ist:

16) $$\cos\omega^3 - \left(\frac{2h^2}{c^2} + \cos 2\tau\right) \cos\omega^2 + \frac{2h^2}{c^2} = 0$$

deren Wurzeln

17) $$\begin{aligned} \omega_1 &= \varphi_1 + \varphi_2 - \varphi_3 - \varphi_4 \\ \omega_2 &= \varphi_1 - \varphi_2 + \varphi_3 - \varphi_4 \\ \omega_3 &= \varphi_1 - \varphi_2 - \varphi_3 + \varphi_4 \end{aligned}$$

sind.

Um die geometrische Bedeutung derselben zu gewinnen, wollen ir die kubische Gleichung auf anderem Wege darstellen.

Von einem Punkte $R(\alpha)$ ziehen wir eine Secante durch die Curve, welche mit R den Winkel δ einschliesst.

Die von $R(\alpha)$ aus gerechneten Secantenabschnitte bezeichnen wir mit x. Man findet

18) $$x^4 - 4R\cos\delta x^3 + 2(R^2 + 2R^2\cos\delta^2 - c^2\cos 2(\alpha-\delta))x^2$$
$$-4R(R^2\cos\delta - c^2\cos(2\alpha-\delta))x + R^4 - 2c^2R^2\cos 2\alpha = 0$$

woraus beiläufig folgt, dass die Summe der Secanten für 2 mit R denselben Winkel δ einschliessenden Geraden dieselbe ist.

Wir verlegen jetzt $R(\alpha)$ in die Mitte einer Sehne zwischen $x_1 x_2$, so dass also $x_1 + x_2 = 0$ ist. Indem wir die in der Theorie der Gleichungen bekannte Reducente $a^2 d - abc + c^2 = 0$ benutzen und auf die obige Gleichung anwenden, finden wir

19) $$R^4 - R^2c^2\frac{\cos(\alpha-\delta)}{\cos\delta^2} + \frac{c^4}{4\cos\delta^4}\cos(2\alpha-\delta)\cos(2\alpha-3\delta) = 0$$

Also ist

20) $$R^2 = \frac{c^2}{2\cos\delta^2}(\cos 2(\alpha-\delta) \pm \sin\delta)$$

nun ist aber

$$\alpha - \delta = \tau, \quad \sin\delta = \frac{h}{R}$$

daher geht die letzte Formel in

21) $$R^3 - R(h^2 + \tfrac{1}{2}c^2\cos 2\tau) - \frac{c^2 h}{2} = 0$$

über, woraus

22) $$R_1 + R_2 + R_3 = 0$$

Hieraus ergibt sich der Satz:

Die Mitten je zweier entsprechenden Sehnen haben vom Centrum gleichen Abstand; so dass ein concentrischer Kreis, der durch die Mitte der einen Sehne geht, auch die Mitte der andern trifft.

Ferner ist die Summe je zweier dieser Strecken $R_1 + R_2$ gleich der dritten R.

Endlich bemerken wir noch, dass die Secante für

$$R^2 = r^2 = a^2\cos 2\varphi$$

in die Tangente übergeht, und aus der bezüglichen Formel 20) eine Relation $\delta = 90^0 - 2\varphi$ hervorgeht; da aber $\delta = \varphi - \tau$ ist, so folgt die Beziehung

23) $$\tau = 3\varphi - 90^0$$

womit das Tangentenproblem seine Lösung erhält.

Wir halten es für nützlich, nachzusehen, ob die oben abgeleiteten Resultate auch für die Cassinischen Linien gültig sind.

Die Gleichungen ändern sich dann um in

24) $$x^4 - 4R\cos\delta\, x^3 + 2(R^2 + 2R^2\cos\delta^2 - c^2\cos 2(\alpha-\delta))x^2 - 4R(R^2\cos\delta - c^2\cos(\alpha-\delta))x + R^4 - 2c^2R^2\cos 2\alpha + c^4 - q^4 = 0$$

25) $$R^4 - R^2c^2\frac{\cos 2(\alpha-\delta)}{\cos\delta^2} + \frac{c^4}{4\cos\delta^4}\cos(2\varphi-\delta)\cos 2\varphi - 3\delta) + \frac{q^4-c^4}{4\cos\delta^2} = 0$$

26) $$\frac{R^2}{c^2} = \frac{\cos 2(\alpha-\delta) \pm \sqrt{1 - \frac{q^4}{c^4}\cos\delta^2}}{2\cos\delta^2}$$

27) $$R^6 - R^4(2h^2 - c^2\cos 2\alpha) + \tfrac{1}{4}((2h^2 - c^2\cos 2\alpha)^2 + q^4 - c^4)R^2 - \frac{q^4h^2}{4} = 0$$

Diese Gleichung ist bikubisch. Da R als Mittellinie nach 6 Secantenteilen oder Sehnen gezogen werden kann, so entsprechen sich auch hier 2 Sehnen derart, dass ihre Mitten vom Mittelpunkt O gleiche Entfernung haben, wodurch das vorhin Gesagte verallgemeinert ist.

Kehren wir nun wieder zu unserer Lemniskate zurück und bezeichnen wir mit ω den Winkel zwischen R und der Normalen h, wodurch $$R\cos\omega = h$$

so führt die Substitution von $R = \frac{h}{\cos\omega}$ in die Gleichung 21) auf die folgende:

$$\cos\omega^3 - \left(\frac{2h^2}{c^2} + \cos 2\tau\right)\cos\omega^2 + \frac{2h^2}{c^2} = 0$$

welche mit der frühern identisch ist. Mithin sind ihre Wurzeln

28) $$\begin{aligned} \omega_1 &= \varphi_1 + \varphi_2 - \varphi_3 - \varphi_4 \\ \omega_2 &= \varphi_1 - \varphi_2 + \varphi_3 - \varphi_4 \\ \omega_3 &= \varphi_1 - \varphi_2 - \varphi_3 + \varphi_4 \end{aligned}$$

geometrisch definirt.

Interessant ist, dass noch eine dritte Betrachtung zu derselben Gleichung 3. Grades führt.

Ein mit der Lemniskate concentrischer Kreis vom Radius h werde von einer Geraden tangirt. Von ihren Schnittpunkten mit der Curve ziehen wir Tangenten an den Kreis, welche mit der Achse die Winkel $\vartheta_1\ \vartheta_2$ etc. einschliessen.

Zunächst ist

$$h = r\sin(\varphi - \tau)$$

oder

$$h^2 = a^2\cos 2\varphi \sin(\varphi - \tau)^2$$

Da aber

$$\varphi - \tau = \vartheta - \varphi$$

also

$$2\varphi = \vartheta + \tau$$

ist, so kann aus

$$h^2 = c^2\cos 2\varphi - c^2\cos 2\varphi\cos(2\varphi - 2\tau)$$

2φ eliminirt werden.

Man erhält

$$a + b\sin\vartheta + \cos\vartheta + d\sin 2\vartheta + e\cos 2\vartheta = 0$$

worin

$$a = \cos 2\tau + 2\frac{p^2}{c^2}$$

$$b = 2\cos\tau$$

$$c = -2\cos\tau$$

$$d = 0$$

$$e = 1$$

und damit wird die Resolvente nach früher entwickelten Principien

$$\cos\omega^3 - \left(\cos 2\tau + \frac{2h^2}{c^2}\right)\cos\omega^2 + \frac{2h^2}{c^2} = 0$$

$$\omega_1 = \tfrac{1}{2}(\vartheta_1 + \vartheta_2 - \vartheta_3 - \vartheta_4) \quad \text{etc.}$$

29)

$$\vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_3 + \vartheta_4 = 360^0$$

Hieraus folgt:

Die 4 Berührungspunkte der Tangenten schliessen ein Kreisviereck ein, dessen Seiten- und Diagonalenpaare die Winkel $\omega_1\ \omega_2\ \omega_3$ mit einander bilden, welche wir eben definirt haben.

Bei genauer Durchsicht dieser Bestimmungen wird man erkennen, dass die Winkel zwischen der 1. und 2., ebenso zwischen der 3. und 4. in einfachen Beziehungen zu einander stehen.

§ 3.

Wir fanden oben für R die Gleichung

$$R^2 = \frac{c^2}{2\cos\delta^2}(\cos 2(\alpha - \delta) \pm \sin\delta)$$

Die Strecke R halbirt die Sehne der Lemniskate und bildet mit ihr den Winkel δ, Daher existiren für 2 parallele Sehnen 2 Werte, R und R', welche denselben Polarwinkel α haben, und welche durch die Relationen

$$R^2 + R'^2 = \frac{c^2}{\cos\delta^2}\cos 2(\alpha - \delta)$$

30)

$$R^2 - R'^2 = \frac{c^2}{\cos\delta^2}\sin\delta$$

verbunden sind.

Wir erwähnen hier, dass auch die allgemeinen Formeln der Cassinischen Curven auf analoge Beziehungen führen.

Die Wurzeln der Hauptgleichung lassen sich wegen $x_1 + x_2 = 0$ leicht combiniren und so wird, wenn wir statt x jetzt $s = \frac{S}{2}$ setzen, folgendes System bestehen:

$$s_3 + s_4 = 4R\cos\delta$$

$$\frac{1}{s_3} + \frac{1}{s_4} = \frac{4(R^2\cos\delta - c^2\cos(2\alpha - \delta))}{R(R^2 - a^2\cos 2\alpha)}$$

31)

$$s^2 s_3 s_4 = R^2(a^2\cos 2\alpha - R^2)$$

also

$$\cos 2\alpha - \frac{S^2}{a^2}\cos\delta^2 = \pm\sin\delta$$

$$s_3 s_4 = \frac{R^2\cos\delta(a^2\cos 2\alpha - R^2)}{c^2\cos(2\alpha - \delta) - R^2\cos\delta}$$

Die den Strecken RR' bezüglichen Sehnen seien SS_1, dann folgen aus den letzten Formeln

$$\frac{S^2}{4} = c^2\frac{\cos(2\alpha - \delta)}{\cos\delta} - R^2$$

32)

$$S^2 + S'^2 = \frac{2a^2\cos 2\alpha}{\cos\delta^2}$$

$$S^2 - S'^2 = 4(R^2 - R'^2)$$

also

$$R^2+s^2 = R'^2+s'^2$$

welche Formel die Abhängigkeit der entsprechenden R und s ausdrückt. Geht die Secante in die Tangente über, wie also $s = 0$, so resultirt

$$s'^2 = R^2 - R'^2$$

33)
$$R'^2 = -\frac{c^2\cos 2\alpha\cos 4\alpha}{\sin 2\alpha^2}$$

$$s'^2 = \frac{c^2\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha^2}$$

Man kann, wenn man eine Sehne von constanter Länge S die Lemniskate durchwandern lässt, nach der Curve fragen, welche ihre Mitte beschreibt. Die Frage läuft darauf hinaus, eine Gleichung für $R(\alpha)$ aufzustellen, die nach dem Vorstehenden auf mehrfache Art abgeleitet werden kann. Man findet nach einigen Rechnungen

34)
$$((R^2+s^2)^2-a^2(R^2-s^2)\cos 2\alpha)((R^2+s^2)^2-a^2(R^2+s^2)\cos 2\alpha+c^4)=a^4s^4\sin^2 2\alpha$$

oder

$$(R^4+2R^2(s^2-c^2\cos 2\alpha)+s^4+\tfrac{1}{2}c^4)^2 = c^4(\tfrac{1}{4}c^4-c^2s^2\cos 2\alpha+4s^4)$$

welche für $\alpha=0$ zwei Werte liefert, wovon der 2te auf $R^2+s^2=c^2$ führt. Ist speciell $S=c$, lässt man also die halbe Focallänge die Lemniskate durchwandern, so ist die Curvengleichung ihrer Mitte

35)
$$\frac{R^2}{c^2} = \tfrac{3}{4}-2\sin\alpha^2 \pm \sqrt{\sin\alpha(1-\sin 3\alpha)}$$

Wir wollen hier noch darauf aufmerksam machen, dass in

36)
$$\cos 2\alpha - \frac{S^2}{a^2}\cos\delta^2 = \pm\sin\delta$$

S unverändert bleibt, wenn $180-\delta$ statt δ gesetzt wird. Daraus folgt, dass für jeden Radiusvector $r(\alpha)$ der Lemniskate zwei gleiche Sehnen gezogen werden können, die er halbirt und mit ihnen gleiche Winkel einschliesst. Die entsprechenden sehnenhalbirenden Strecken bezeichnen wir wieder mit $R_1 R_2$, so wird man haben

37)
$$R^2+R_1^2+\tfrac{1}{2}S^2 = r^2$$
$$R^2-R_1^2 = a^2\sin 2\alpha\,\mathrm{tg}\,\delta$$

Die bisher entwickelten Formeln sind demnach mannigfacher Deutung fähig und brauchen nur transformirt zu werden, um neue Eigenschaften der Lemniskate hervorgehen zu lassen. Eliminiren wir z. B. aus den Gleichungen

$$\cos 2\alpha - \frac{S^2}{a^2}\cos\delta^2 = \pm\sin\delta$$

$$\frac{S^2}{4} = c^2\frac{\cos(2\varphi-\delta)}{\cos\delta} - R^2$$

α, so folgt

$$R^4 - 2R^2s^2\cos 2\delta + s^4 = \pm a^2(R^2 - s^3)\sin\delta$$

oder die Gleichung

38) $$4R^2s^2\sin\delta^2 \mp a^2(R^2-s^2)\sin\delta + (R^2-s^2)^2 = 0$$

worin R und s als constant, δ als variabel betrachtet werden kann, und demnach 2 Wurzeln bestimmt.

Nun folgt aber aus dem Lemniskatendreieck, dessen Basis $= 2s$, dessen Mittellinie R, und dessen Winkel an der Spitze Θ ist, die Formel

$$\operatorname{tg}\Theta = \frac{2Rs\sin\delta}{R^2-s^2}$$

also

$$\cos\Theta^2 = \frac{(R^2-s^2)^2}{R^4 - 2R^2s^2\cos 2\delta + s^4}$$

Die vorhergehende Relation mit der letzten verbunden, liefert

$$\cos\Theta^2 = \frac{R^2-s^2}{a^2\sin\delta}$$

mithin auch

39) $$\sin 2\Theta = \frac{RS}{c^2}$$

Das einer Lemniskate einbeschriebene Parallelogramm, welches die Seiten $2R$ und S besitzt, hat demnach die Eigenschaft, dass bei constant bleibendem Diagonalenwinkel das Product der beiden Seiten constant bleibt.

Wie aus der Gleichung dieses Winkels

40) $$\operatorname{tg}\Theta^2 - \frac{a^2}{2Rs}\operatorname{tg}\Theta + 1 = 0$$

folgt, sind die zusammengehörigen Werte $\Theta_1 + \Theta_2 = 90^0$.

§ 4.

Wir stellen jetzt eine Gleichung für die Focalwinkel Θ auf, welche die Leitstrahlen nach den 4 Schnittpunkten von Gerade und Lemniskate einschliessen. Aus den Formeln

$$h = a\sin(\varphi-\tau)\cos\tfrac{1}{2}\Theta, \quad \cos 2\varphi = \cos\tfrac{1}{2}\Theta^2$$

folgt zunächst

41) $$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\Theta^4 - \frac{2c}{h}\cos\tau\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\Theta^3 + \left(\frac{c^2}{h^2}\cos 2\tau + 2\right)\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\Theta^2 - \frac{2c}{h}\cos\tau\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\Theta + 1 - \frac{a^2}{h^2}\sin\tau^2 = 0$$

und ferner

42) $$\Theta_1+\Theta_2+\Theta_3+\Theta_4 = 360^0$$

wonach die 4 Focalwinkel zusammen 4R bilden.

Ferner verbinden wir die Schnittpunkte mit einem Brennpunkte durch Strahlen, welche mit der Geraden die Winkel ψ einschliessen. Vermittelst der Elimination von r und φ aus

$$h = r\sin(\varphi-\tau)$$

$$\frac{c}{r} = \frac{\sin(\psi+\varphi-\tau)}{\sin(\psi-\tau)}$$

ergibt sich wie oben, dass

43) $$\psi_1+\psi_2+\psi_3+\psi_4 = 180^0$$

Wir setzen für $180^0-\psi_1$ den Ausdruck A und bezeichnen mit β bestimmte Brennpunktswinkel, hervorgehend aus

$$\begin{aligned}\beta_2 &= A+\psi_2\\ \beta_3 &= A+\psi_3\\ \beta_4 &= A+\psi_4\end{aligned}$$

44) $$\beta_2+\beta_2+\beta_4 = 4A$$

Man beachte nun, dass in der Lemniskate zu jedem Peripheriewinkel A drei Brennpunkts- oder Focalwinkel gehören, welche auf Bogen stehen, die von A gebildet sind. Die vorhin gegebenen Ableitungen führen also zu ähnlichen Sätzen, wie sie in der Kreislehre vorkommen und die letzte Relation würde, in analogem Sinne ausgesprochen, wie folgt lauten:

Jeder Peripheriewinkel einer Lemniskate, von dem ein Schenkel durch einen Brennpunkt geht, ist der 4te Teil der Summe der zugehörigen Focalwinkel.

Ziehen wir durch den Scheitel von A eine zweite Gerade, für welche also

$$\beta_2'+\beta_3'+\beta_4' = 4A'$$

ist, so gelangt man vermittelst Subtraction zum folgenden allgemeinern Satz:

> Jeder Peripheriewinkel einer Lemniskate ist der 4te Teil der Summe der 3 Focalwinkel, welche mit ihm auf entsprechenden Bogen stehen.

Dieser Satz ist um so interessanter, als er allgemein für alle Lemniskaten gilt. Um dies zu beweisen, legen wir durch die Cassinische Curve eine Gerade, deren Entfernung vom Mittelpunkt ist, dann bestehen nach früherem die Formeln

$$h = r\sin(\varphi - \tau)$$

$$r^2 = c^2 + q^2\cos\Theta$$

$$\frac{2c}{q^2}\sin\varphi = \frac{\sin\Theta}{\sqrt{c^2+q^2\cos\Theta}}$$

woraus, wenn wir die 2. typische Gleichungsform benutzen,

$$h^2 - c^2\cos\tau^2 - h\frac{q^2}{c}\cos\tau\sin\Theta + \frac{q^4}{4c^2}\sin\Theta^2 - q^2\sin\tau^2\cos\Theta$$

hervorgeht. Wegen $d = 0$ ist wieder

45) $$\Theta_1 + \Theta_2 + \Theta_3 + \Theta_4 = 360^0$$

Bezeichnen wir endlich wieder mit ψ die Winkel zwischen den Brennstrahlen und der Geraden und beachten

$$xy = q^2$$

$$\frac{q^4}{y^2} = 4c^2 + y^2 - 4cy\cos(\varphi - \tau)$$

$$y\sin\psi = h + c\sin\tau$$

so führt die Elimination von h auf eine Gleichung, die ebenfalls die Beziehung

$$\psi_1 + \psi_2 + \psi_3 + \psi_4 = 180^0$$

also auch

$$\psi_1 + \psi_2 + \psi_3 = A$$

hervorgehen lässt.

Durch analoge Transformationen wie oben gehen daher aus diesen Ableitungen dieselben Sätze für die Lemniskaten oder Cassinischen Linien hervor, so dass in diesen Curven jeder Peripheriewinkel A der 4te Teil der Summe der 3 Focalwinkel ist, welche auf den durch A bestimmten zugehörigen Bogen stehen.

Wir haben bisher stillschweigend für einen bestimmten Brennpunkt die Focalwinkel im Auge gehabt, so dass noch untersucht

werden muss, ob auch für den 2ten die obigen Sätze massgebend sind. Um nun nachzuweisen, dass beide vertauschbar sind, zeichnen wir eine Cassinische Curve und ziehen eine Secante durch dieselbe, welche sie in 4 Punkten schneiden möge. Die vom 1. Brennpunkt zu den Schnittpunkten gezogenen Leitstrahlen mögen mit der Geraden die Winkel ψ einschliessen. Ferner ziehen wir eine 2. Secante, welche mit der 1. den Winkel ε bildet, und nennen die analogen Winkel zwischen den entsprechenden Leitstrahlen und der 2. Geraden φ.

Die beiden Secanten schneiden 4 Bogen ab, wir bezeichnen ihre Brennpunkts- oder Focalwinkel für den 1. Brennpunkt mit f, für den 2. mit g, so entsteht folgendes System:

$$\begin{aligned}\psi_1 &= \varepsilon + \varphi_1 + f_1\\ \psi_2 &= \varepsilon + \varphi_2 - f_2\\ \psi_3 &= \varepsilon + \varphi_3 - f_3\\ \psi_4 &= \varepsilon + \varphi_4 - f_4\end{aligned}$$

46) $$180^0 = 4\varepsilon + 180^0 - \Sigma f$$

Die Leitstrahlen vom 2. Brennpunkt nach den Schnittpunkten beider Secanten mögen mit ihnen und zwar mit der ersten die Winkel σ, mit der 2ten ϱ einschliessen, man findet durch Betrachtung der Dreiecke:

$$\begin{aligned}\varrho_1 &= \varepsilon + \sigma_1 + g_1\\ \varrho_2 &= \varepsilon + \sigma_2 + g_2\\ \varrho_3 &= \varepsilon + \sigma_3 + g_3\\ \varrho_4 &= \varepsilon + \sigma_4 - g_4\end{aligned}$$

47) $$180^0 = 4\varepsilon + 180^0 + \Sigma g$$

Mithin folgt aus beiden Systemen

48) $$\Sigma f = \Sigma g \quad \text{oder:}$$

Die Summe der Focalwinkel ist für beide Brennpunkte dieselbe. Die von 2 Geraden auf der Curve abgeschnittenen 4 Bogen bestimmen demnach für den einen Brennpunkt 4 Focalwinkel f, für den 2. die analogen g, mit einander verknüpft durch

49) $$-f_1 + f_2 + f_3 + f_4 = -g_1 - g_2 - g_3 + g_4$$

Die Secantengleichung wollen wir noch einer kurzen Betrachtung unterziehen.

Die biquadratische Gleichung

$$x^4 - 4R\cos\delta x^3 + 2(R^2 + 2R^2\cos\delta^2 - c^2\cos 2(\alpha-\delta))x^2$$
$$- 4R(R^2\cos\delta - c^2\cos(2\alpha-\delta))x + R^4 - 2c^2R^2\cos 2\alpha = 0$$

identificiren wir mit

$$x^4 - Ax^3 + Bx^2 - Cx + D = 0$$

indem wir versuchen wollen, ob die Lemniskate eine geometrische Construction der Wurzeln dieser Gleichung ermöglicht. Wir haben also 1) gleichzusetzen $A = 4R\cos\delta$ etc. und 2) die R, α, δ, a aus den Constanten zu entwickeln. Wir schreiben die Resultate gleich hier nieder. Man hat zu berechnen

$$6R^2 = B + \sqrt{B^2 - 3AC + 12D}$$

wobei man bemerken möge, dass die quadratische Invariante unter dem Wurzelzeichen erscheint. Ferner ist

$$\cos\delta = \frac{A}{4R}$$

50)
$$\cot 2\varphi = \operatorname{tg}\alpha = \frac{(R^4 - D)\sin\delta}{-\frac{1}{2}CR + (R^4 + D)\cos\delta}, \qquad a^2 = \frac{R^4 - D}{R^2\cos 2\varphi}$$

Unter bestimmten Bedingungen ist demnach die geometrische Construction durchführbar, da sämtliche Beziehungen $R(\alpha)$, δ, a aus den Constanten berechnet sind. Für kubische Gleichungen

$$x^3 - Ax^2 + Bx - C = 0$$

ist zu berechnen

$$6R^2 = B + \sqrt{B^2 - 3AC}$$

51)
$$\cos\delta = \frac{A}{4R}, \quad \cot 2\varphi = \frac{R^3\sin\delta}{-\frac{1}{2}C + R^3\cos\delta}, \qquad a^2 = \frac{R^2}{\cos 2\varphi}$$

Hier wird R zum Vector r der Lemniskate.

Für reducirte kubische Gleichungen unter der Form

$$x^3 + Bx + C = 0$$

würde noch zu erwähnen sein, dass die Relationen in

52) $$r^2 = \tfrac{1}{3}B, \quad \delta = 90^0, \quad \cot 2\varphi = \frac{2r^3}{C}, \qquad a^2 = \frac{r^2}{\cos 2\varphi}$$

übergehen. Die Gerade steht jetzt auf dem Radiusvector r senkrecht.

Wir wollen eine Anwendung hiervon machen.

In der Kometentheorie ist bekanntlich die Anomalie Θ des Kometen durch eine kubische Gleichung mit der Zeit t verknüpft, welche der Himmelskörper seit seinem Perihel zum Durchlaufen eines Bogens bedarf. Sie ist

$$53) \qquad \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\Theta^3 + 3\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\Theta = \frac{6kt\sqrt{1+m}}{p^{\frac{3}{2}}}$$

Wir brauchen demnach in der vorhergehenden Gleichung nur

$$x = r\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\Theta$$

einzuführen, so wird

$$r^2 = r^2 = \operatorname{tg} 2\varphi = \frac{t}{c}, \quad \text{wo} \quad c = \frac{p^{\frac{3}{2}}}{3k} \quad \text{ist.}$$

Die Lemniskate löst also in einfachster Weise das Kometenproblem, nämlich aus der seit dem Periheldurchgang verflossenen Zeit die entsprechende Anomalie oder den Ort des Kometen zu finden, welche Aufgabe wir schon früher in den „Eigenschaften der Lemniskate" auf anderem Wege gelöst haben.

§ 5.

Die Lemniskate und die Tangente.

Wie schon früher bewiesen, steht mit der Gleichung

$$\operatorname{tg}\varphi^4 - A\operatorname{tg}\varphi^3 + B\operatorname{tg}\varphi^2 + A\operatorname{tg}\varphi + D = 0$$

die Relation

$$56) \qquad \frac{\cos(\varphi_1 - \varphi_2)}{\cos(\varphi_3 - \varphi_4)} = -\frac{\sin(\varphi_1 + \varphi_2)}{\sin(\varphi_3 + \varphi_4)}$$

oder kurz

$$\frac{\cos\delta}{\cos\delta'} = -\frac{\sin\sigma}{\sin\sigma'}$$

in Verbindung.

Da aber allgemein

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 = 2\tau + 360^0$$

ist und für die Tangente $\varphi_1 + \varphi_2$ in 2φ übergeht, so geht unter Benutzung von $\tau = 3\varphi - 90^0$ die Relation in

$$\varphi_3 + \varphi_4 = 180^0 - 4\varphi$$

über, worin alle Winkel als spitz angenommen sind.

Es ist aber $\delta = 0$, also

$$\cos(\varphi_3 - \varphi_4) = \frac{\sin 4\varphi}{\sin 2\varphi} = 2\cos 2\varphi$$

Bezeichnen wir $\varphi_4 - \varphi_3$ mit ψ. so folgt also noch

57) $$\cos\psi = 2\cos 2\varphi$$

Da ferner die Secantengleichung wegen $\delta = 90^0 - 2\varphi$ in die der Tangente übergeht, und $s_1 = s_2 =$ null wird, so ist noch

$$s_3 + s_4 = 4r\sin 2\varphi, \qquad s_3 s_4 = 3r^2$$

also

58) $$s_4 - s_3 = 2r\sin\psi = d$$

Diese Beziehung führt auf eine Kreisrelation, wenn man $s_4 - s_3 = d$ als Sehne, r als Radius und ψ als Peripheriewinkel betrachtet.

Die bezüglichen Radienvectoren r_3, r_4 haben die leicht abzuleitenden Gleichungen

59)
$$r_3 r_4 = \frac{r^4}{c^2} = c^2\cos\psi^2$$
$$r_3^2 + r_4^2 = -4r^2\cos 4\varphi$$

Die Mittellinie der Sehne d nach dem Centrum der Lemniskate ist gleich r, wie aus der letzten Formel hervorgeht, und schliesst mit der Achse den Winkel $180^0 - 5\varphi$ ein.

Man bemerkt sofort, dass das Kreiscentrum auf der Lemniskate liegt und die Coordinaten $r(\varphi)$ besitzt.

Hieraus geht eine sehr elegante Auflösung des Tangentenproblems hervor. Um von einem Lemniskatenpunkte die beiden reellen Tangenten an dieselbe zu ziehen, verbinden wir ihn mit der Mitte O der Curve durch den Vector r_3 oder r_4, errichten in der Mitte dieses Vectors eine Verticale bis zu den beiden Durchschnitten mit der Curve, verlängern die diesen entsprechenden Vectoren r bis zum 2. Durchschnitt mit der Lemniskate; dann sind diese Schnittpunkte die gesuchten Berührungspunkte beider Tangenten.

Des Brennpunkts wegen existiren eigentlich in diesem speciellen Falle 4 Tangenten, von welchen wir die beiden reellen so eben kennen gelernt und construirt haben. Dass auch imaginäre bestehen, lässt sich am besten durch eine allgemeinere Untersuchung dartun. die sich auf den Fall bezieht, dass die Tangenten von einem beliebigen Punkte an die Curven gezogen werden. Derselbe habe die Polarcoordinaten $R(\alpha)$. Dass höchstens 4 reelle Tangenten

existiren, übersieht man leicht. Dass ebenfalls imaginäre auftreten, geht aus den folgenden Beziehungen hervor

$$R = \frac{r\cos 2\varphi}{\cos(3\varphi - \alpha)}, \quad r^2 = a^2\cos 2\varphi, \quad R^2 = \frac{a^2\cos 2\varphi^3}{\cos(3\varphi - \alpha)^2}$$

welche wir nach Potenzen von $\cos 2\varphi$ entwickeln. Der Abkürzung wegen setzen wir $\cos 2\varphi = x$ und $\frac{c^2}{R^2} = k$; man hat

60) $$(k^2 - 2k\cos 2\alpha + 1)x^6 + \tfrac{3}{2}(k\cos 2\alpha - 1)x^4 - \tfrac{1}{2}(k - \cos 2\alpha)x^3 + \frac{9}{16}x^2 - \frac{3}{8}\cos 2\alpha . x + \frac{1}{16}\cos 2\alpha^2 = 0$$

eine Gleichung 6. Grades, welche in die vom 4. übergeht, wenn

$$r^4 - 2c^2r^2\cos 2\alpha + c^4 = q^4$$

gesetzt wird. Der betreffende Punkt $R(\alpha)$ liegt alsdann in der Curve, und die Tangentengleichung wird zu

61) $$x^4 + 2\cos 2\alpha . x^3 - \cos 2\alpha . x + \tfrac{1}{4}\cos 2\alpha^2 = 0$$

deren Auflösung wir oben auf constructivem Wege mitgeteilt haben. Während also die analytische Auflösung dieser Gleichung Schwierigkeiten haben würde, zeigt die geometrische keine solche.

Interessant ist, dass letzte Gleichung durch die Parabel gelöst werden kann.

In der Directrix der Parabel wählen wir einen Punkt, dessen Entfernung R vom Brennpunkt mit der Achse den Winkel 2α einschliesst, und betrachten ihn als Centrum eines durch den Brennpunkt gehenden Kreises. Letzterer schneidet die Parabel in 2 Punkten, deren Leitstrahlen mit R die gesuchten Winkel 2φ einschliessen. Wie man nämlich findet, ist die auf den Kreis und Parabel sich beziehende Gleichung identisch mit derjenigen der Tangenten für die Lemniskate.

Die allgemeine Gleichung dieses Tangentenproblems ist wegen des 6. Grades nicht algebraisch lösbar. Doch ist zu bemerken, dass sich leicht Combinationen zu 4 Wurzeln in mehrfacher Art finden lassen, wenn die Bedeutung der Coefficienten dieser Gleichung berücksichtigt wird.

Die Verhältnisse werden geometrisch discutirbar, wenn von einem in der X- oder Y-Achse liegenden Punkte Tangenten an die Lemniskate gezogen werden sollen. Die Auflösung dieser Specialfälle haben wir schon früher gegeben und damit auch die Bedeutung der Curve

für die Auflösung der reducirten kubischen Gleichungen aller 3 Arten nachgewiesen. Die in den „Eigenschaften der Lemniskate" entwickelten Sätze können als Fortsetzung des oben Aufgestellten betrachtet werden und verweisen wir darauf.

Hinsichtlich der Resolvente

$$\cos\tfrac{1}{2}(\vartheta_1+\vartheta_2-\vartheta_3-\vartheta_4)^3-\left(\cos 2\tau+\frac{2h^2}{c^2}\right)\cos\tfrac{1}{2}(\vartheta_1+\vartheta_2-\vartheta_3-\vartheta_4)^2 + \frac{2h^2}{c^2}=0$$

ist zu bemerken, dass dieselbe für den Fall der Tangente leicht anzugebende Wurzeln besitzt. Da $\vartheta_1=\vartheta_2=\vartheta$ ist, so folgt

$$\cos 2\vartheta=\cos(\vartheta_3+\vartheta_4)=-\tfrac{1}{3}\left(\cos 2\tau+\frac{2h^2}{c^2}\right)$$

$$\cos\tfrac{1}{2}(\vartheta_3-\vartheta_4)=\tfrac{2}{3}\left(\cos 2\tau+\frac{2h^2}{c^2}\right)$$

also aus beiden

$$\cos\tfrac{1}{2}(\vartheta_3-\vartheta_4)=-2\cos(\vartheta_3+\vartheta_4)=-2\cos 2\vartheta$$

Da aber

$$\vartheta=90^0-\varphi$$

ist, so folgt

$$\cos\tfrac{1}{2}(\vartheta_3-\vartheta_4)=2\cos 2\varphi=\cos\psi$$

oder

$$\vartheta_4-\vartheta_3=2\psi$$

Nun ist aber $\vartheta_4-\vartheta_3$ der Winkel zwischen den Tangenten, welche von dem 3. und 4. Schnittpunkt der die Lemniskate berührenden Geraden an den letztern tangirenden Kreis vom Mittelpunkt O gezogen werden, also doppelt so gross als der Winkel zwischen den Radienvectoren $r_3 r_4$.

Wir wollen an dieser Stelle eine Methode mitteilen, welche in einfacher und eleganter Art zu einer Construction der Lemniskate führt.

In der Y-Achse wählen wir einen Punkt zum Centrum eines Kreises, der durch den Mittelpunkt O der Lemiskate geht und demnach die Curve in noch 2 Punkten schneidet. R beseichne die Entfernung des Centrums von O. Wir wollen den Focalwinkel Θ berechnen, der zu den Schnittpunkten gehört, und haben also die Formeln

$$r=2R\sin\varphi$$

$$r=a\cos\tfrac{1}{2}\Theta$$

$$\sqrt{2}\sin\varphi = \sin\tfrac{1}{2}\Theta$$

zu benutzen.

Man erhält ohne Mühe die Relation

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\Theta = \pm\frac{c}{R}$$

Dieselbe führt uns zu folgender Construction der Lemniskate:

In der Y-Achse wählen wir einen beliebigen Punkt als Centrum eines Kreises, der durch die beiden Brennpunkte geht und die Y-Achse in den Punkten R und R' schneidet. Diese Punkte seien Centra zweier durch den Mittelpunkt der Lemniskate gehenden Kreise, welche beide den Focalkreis in 4 Punkten schneiden. Diese Punkte gehören der gesuchten Lemniskate an.

§ 6.

Die Gerade durch einen Brennpunkt.

Die Formeln nehmen für diese specielle Lage sehr einfache und elegante Ausdrücke an, die wir noch erwähnen wollen.

Wir knüpfen zugleich an ein Gleichungssystem an, welches wir schon früher entwickelt haben und aus der Gleichung 4. Grades

$$x^4 - ax^3 + bx^2 - cx + d = 0$$

abgeleitet werden kann.

Wie aus den „Beiträgen zur Theorie der Gleichungen 4. Grades" zu ersehen ist, bestehen die Relationen

62)
$$\sqrt{x_1 - h} + \sqrt{x_2 - h} + \sqrt{x_3 - h} + \sqrt{x_4 - h} = 0$$
$$\sqrt{\sqrt{x_1 - h} + h_1} + \sqrt{\sqrt{x_2 - h} + h_1} + \sqrt{\sqrt{x_3 - h} + h_1} + \sqrt{\sqrt{x_4 - h} + h_1} = 0$$

63)
$$h = -\frac{a^4 - 8a^2b + 16b^2 - 64d}{8(a^3 - 4ab + 8c)}$$
$$h' = \frac{3a^2 - 8b}{16\sqrt{\tfrac{1}{8}(a^3 - 4ab + 8c)}}$$

Wir nehmen mit der Hauptgleichung eine lineare Variation

$$x = y + h$$

vor, führen sie auch in den übrigen Functionen durch und ziehen noch die Resolvente für den Typus

$$x_1 x_2 + x_3 x_4 = y$$

nämlich

64) $$y^3 - by^2 + (ac - 4d)y - (a^2 d - 4bd + c^2) = 0$$

in den Bereich dieser Variationen, indem wir also statt x den Wert $y + h$ setzen und die Constanten $abcd$ demgemäss aus der transformirten Gleichung zu berücksichtigen haben.

Der Ausdruck von h und demnach die Relation 62) soll jetzt mit der vorletzten Resolvente verknüpft werden mit der Bestimmung $h = 0$. Es wird eine Gleichung 4. Grades hervorgehen, welche auf eine quadratische reducirt werden kann. Man hat schliesslich folgendes Resultat:

Mit jeder biquadratischen Gleichung ist eine Relation

64) $$\sqrt{(x_1 - h)(x_2 - h)} + \sqrt{(x_3 - h)(x_4 - h)} + \sqrt{(x_1 - h)(x_3 - h)} + \sqrt{(x_2 - h)(x_4 - h)} + \sqrt{(x_1 - h)(x_4 - h)} + \sqrt{(x_2 - h)(x_3 - h)} = 0$$

verknüpft, deren h aus der quadratischen Gleichung

$$h^2 - \frac{a}{2} h + \frac{b}{6} \pm \frac{1}{3} \sqrt{b^2 - 3ac + 12d} = 0$$

hervorgehen.

Analog findet man

65) $$\sqrt{(x_1 + x_2 - 2k)(x_3 + x_4 - 2k)} + \sqrt{(x_1 + x_3 - 2k)(x_2 + x_4 - 2k)} + \sqrt{(x_1 + x_4 - 2k)(x_2 + x_3 - 2k)} = 0$$

$$k^2 - \frac{a}{2} k + \frac{b}{6} \pm \frac{1}{6} \sqrt{b^2 - 3ac + 12d} = 0$$

u. a. m.

Die Gleichung der Geraden durch den Brennpunkt ist

$$x^4 - 4cx^2 + 4c^3 \cos\tau x - c^4 = 0$$

oder auch

$$y^4 - 4c \cos\tau y^3 + 4c^2 y^2 - c^4 = 0$$

worin τ die Neigung der Geraden gegen die Achse ist.

Man findet folgende Relationen

$$\sqrt{x_1x_2+x_3x_4}+\sqrt{x_1x_3+x_2x_4}+\sqrt{x_2x_3+x_1x_4}=0$$

$$\sqrt{y_1y_2-y_3y_4}+\sqrt{y_1y_3-y_2y_4}+\sqrt{y_2y_3-y_1y_4}=0$$

$$\sqrt{x_1x_2-y_1y_2}+\sqrt{x_1x_3-y_1y_3}+\sqrt{x_2x_4-y_2y_4}=0$$

66)

$$\sqrt{\frac{5c}{4\cos\tau}-x_1}+\sqrt{\frac{5c}{4\cos\tau}-x_2}+\sqrt{\frac{5c}{4\cos\tau}-x_3}=\sqrt{\frac{5c}{4\cos\tau}-x_4}$$

x_4 neg.

$$\sqrt{1-\frac{y_1+y_2+y_3}{4y_4}}=\sqrt{1-\frac{y_1+y_2+y_4}{4y_3}}+\sqrt{1-\frac{y_1+y_3+y_4}{4y_2}}+\sqrt{1-\frac{y_2+y_3+y_4}{4y_1}}$$

y_4 neg.

u. a. m., welche auf die Cassinischen Linien ausgedehnt werden können.

Interessant ist noch folgende Bemerkung.

Aus

$$x_1x_2x_3x_4=-c^4 \quad \text{und} \quad x_1+x_2+x_3=-x_4 \quad \text{folgt}$$

67)

$$c^2=\sqrt{x_1x_2x_3(x_1+x_2+x_3)}$$

Wie aus der Geometrie des Kreises bekannt ist, bedeutet hier c^2 den Inhalt des Dreiecks, welches 3 sich von aussen berührende Kreise von den Radien $x_1x_2x_3$ mit ihren Seiten x_1+x_2, x_2+x_3, x_3+x bilden. Für variabele x bleibt der Inhalt demnach constant.

Eine andere Beziehung zwischen den Focallinien xy geht aus

$$\frac{1}{y_1}+\frac{1}{y_2}+\frac{1}{y_3}+\frac{1}{y_4}=0$$

hervor.

Führt man in dieselbe für y_3+y_4 den Wert $4c\cos\tau-y_1-y_2$ ein, so folgt

$$\frac{y_1+y_2}{y_1y_2}=\frac{4c\cos\tau-y_1-y_2}{c^4}y_1y_2$$

oder

$$(x_1x_2+y_1y_2)(y_1+y_2)=4c\cos\tau\, y_1y_2$$

und da

$$x_2^2=y_2^2+4c^2-4cy_2\cos\tau$$

so erhält man durch Elimination von $\cos\tau$

68)

$$x_1x_2+y_1y_2+x_1^2+x_2^2=4c^2$$

als die gesuchte Beziehung zwischen den 2 Brennstrahlen, welche sich auch noch auf die Cassinischen Linien erweitern lässt.

Ferner leiten wir für die Gerade eine Gleichung ab, deren Unbekannte $\cos 2\varphi = \frac{r^2}{a^2}$ ist. Man findet

$$\cos 2\varphi^4 - 2\cos 2\tau \cos 2\varphi^3 + \cos 2\tau \cos 2\varphi^2 - 2\sin \tau^2 \cos 2\varphi + \sin \tau^4 = 0$$

welche die Eigenschaft besitzt, dass sie die Gleichung der Wurzelquadrate für

$$r^4 - 2a\cos\tau r^3 + a^2 r^2 - a^4 \sin\tau^2 = 0$$

ist, sodass auch hier eine Formel

$$69) \qquad \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_4} = 0$$

auftritt, deren r_4 als kleinster Wert negativ zu nehmen ist.

Diese Ableitung ist nur ein specieller Fall einer allgemeinern, welche wir nachher geben.

Man kann zur Ableitung neuer Relationen sich auch der Methode der Differentiation bedienen, die sich für die Gerade durch den Brennpunkt besonders empfiehlt.

Wir wollen sie kurz an einem allgemeinern Fall skizziren.

Aus der Secantengleichung folgt

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4R\cos\delta$$

Wir nehmen $R(\alpha)$ als fest, die x nebst δ veränderlich an, so dass aus der Relation

$$\Sigma\, dx = -4R\sin\delta\, d\delta \quad \text{folgt.}$$

Indem wir nun die beiden einander unendlich nahen Secanten betrachten, deren Winkel $d\delta$ ist, so ergibt sich aus dem unendlich kleinen rechtwinkligen Dreieck an der Lemniskate, dass

$$dx = x\, d\delta \cot\mathfrak{f}$$

sein wird, worin $\mathfrak{f}$ den Winkel zwischen der Tangente des Lemniskatenpunktes und der Secanten bedeutet, daher folgt auch

$$\Sigma x \cot\mathfrak{f} = -4R\sin\delta$$

In dieser Hinsicht kann man auch das von δ unabhängige Product $x_1 x_4 x_3 x_4$ logarithmisch differentiiren.

Man findet

$$\cot f_1 \cot f_2 \cot f_3 \cot f_4 = 0$$

u. a. m.

§ 7.

Wir ziehen durch den Mittelpunkt der Lemniskate einen Durchmesser $2r'$ und verbinden seine Endpunkte mit einem Peripheriepunkte $r(\varphi)$ durch Sehnen, welche einen Winkel $180^0 - S$ mit einander einschliessen. Dann ist allgemein

$$\operatorname{tg} S = \frac{2rr' \sin(\varphi - \varphi')}{r'^2 - r^2}$$

$$= \frac{2\sqrt{\cos 2\varphi \cos 2\varphi_1}\sin(\varphi - \varphi_1)}{\cos 2\varphi - \cos 2\varphi_1}$$

70)

$$\operatorname{tg} S = \frac{\sqrt{\cos 2\varphi \cos 2\varphi_1}}{\sin(\varphi + \varphi_1)}$$

$$\cos S = \frac{\sin(\varphi + \varphi')}{\cos(\varphi - \varphi')}$$

Wir müssen uns nun auf die Formeln in § 12. unserer Abhandlung über die trigonometrische Auflösung biquadratischer Gleichungen beziehen und schreiben der Vollständigkeit wegen noch die bez. Gleichungen nieder:

$$\sin 2\varphi^4 - 2\sin 2\tau . \sin 2\varphi^3 - \left(\cos 2\tau + \frac{4h^2}{a^2}\cos 2\tau\right)\sin 2\varphi^2$$

$$+ 2\sin 2\tau . \sin 2\varphi + \frac{h^2}{c^4} + \frac{2h^2}{c^2}\sin 2\tau - \sin 2\tau^2 = 0$$

71)

$$\cos 2\varphi^4 - 2\cos 2\tau \cos 2\varphi^3 + \left(\cos 2\tau^2 + \frac{4h^2}{a^2}\cos 2\tau\right)\cos 2\varphi^2 - \frac{2h^2}{c^2}\cos 2\varphi$$

$$+ \frac{h^4}{c^4} = 0$$

die aus der Gleichung für $\operatorname{tg}\varphi$ hervorgehen.

Wir fanden am genannten Ort die Relation

72)

$$\frac{\sin(\varphi_1 + \varphi_2)}{\cos(\varphi_1 - \varphi_2)} = -\frac{\sin(\varphi_3 + \varphi_4)}{\cos(\varphi_3 - \varphi_4)}$$

die uns gleich von Nutzen sein wird.

Aus der Formel für $\cos S$ folgt

$$\operatorname{tg}\varphi' = \frac{\operatorname{tg}\varphi - \cos S}{\operatorname{tg}\varphi \cos S - 1}$$

Da nun

$$\frac{r'}{r} = \frac{\sin(\varphi - \varphi' + A)}{\sin A}$$

wo A der Winkel zwischen der Sehne von rr_1 und r' ist, so folgt

$$\operatorname{tg} S = \frac{2\sin A \sin(\varphi - \varphi' + A)}{\sin(\varphi - \varphi' + 2A)}$$

woraus

$$\cos A + \sin A \cot(\varphi - \varphi' + A) = 2\sin A \cot S$$

Da ferner

$$\frac{r^2}{r'^2} = \sin A^2 + \sin A^2 \cot(\varphi - \varphi' + A)^2$$

so kann $\varphi - \varphi' + A$ aus den letzten Gleichungen eliminirt werden, wodurch man erhält

$$\frac{\cos 2\varphi}{\cos 2\varphi'} = 1 - 2\sin 2A \cot S + 4\sin A^2 \cot S^2$$

oder da

$$\cos 2\varphi' = \frac{1 - \operatorname{tg}\varphi'^2}{1 + \operatorname{tg}\varphi_1^2}$$

und $\operatorname{tg}\varphi'$ bekannt ist, so führt das Schlussresultat auf die Formel

73) $$A - B = 90^0 - 2\varphi$$

worin B den andern Winkel an der Basis $2r'$ des Lemniskatendreiecks bedeutet. Für einen zweiten Punkt erhält man

$$A' - B' = 90^0 - 2\varphi'$$

Aus der Subtraction resultirt der Satz:

Der Centriwinkel ist gleich der halben Summe der Peripheriowinkel nach den Endpunkten eines Durchmessers.

Eine Verallgemeinerung dieses Satzes haben wir für die Cassinischen Curven schon früher nachgewiesen. S. Geom. Unters. etc.

Da

$$\cos S = \cos(A + B) = \frac{\cos(\varphi + \varphi')}{\cos(\varphi - \varphi')}$$

ist und auch

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\operatorname{tg}\varphi - \cos S}{\operatorname{tg}\varphi' \cos S - 1}$$

$$\varphi = \tfrac{1}{2}(90^0 - A + B) = \tfrac{1}{2}(90^0 - S + 2B)$$

so gewinnen wir eine Gleichung für $\operatorname{tg}\frac{1}{2}S$, nämlich

74) $$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}S^3+\cot B\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}S^2-\frac{1-\operatorname{tg}\varphi'}{1+\operatorname{tg}\varphi'}\cot B\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}S+\frac{1-\operatorname{tg}\varphi_1}{1+\operatorname{tg}\varphi_1}=0$$

woraus nach bekanter Methode

75) $$S_1+S_2+S_3=90^0+2B-2\varphi'$$

Hieraus folgt:

Zieht man von einem Punkte B' der Lemniskate einen mit der Achse den Winkel φ' einschliessenden Durchmesser $2r'=B'A$ und noch eine Secante $B'S_3S_2S_1$, welche mit r' den Winkel B einschliesst, und verbindet die 3 Schnittpunkte $S_1S_2S_3$ mit A durch Sehnen, wodurch entsprechende Winkel $S_1S_2S_3$ entstehen, so ist die Summe dieser Winkel gleich $90^0+2B-2\varphi'$.

Nun ist aber (a. a. O.)

$$\cos\delta\sin(\sigma-\sigma')=\sin\sigma$$

$$\sigma+\sigma'=2\tau+360^0$$

75)

$$\frac{\sin\sigma}{\cos\delta}=\sin(\sigma-\sigma')$$

oder

$$\frac{\sin(\varphi_1+\varphi_2)}{\cos(\varphi_1-\varphi_2)}=\sin 2(\sigma-\tau)$$

Daher folgt bei Berücksichtigung der Vorzeichen

76) $$2(\varphi_1+\varphi_2)-2\tau=90^0+S$$

Diese Relation gilt für jedes Lemniskatendreieck, von welchem 2 Seiten durch $r_1(\varphi_1)$, $r_2(\varphi_2)$, ihr Winkel durch $\varphi_2-\varphi_1$ bezeichnet sind. Ihre Mittellinie nach der 3. Seite schliesst mit dieser den Winkel S ein, und diese Seite hat gegen die Achse die Neigung τ. Aus dieser Formel lassen sich manche Folgerungen ziehen, z. B., wenn das Dreieck ein rechtwinkliges wird, und führen auf Sätze, welche wir schon früher in den „Eigenschaften der Lemniskate" entwickelt haben.

Haben allgemein in dem Dreieck $AB'S$ die Seiten AS und SB' die Neigungswinkel τ bez. τ' gegen die Achse, so besteht die Relation

$$\sin 2(\sigma-\tau)=\sin 2(\sigma-\tau')=\frac{\sin(\varphi+\varphi')}{\cos(\varphi-\varphi_1)}$$

woraus folgt

77) $$\sigma=45^0+\frac{\tau+\tau'}{2}=\varphi_1+\varphi_2$$

woraus eine interessante Beziehung $\tau=-\tau'$ folgt, wenn

$$\varphi_1+\varphi_2=45^0 \text{ ist.}$$

§ 8.

Die Lemniskate und der Kreis.

Wie schon aus der Geometrie der Geraden geschlossen werden kann, wird die Verbindung von Lemniskate und Kreis nicht weniger reich sein an bemerkenswerten Sätzen und Gleichungen, womit wir uns im folgenden beschäftigen wollen.

Aus der Formel

$$\frac{\sin(\varphi_1+\varphi_2)}{\cos(\varphi_1-\varphi_2)} = -\frac{\sin(\varphi_3+\varphi_4)}{\cos(\varphi_3-\varphi_4)}$$

folgt noch nach 70)

$$\cos S = -\cos S'$$

78)

$$S+S' = 180^0$$

woraus ein schon früher abgeleiteter Satz von neuem bewahrheitet wird, nämlich:

Die Mitten correspondirender Sehnen sind vom Mittelpunkt der Lemniskate gleich weit entfernt.

Infolge der Sinusgleichung

$$\sin 2\varphi^4 - A\sin 2\varphi^3 + B\sin 2\varphi^2 + A\sin 2\varphi + D = 0$$

erhält man

$$\Sigma_1^4 \sin 2\varphi + \Sigma_1^4 \sin 2\varphi \sin 2\varphi \sin 2\varphi$$

woraus

$$\frac{1+\sin 2\varphi_1 \sin 2\varphi_2}{1+\sin 2\varphi_3 \sin 2\varphi_4} = \frac{\sin(\varphi_1+\varphi_2)^2}{\sin(\varphi_3+\varphi_4)^2}$$

Aus diesem Ausdruck folgt nach etlichen Umformungen

$$\frac{\cos 2\varphi_1 \cos 2\varphi_2}{\cos 2\varphi_3 \cos 2\varphi_4} = \frac{\cos(\varphi_1-\varphi_2)^2}{\cos(\varphi_3-\varphi_4)^2} = \frac{\sin(\varphi_1+\varphi_2)^2}{\sin(\varphi_3+\varphi_4)^2}$$

Ferner ist

$$\cos 2\varphi_1 \cos 2\varphi_2 \cos 2\varphi_3 \cos 2\varphi_4 = D' = \frac{h^4}{c^4}$$

also

$$\cos 2\varphi_1 \cos 2\varphi_2 = \frac{D'}{\cos 2\varphi_3 \cos 2\varphi_4}$$

Führt man hierin für $\cos 2\varphi_3 \cos 2\varphi_4$ den vorhin gefundenen Wert ein, so folgt

$$\cos 2\varphi_1 \cos 2\varphi_2 = \frac{h^2}{c^2}\frac{\cos\delta}{\cos\delta'} = -\frac{h^2}{c^2}\frac{\sin\sigma}{\sin\sigma'}$$

Wir legen nun durch 2 Schnittpunkte der Geraden und den Mittelpunkt der Lemniskate einen Kreis vom Radius ϱ und benutzen die bekannte Kreisrelation $r_1 r_2 = 2h\varrho$, wo h die Höhe vom Mittelpunkt der Lemniskate auf die Sehne s ist.

Bemerken wir, dass

$$\cos 2\varpi_1 \cos 2\varpi_2 = \frac{r_1^2 r_2^2}{c^4}$$

ist, so folgt aus Obigem

79) $$\frac{c^2}{\varrho^2} = \frac{\cos \delta'}{\cos \delta} = -\frac{\sin \varepsilon}{\sin \varepsilon}$$

Für die beiden andern Schnittpunkte besteht die analoge

$$\frac{c^2}{\varrho^2} = \frac{\cos \delta}{\cos \delta'}$$

und ihr Product führt auf

80) $$\varrho\varrho' = c^2$$

oder das Product der Radien der beiden Kreise, welche durch entsprechende Punkte der Geraden hindurchgehen und den Mittelpunkt der Curve enthalten, ist constant.

Aus

$$\frac{\cos 2\varpi_1 \cos 2\varpi_2}{\cos (\varpi_1 - \varpi_2)^2} = \frac{\cos 2\varpi_3 \cos 2\varpi_4}{\cos (\varpi_3 - \varpi_4)^2}$$

folgt

$$\frac{r_1 r_2}{\cos \delta} = \frac{r_3 r_4}{\cos \delta'} \quad \text{oder} \quad \frac{2h\varrho}{\cos \delta} = \frac{2h\varrho}{\cos \delta'}$$

also

$$\frac{\varrho}{\cos \delta} = \frac{s}{\cos \varepsilon}$$

und, da noch

$$s = 2\varrho \sin \delta, \quad r = 2s \sin \delta$$

auch

81) $$\frac{s}{r} = \frac{\sin 2\delta}{\sin 2\delta}$$

Wir wollen noch die Lage beider zugehörigen Kreise untersuchen und stellen zu dem Ende die allgemeinen Gleichungen für Lemniskate und Kreis auf. Das Centrum des letztern habe die Coordinaten $R(\alpha)$. Der Radius sei s, die Polarwinkel φ.

Man findet

$$\operatorname{tg}\varphi^4 ((R^2 - s^2 - c^2)^2 - 4R^2 c^2 \sin \alpha^2 - 4R^2 c^2 \cos \alpha^2)\varphi^2$$
$$+ (2(R^2 - s^2) - 2c^4 - 4R^2 c^2 \cos 2\alpha)\operatorname{tg}\varphi^2 - 4R^2 c^2 \sin 2\alpha \operatorname{tg}\varphi$$
$$+ (R^2 - s^2 + c^2)^2 - 4R^2 c^2 \cos \alpha^2 = 0$$

und man bemerke, dass bis auf das Vorzeichen die Coefficienten von $\operatorname{tg}\varphi^3$ und $\operatorname{tg}\varphi$ übereinstimmen.

$$\cos 2\varphi^4 (R^4 - 2c^2 R^2 \cos 2\alpha + c^4) - 2s^2 (c^2 - R^2 \cos 2\alpha) \cos 2\varphi^3$$
$$+ \left(\left(\frac{R^2 - s^2}{a}\right)^2 (c^2 - R^2 \cos 2\alpha) + s^4 - R^4 \sin 2\alpha^2\right) \cos 2\varphi^2$$
$$- s^2 \left(\frac{R^2 - s^2}{a}\right)^2 \cos 2\varphi + \tfrac{1}{4}\left(\frac{R^2 - s^2}{a}\right)^4 = 0$$

83)

$$\sin 2\varphi^4 (R^4 - 2c^2 R^2 \cos 2\alpha + c^4) + 2R^2 s^2 \sin 2\alpha \sin 2\varphi^3$$
$$+ \sin 2\varphi^2 ((2c^2 - R^2 \cos 2\alpha + \left(\frac{R^2 - s^2}{a}\right)^2)(R^2 \cos 2\alpha - c^2)$$
$$+ s^4 - R^4 \sin 2\alpha^2) - 2R^2 s^2 \sin 2\alpha \sin 2\varphi$$
$$+ (\tfrac{1}{2}\left(\frac{R^2 - s^2}{a}\right)^2 + c^2 - R^2 \cos 2\alpha)^2 - s^4 = 0$$

und auch in der letzten Gleichung ist der Coefficient von $\sin 2\varphi^3$ gleich dem von $\sin 2\varphi$.

Daher lassen sich die in der genannten Abhandlung über die Trigonometr. Aufl. biquadr. Gl. mitgeteilten Gleichungssysteme direct in einfachster Art verwenden. So findet man

$$\operatorname{tg}(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4) = -\frac{R^2 \sin 2\alpha}{c^2 - R^2 \cos 2\alpha}$$

$$R^2 \sin 2\alpha = -q^2 \sin U$$
$$c^2 - R^2 \cos 2\alpha = q^2 \cos U$$

84)

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 = U$$
$$q^4 = R^4 - 2c^2 R^2 \cos 2\alpha + c^4$$
$$q^2 = -\frac{R^2}{\cos \delta}$$
$$R^2 \sin(U - 2\alpha) = c^2 \sin U$$
$$\cos\delta \sin(2\sigma - U) = \frac{s^2}{q^2} \sin\sigma \quad \text{etc.}$$

und die Resolvente

85) $$\cos\omega^3 - \left(\cos U + \frac{(R^2 - s^2)^2}{a^2 q^2}\right) \cos\omega^2 + \left(\frac{s^4}{q^4} - 1\right) \cos\omega$$
$$- \left(\frac{s^4}{q^4} - 1\right) \cos U + \frac{(R^2 - s^2)^2}{a^2 q^2} = 0$$

$$\omega_1 = \varphi_1 + \varphi_2 - \varphi_3 - \varphi_4$$
$$\omega_2 = \varphi_1 - \varphi_2 + \varphi_3 - \varphi_4$$
$$\omega_3 = \varphi_1 - \varphi_2 - \varphi_3 + \varphi_4$$

Um nun zu den beiden Kreisen zurückzukehren, machen wir von der Formel

$$R^2 \sin(U - 2\alpha) = c^2 \sin U$$

Gebrauch.

Da beide Kreise durch 0 hindurchgehen, so geht sie in

$$\sin(\sigma - 2\alpha) = \frac{c^2}{\varrho^2} \sin\sigma$$

über. Wir fanden aber schon oben die Formel

$$\frac{\sin\sigma'}{\sin\sigma} = \frac{c^2}{\varrho^2}$$

Demnach ist

$$\sin(\sigma - 2\alpha) = \sin\sigma'$$

woraus wegen

$$\sigma + \sigma' = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 = 360^0 + 2\tau$$

für den einen Kreis

$$\sigma - 2\alpha = 180^0 - \sigma + 2\tau$$

oder

$$\tau + \alpha + 90^0 = \sigma$$

und

$$\tau + \alpha' + 90^0 = \sigma'$$

für den andern.

Anhang.

Die geometrische Construction der Wurzeln der Gleichungen 4. Grades vermittelst der Cassinischen Linie.

Von einem Punkte $R\varphi$ ziehen wir eine Secante durch die Cassinische Linie, welche mit R den Winkel δ einschliesst und bezeichnen ihre durch die Curve gebildeten Teile mit $x_1 x_2 x_3 x_4$. Sie sind Wurzeln der folgenden Gleichung

$$x^4 - 4R\cos\delta\, x^3 + (2R^2 + 4R^2\cos\delta^2 - 2c^2\cos 2(\varphi - \delta))x$$
$$- 4(R^3\cos\delta - c^2 R\cos(2\varphi - \delta))x + R^4 - 2c^2 R^2\cos 2\varphi + c^4 - q^4 = 0$$

Man kann dieselbe zur geometrischen Auflösung der biquadratischen Gleichung

$$x^4 - Ax^3 + Bx^2 - Cx + D = 0$$

verwerten, was wir zeigen wollen.

Die Identität beider ist an die folgenden Relationen geknüpft:

$$A = 4R\cos\delta$$
$$B = 2R^2 + 4R^2\cos\delta^2 - 2c^2\cos 2(\varphi - \delta)$$
$$C = 4R^3\cos\delta - 4c^2 R\cos(2\varphi - \delta)$$
$$D = R^4 - 2c^2R^2\cos 2\varphi + c^4 - q^4$$

Aus diesen ist c, q, R, φ, δ durch $ABCD$ auszudrücken, wobei also eine dieser Grössen willkürlich genommen werden kann. Wir bilden die kubische Variante und die quadratische Invariante der biquadratischen Gleichung und erhalten

$$A^3 - 4AB + 8C = 32c^2R\sin\delta\sin 2(\varphi - \delta)$$
$$B^2 - 3AC + 12D = (6R^2 - B)^2 + 12(c^4 - q^4)$$

Vermöge der Relationen von A und D kann man δ und 2φ eliminiren, und das Resultat ist

$$(A^3 - 4AB + 8C)^2 = (16R^2 - A^2)(64c^4 - (A^2 - 4B)^2 - 16R^2(A^2 - 4B) - 64R^4)$$

woraus für R^2 die kubische Gleichung folgt:

$$64R^6 + 4(3A^2 - 16B)R^4 - 4(A^2B - 4B^2 + 16c^4)R^2 + 4A^2c^4 + A^3C - 4ABC + 4C^2 = 0$$

Ferner folgt aus den 4 Hauptgleichungen

$$3R^4 - 2R^2 + \tfrac{1}{4}AC - D + c^4 - q^4 = 0$$

und da

$$D + q^4 - c^4 = R^4 - 2c^2R^2\cos 2\varphi$$

ist, so folgt auch

$$R^4 - \frac{B}{2}R^2 + c^2R^2\cos 2\varphi + \tfrac{1}{8}AC = 0$$

Man bemerke, dass man aus den Gleichungen für R^2 diesen Ausdruck eliminiren kann, wodurch man eine Beziehung zwischen den die Curve bestimmenden Grössen c und q erhält.

Dadurch, dass eine Grösse c oder q willkürlich bleibt, ist eine grosse Verschiedenheit der Curven möglich, die es gestattet, die für die Construction bequemste auszuwählen.

Den Winkel δ erhält man aus

$$\cos\delta = \frac{A}{4R}$$

ferner ist

$$q^4 = 3R^4 - BR^2 + \tfrac{1}{4}AC - D + c^4$$

und endlich

$$\cos 2\varphi = \frac{R^4 - D + c^4 - q^4}{2c^2R^2}$$

Man kann übrigens die Auflösung der kubischen Gleichung umgehen, da es einerlei ist, R als Function von c oder c als Function von R anzusehen. Doch wollen wir versuchsweise auf die Gleichung

$$x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24 = 0$$

die kubische Gleichung anwenden. Sie ist

$$R^6 - \frac{65}{4}R^4 + \left(\frac{175}{2} - c^4\right)R^2 - \frac{25}{4}(25 - c^4) = 0$$

Wählen wir z. B. $c = 2$, so wird sie zu

$$R^6 - \frac{65}{4}R^4 + \frac{143}{2}R^2 - \frac{225}{4} = 0$$

und ihre Wurzeln sind $R_1 = 1$, $R_2 = \frac{5}{2}$, $R_3 = 3$. Die erste Wurzel ist unbrauchbar. Die 2te liefert $q^4 = \frac{247}{16}$, $\cos\delta = 1$, $\cos 2\varphi = \frac{5}{16}$ wonach die Curve aus 2 Ovalen besteht. Da $\delta = 0$ ist, so geht die Secante durch das Centrum, und die Schnittpunkte begrenzen die Strecken 1, 2, 3, 4. Die 3. Wurzel liefert $q^4 = 45$, $\cos\delta = \frac{5}{9}$ und es ist $\varphi = \delta$. Die Secante läuft also jetzt der X-Achse parallel und schneidet die aus einem geschlossenen Ganzen bestehende Curve in Strecken, welche wieder die Wurzeln 1, 2, 3, 4 bestimmen.

Man kann übrigens auch in der obigen Gleichung für R^2 das Absolutglied verschwinden lassen, was in dem angeführten Beispiel für $c^2 = 5$ eintritt. Aus der Gleichung

$$R^4 - \frac{65}{4}R^2 + \frac{125}{2} = 0$$

folgen dann die Wurzeln $R_1^2 = 10$, $R_2^2 = \frac{25}{4}$. Damit sind verbunden im ersten Fall $q^4 = 76$, $\cos\delta = \sqrt{\frac{5}{8}}$, $\cos 2\varphi = \frac{1}{4}$, also $\varphi = \delta$, wonach die Curve ein Ganzes bildet; und im 2. Fall $q^4 = \frac{391}{16}$, $\cos 2\varphi = \frac{1}{4}$, $\delta = 0$, wonach die Curve aus 2 Ovalen besteht Im übrigen sind also die Verhältnisse wie früher.

Das durchgeführte Beispiel lässt erkennen, dass die Cassinische Linie den Curven zugezählt werden kann, welche eine geometrische Construction der Wurzeln von Gleichungen 4. Grades ermöglichen.

Wie schon gesagt, ist es nicht gerade notwendig, eine kubische Gleichung zu diesem Zwecke aufzulösen, denn wir können den Formelapparat auch in folgender Art aufstellen:

$$R^2 = \tfrac{1}{6}B + \tfrac{1}{6}\sqrt{B^2 - 3AC + 12D - 12(c^4 - q^4)}$$

$$c^4 = \frac{1}{64}\frac{(A^3 - 4AB + 8C)^2}{16R^2 - A^2} + \frac{1}{64}(A^2 - 4B + 8R^2)^2$$

$$\cos 2\varphi = \frac{R^4 - D + c^5 - q^4}{2c^2 R^2}$$

$$\cos\delta = \frac{A}{4R}$$

In der ersten Gleichung kann man über $c^4 - q^4$ so disponiren, dass der Wurzelausdruck ein vollständiges Quadrat wird, wobei man allerdings $c^4 - q^4$ so zu wählen hat, dass φ oder δ nicht unmöglich wird. Diese Differenr steht, wie man sieht, in Wechselbeziehung zur quadratischen Invariante

$$J = 12(B^2 - 3AC + 12D)$$

Ist $c = q$, so wird die Curve zur Lemniskate, welche aber ein specielles Interesse hat.

Benutzen wir wieder die Gleichung

$$x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24 = 0$$

so ist jetzt

$$R^2 = \frac{35}{6} + \frac{1}{6}\sqrt{13 + 12(q^4 - c^4)}$$

Wählen wir $q^4 - c^4 = 3$, so ist $R^2 = 7$, $c^2 = 2$, $q^4 = 7$ $\cos 2\varphi = \frac{11}{14}$, $\varphi = \delta$. Setzen wir dagegen $c^4 - q^4$, so folgt $R^2 = \frac{19}{3}$, $c^2 = \frac{4}{3}$, $q^4 = \frac{13}{9}$, $\cos 2\varphi = \frac{37}{38}$, $\varphi = \delta$, u. s. w. Aus allen Fällen dieser Art folgen die Wurzen 1, 2, 3, 4. Aus diesen Ableitungen erhellt zur Genüge, in wie weiten Grenzen die Cassinische Linie den gestellten Bedingungen genügt.

Ausserdem umfasst sie alle Fälle. Um dies nachzuweisen, wollen wir eine Gleichung 4. Grades mit 3 gleichen Wurzeln voraussetzen. Bekanntlich erscheint dann die biquadratische Invariante J.

Es sei $x^4 - 5x^3 + 9x^2 - 7x + 2 = 0$, $x_1 = x_2 = x_3 = 1$, $x_4 = 2$ Ist etwa $q^4 - c^4 = \frac{3}{4}$, so wird $R^2 = 2$, $c^4 = \frac{11}{28}$, $q^4 = \frac{8}{7}$, $\cos 2\varphi = \frac{5}{8}\sqrt{\frac{7}{11}}$, $\cos\delta = \frac{5}{8}\sqrt{2}$. Alle diese Werte sind reell. Demnach schneidet die Curve von der Secante 3 gleiche Strecken $= 1$ ab.

was nur dann möglich ist, wenn die Secante zu einer Tangente in einem Wendepunkt wird.

Selbst der Fall mit 4 gleichen Wurzeln ist durch diese Curve lösbar. Legt man z. B. die Gleichung

$$x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1 = 0$$

zu Grunde, so hat man $R^2 = 1 + \sqrt{\frac{1}{3}(q^4 - c^4)}$, ferner ist $c^2 = R^2 - 1$, also $2c^2 = q^2$ oder $c = \frac{q}{\sqrt{2}}$.

Bekanntlich hat die Cassinische Linie eine der Ellipse ähnliche Gestalt, wenn $c < \frac{q}{\sqrt{2}}$ und eine eingedrückte Form, wenn $c < \frac{q}{\sqrt{2}}$. Im Uebergangsfall werden also, wenn die Secante zur Tangente ein Scheitelpunkt der kleinen Achse wird, die 4 Schnittpunkte der erstern zum Berührungspunkt der letztern zusammenfallen, woraus die Gleichheit aller Wurzeln resultirt.

Der letzte Fall $c = \frac{q}{\sqrt{2}}$ hat noch ein weiteres Interesse.

Ziehen wir nämlich von einem Punkte der y-Achse der allgemeinen Curve eine Tangente an sie und bezeichnen den entsprechenden Focalwinkel des Berührungspunktes mit Θ, mit n die y-Ordinate, so erhält man nach einigen Entwickelungen die Gleichung

$$q^2 - c^2) \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\Theta^4 - \frac{n}{c}(2c^2 - q^2) \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\Theta^3 - \frac{n}{c}(2c^2 + q^2) \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\Theta + c^2 + q^2 = 0$$

welche für $2c^2 = q^2$ übergeht in

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\Theta^4 - 4 \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\Theta + 3 = 0$$

woraus hervorgeht, dass Gleichungen von der Form

$$x^4 - p10 + 3 = 0$$

mit einer bestimmten Cassinischen Linie in Beziehung gebracht werden können.

XIX.

Ueber eine besondere Art von Reihen.

Von

Franz Rogel.

Wenn $f(x) = a_1x + a_2x^2 + \ldots a_nx^n + \ldots$ eine convergente Potenzreihe ist, und $a_n = \varphi(n)$, so kann von derselben eine neue durch Entwicklung von $\sum_1^\infty f(x^n)$ nach steigenden Potenzen von x entstehende Potenzreihe abgeleitet werden. Es ist nämlich:

$$\begin{aligned}
f(x) &= a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \ldots \\
f(x^2) &= \quad a_1x^2 \quad\quad + a_2x^4 + \ldots \\
f(x^3) &= \quad\quad\quad a_1x^3 \quad\quad + \ldots \\
f(x^4) &= \quad\quad\quad\quad\quad a_1x^4 + \ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

und d. h. Summirung:

$$\sum_1^\infty f(x^n) = a_1x + (a_1 + a_2)x^2 + (a_1 + a_3)x^3 + (a_1 + a_2 + a_4)x^4 + \ldots$$

Jeder Coefficient c_n ist die Summe von Functionen $\Sigma\varphi(d)$, in welchen d alle Divisoren des zugehörigen Exponenten n zu durchlaufen hat; so ist

$$c_4 = \Sigma\varphi(d) = \varphi(1) + \varphi(2) + \varphi(4) = a_1 + a_2 + a_4.$$

Es besteht somit jeder Coefficient c_n aus so vielen Gliedern, als der Index n Divisoren d besitzt.

Aus der Convergenz der Potenzreihe für $f(x)$ folgt nicht unmittelbar jene der abgeleiteten Reihe; letztere wird bezüglich ihres Convergenzbereiches speciell untersucht werden müssen.

Liegt der Ableitung die Maclaurin'sche Reihe zu Grunde, so ist das allgemeine Glied der neuen Reihe offenbar

$$c_n x^2 = \sum_d \frac{f^{(d)}(0)}{d!} \cdot x^n$$

wo für d sämtliche Divisoren von n der Reihe nach (die Einheit und n inbegriffen) zu setzen sind.

Eine Repräsentantur dieser Art Reihen, deren Coefficienten also zahlentheoretische Functionen des Index sind, ist die berühmte Lambert'sche Reihe, welche aus der geometrischen Reihe hervorgeht.

Andere, durch ihre Summirbarkeit sich auszeichnende Reihen wären folgende:

1. Wenn

$$f(x) = \log\frac{1}{1-x} = \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots \quad (-1 < x < +1)$$

als Stammreihe gewählt wird, so ist

$$\sum_1^\infty \left(\log\frac{1}{1-x^n}\right) = x + (1+\tfrac{1}{2})x^2 + (1+\tfrac{1}{3})y^3 + (1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4})x^4 + (1+\tfrac{1}{5})x^5 + (1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{6})x^6 + \ldots$$

die abgeleitete, für jedes $x \begin{matrix} > -1 \\ < +1 \end{matrix}$ convergente Reihe. Jeder Coefficient c_n ist hier die Summe sämtlicher reciproker Divisoren d des Index n, nämlich

$$c_n = \sum\left(\frac{1}{d}\right)$$

Sind a, b, c die sämtlichen, in $n = a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots$ aufgehenden Primzahlen, so besteht dann jeder Coefficient c_n aus $(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)\ldots$ Gliedern; ist n selbst eine Primzahl, so ist die Glieder-Anzahl $= 2$ und $c_n = 1 + \frac{1}{n}$.

Für unendlich grosse Primzahlen nimmt c_n den Wert $= 1$ an. Wenn dagegen n eine unendlich grosse Potenz einer Primzahl p ist, also $n = p^\infty$, so ist der Coefficient

$$c_n = 1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \ldots = \frac{p}{p-1}$$

Besonderer Erwähnung verdient der Fall, in welchem n das Product unendlich hoher Potenzen von unendlich vielen unmittelbar aufeinander folgenden Primzahlen $2.3.5.7.11 \ldots$ ist, denn hier ist dann

$$c_n = 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} + \ldots$$

gleich der harmonischen Reihe 1ter Ordnung, für welche die Beziehung gilt:

$$\lim \left\{ \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}\right) - \log n \right\} = K (= 0{\cdot}57\,721 \ldots)$$

beiderseits mit x^n multiplicirt, kommt

$$\lim \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots \frac{1}{n}\right) x^n - \lim (x^n . \log n) = \lim K . x^n$$

da nun

$$\lim (x^n \log n)_{n=\infty} = -\left\{ \frac{x^n}{n \log x} \right\}_{n=\infty} = x^n\}_{n=\infty} = 0 \{-1 < x < +1\}$$

und $\lim Kx^n$ ebenfalls $= 0$ ist, so ist auch

$$c_n x^n = \lim \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots \frac{1}{n}\right) x^n = 0$$

was zwar nur eine Folge der Convergenz dieser Reihe ist, wegen den schwankenden Werten der Coefficienten aber besonderer Erwähnung verdient.

Werden die sämtlichen c_n betrachtet, welche den zwischen zweien unmittelbar aufeinander folgenden Primzahlen p und $p' > p$ liegenden Zahlen entsprechen, so leuchtet ein, das c_p und $c_{p'}$ kleiner sein werden als alle c_n, wenn n zwischen p und p' liegt und kleiner als c_{p-1} und $c_{p'+1}$, weil $p-1$ und $p'+1$ gerade Zahlen sind, somit $\frac{1}{2}$ in c_{p-1} und $c_{p'+1}$ als Summand enthalten sein muss.

Die Coefficienten c_p sind daher Minima, wenn p Primzahl ist; zwischen diesen Minimalwerten, deren grösster $c_2 = 1 + \frac{1}{2}$ ist und welche selbst eine beständig abnehmende Reihe bilden, schwanken — oscilliren die übrigen Werte c_n. Die Schwankungen werden mit zunehmenden n immer grösser.

Eine bemerkenswerte Umwandlung erfährt diese Reihe, wenn sie nach den Gliedern der harmonischen Reihe $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ ... geordnet wird; es ist dann:

$$R(x) = \sum_1^\infty \log \frac{1}{1-x^n} = x + (1+\tfrac{1}{2})x^2 + (1+\tfrac{1}{2})x^3 + (1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4})x^4 + \ldots$$

$$= \frac{x}{1-x} + \tfrac{1}{2}\frac{x^2}{1-x^2} + \tfrac{1}{3}\frac{x^3}{1-x^3} + \ldots + \frac{1}{n}\frac{x^2}{1-x^n} + \ldots$$

$$= \sum_1^\infty \frac{1}{n}\frac{x^n}{1-x^n} \quad (-1 < x < 1)$$

Ferner ist

$$R(x) = \sum_1^\infty \log \frac{1}{1-x^n} = -\log \prod_1^\infty (1-x^n);$$

die Factorenfolge nach Unionen, Amben, Ternen etc. der als Exponenten von x fungirenden ganzen Zahlen entwickelt, giebt:

$$\prod_1^\infty (1-x^n) = (1-x^1)(1-x^2)(1-x^3)\ldots = 1 - \Sigma x^n + \Sigma x^m.x^n - \Sigma x^m.x^n.x^p + \ldots$$

$$= 1 - \frac{x}{1-x} + \frac{x}{1-x}\cdot\frac{x^2}{1-x^2} - \frac{x}{1-x}\cdot\frac{x^2}{1-x^2}\cdot\frac{x^3}{1-x^3} + \ldots$$

daher

$$R(x) = -\log\left\{\Sigma\left[(-1)^n \prod_1^n \left(\frac{x^r}{1-x^r}\right)\right]\right\}$$

Nach Euler (Introd in Anal. inf. I. 16) wird jede Potenz x^n in $\prod_1^\infty \frac{1}{1-x^n}$ so oft hervorgebracht, als sich der Exponent n aus den ganzen Zahlen durch Addition hervorbringen lässt; es ist:

$$\prod_1^\infty \frac{1}{1-x^n} = 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 5x^4 + 7x^5 + 11x^6 + \ldots$$

demnach lässt sich der Satz aussprechen:

> „Der natürliche Logarithmus der Reihe, in welcher jeder Coefficient anzeigt, auf wie viel Arten der zugehörige Exponent aus den ganzen Zahlen durch Addition gebildet werden kann, ist eine Reihe, deren Coefficienten die Summen der reciproken Divisoren der correspondirenden Exponenten sind."

Da ferner

$$\Pi(1-x^n) = 1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + + - - \ldots$$

$$= \sum_0^\infty (-1)^n x^{\frac{3n^2 \pm n}{2}}$$

ist, so gilt auch:

$$R(x) = -\log\left\{\Sigma(-1)^n x^{\frac{3n^2 \pm n}{2}}\right\}$$

Werden von $R(x)$ die Glieder mit ungeradem Exponenten zu einer neuen Reihe

$$R'(x) = \tfrac{1}{2}\Sigma\log\left(\frac{1+x^{2\nu+1}}{1-x^{2\nu+1}}\right)$$

vereinigt, so lässt sich letztere mit Hülfe der elliptischen Functione summiren.

Es ist nämlich,

$$q = e^{-\pi\frac{K'}{K}}$$

vorausgesetzt,

$$R'(q) = q+(1+\tfrac{1}{3})q^3+(1+\tfrac{1}{5})q^5+(1+\tfrac{1}{7})q^7+(1+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{9})q^9+\ldots$$
$$= \log\left\{\sqrt{\frac{1+q}{1-q}}\cdot\sqrt{\frac{1+q^3}{1-q^3}}\cdot\sqrt{\frac{1+q^7}{1-q^1}}\cdots\right\}$$

ferner

$$k' = \Pi\left(\frac{1-q^{2k-1}}{1+q^{2k-1}}\right)^4$$

(Durège, S. 227 (16)), daher

$$R'(q) = \log\frac{1}{\sqrt{k'}}$$

k' ist der complementäre Modulus $= \frac{\frac{1}{2}-q+q^4-q^9+q^{16}-\ldots}{\frac{1}{2}+q+q^4+q^9+q^{16}+\ldots}$, daher gilt auch:

$$\log\sqrt{\left\{\frac{\frac{1}{2}+q+q^4+q^9+q^{16}+\ldots}{\frac{1}{2}-q+q^4-q^9+q^{16}+\ldots}\right\}} = q+(1+\tfrac{1}{3})q^3+(1+\tfrac{1}{5})q^5$$
$$+(1+\tfrac{1}{7})q^7+(1+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{9})q^9+\ldots$$

Durch letztern Ausdruck wird die Reihe $R'(q)$, in welcher die Coefficienten von den Teilern des zugehörigen Exponenten abhangen, dargestellt durch den Quotienten zweier Potenz-Reihen, deren Exponenten die Quadrate der natürlichen Zahlen sind.

2. Sei

$$\frac{1}{1^n}+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\ldots = S_n$$

so ist das Product $S_{m+n}S_n$ zweier harmonischen Reihen, geordnet

nach den $n$ten Potenzen der reciproken natürlichen Zahlen, auch eine Reihe in welcher z. B das Glied $\frac{1}{a^n}$ den Coefficienten $\Sigma \frac{1}{d^m}$ besitzt, wo d wieder sämtliche Teiler von a zu durchlaufen hat. Denn es ist:

$$S_n = \frac{1}{1^n} + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{6^n} + \cdots$$

$$\frac{S_n}{2^{m+n}} = \frac{1}{2^m \cdot 2^n} + \frac{1}{2^m \cdot 4^n} + \frac{1}{2^m \cdot 6^n} + \cdots$$

$$\frac{S_n}{3^{m+n}} = \frac{1}{3^m \cdot 3^n} + \frac{1}{3^m \cdot 6^n} + \cdots$$

$$\frac{S_n}{4^{m+n}} = \frac{1}{4^m \cdot 4^n} + \cdots$$

$$\frac{S_n}{5^{m+n}} = \frac{1}{5^m \cdot 5^n} + \cdots$$

$$\frac{S_n}{6^{m+n}} = \frac{1}{6^m \cdot 6^n} + \cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

daher

$$S_n\left(\frac{1}{1^{m+n}} + \frac{1}{2^{m+n}} + \frac{1}{3^{m+n}} + \cdots\right) = S_n \cdot S_{m+n} = R_n$$

$$= \frac{1}{1^n} + \frac{\frac{1}{1^m} + \frac{1}{2^m}}{2^n} + \frac{\frac{1}{1^m} + \frac{1}{3^m}}{3^n} + \frac{\frac{1}{1^m} + \frac{1}{2^m} + \frac{1}{4^m}}{4^n} + \frac{\frac{1}{1^m} + \frac{1}{5^m}}{5^n}$$

$$+ \frac{\frac{1}{1^m} + \frac{1}{2^m} + \frac{1}{3^m} + \frac{1}{6^m}}{6^n} + \cdots$$

Die Glieder dieser Reihe sind Functionen $\psi(m)$, welche der Bedingung

$$\psi(m')\,\psi(m'') = \psi(m' \cdot m'')$$

für ganze m genügen; darum lässt sich die Reihe R_n auch in Form eines unendlichen Productes anschreiben; es ist

$$R_n = \prod_2^\infty \left[1 + \frac{1 + \frac{1}{p^m}}{p^n} + \frac{1 + \frac{1}{p^m} + \frac{1}{p^{4m}}}{p^{2n}} + \frac{1 + \frac{1}{p^m} + \frac{1}{p^{2m}} + \frac{1}{p^{3m}}}{p^{3n}} + \cdots\right]$$

unter p Primzahlen verstanden. Die Summe der eingeklammerten Reihe ist

$$= \frac{p^{m+n}}{p^{m+n}-1} \cdot \frac{p^n}{p^n-1}$$

somit ist

$$R_n = \prod_2^\infty \frac{p^{2n+m}}{(p^{m+n}-1(p^n-1)}$$

Bei geraden m und a ist R_n durch die Bernoulli'schen Zahlen ausdrückbar; z. B. ist für $m = 2$, $n = 2$

$$R_2 = \frac{1}{1^2} + \frac{\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}}{2^2} + \frac{\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}}{3^2} + \frac{\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}}{4^2} + \ldots$$

$$= \frac{2B_1\pi^2}{2!} \cdot \frac{2^3 B_3 \pi^4}{4!} = \frac{\pi^6}{540}.$$

Wenn $m = 0$ ist, verwandelt sich R_n in das Quadrat S_n^2 und der Coefficient $\Sigma \frac{1}{d^m} = \Sigma \frac{1}{d^0}$ des Gliedes mit dem Nenner a^n wird gleich der Anzahl der Teiler von a; es ist nämlich

$$S_n^2 = \frac{1}{1^n} + \frac{2}{2^n} + \frac{2}{3^n} + \frac{3}{4^n} + \frac{2}{5^n} + \frac{4}{6^n} + \ldots;$$

es hat z. B. das Glied $\frac{1}{6^n}$ den Zähler 4, weil 6 4 Divisoren: 1. 2. 3. und 6. besitzt. Es treten also hier ganz dieselben Coefficienten wie bei der Lambert'schen Reihe auf. In Form einer unendlichen Factorenfolge geschrieben ist:

$$S_n^2 = \prod_2^\infty \frac{p^{2n}}{(p^n-1)^2} = \frac{2^{2n}}{(2^n-1)^2} \cdot \frac{3^{2n}}{(3^n-1)^2} \cdot \frac{5^{2n}}{(5^n-1)^2} + \ldots$$

3. Bekanntlich ist:

$$x = \frac{1^0}{1} xe^{-x} + \frac{2^2}{2!} x^2 e^{-2x} + \frac{3^2}{3!} x^3 e^{-3x} + \ldots \begin{Bmatrix} x = 0 \\ x < 1 \end{Bmatrix}$$

der Reihe nach x, x^2, x^3, ... für x gesetzt, sämtliche Reihen addirt und nach aufsteigenden Potenzen von x geordnet giebt das Resultat:

$$\frac{x}{1-x} = \frac{1^0}{1} e^{-x} \cdot x + \left(\frac{1^0}{1} e^{-x^2} + \frac{1^1}{2!} e^{-2x}\right) x^2 + \left(\frac{1^0}{1} e^{-x^3} + \frac{3^2}{3!} e^{-3x}\right) x^3$$
$$+ \left(\frac{1^0}{1} e^{-x^4} + \frac{1}{2!} e^{-2x^2} + \frac{4^3}{4!} e^{-4x}\right) x^4 + \left(\frac{1^0}{1} e^{-x^5} + \frac{5^4}{5!} e^{-5x}\right) x^5$$
$$+ \left(\frac{1^0}{1} e^{-x^6} + \frac{2^1}{2!} e^{-2x^3} + \frac{3^2}{3!} e^{-3x^2} + \frac{6^5}{6!} e^{-6x}\right) x^6 + \ldots$$

Der Coefficient irgend eines Gliedes x^n besteht nun wieder aus ebenso vielen Gliedern als n Divisoren besitzt; letztere treten sowol als Coefficienten als auch als Exponenten des selbst als Exponent von e erscheinenden Argumentes x auf, so zwar, dass immer Exponent und Coefficient das constante Produkt $= n$ geben. Die Divisoren von n erscheinen ferner vollzählig als Coefficienten von der Form $\frac{d^{d-1}}{d!}$ der Exponentiellen e. Das allgemeine Glied dieser als Coefficient der Potenz x^n fungirenden endlichen Reihe ist demnach:

$$\frac{d^{d-1}}{d!}\, e^{-dx^{\frac{n}{d}}},$$

wenn d ein Divisor von n ist, und der ganze Coefficient von x^n schreibt sich daher:

$$\sum_1^n \left(\frac{d^{d-1}}{d!}\, e^{-px^{\frac{n}{d}}} \right)$$

wo für d sämtliche Teiler von n zu setzen sind.

Ist n eine Primzahl p, so hat x^p den nur aus 2 Teilen bestehenden Coefficienten

$$\frac{1^0}{1!} e^{-x^p} + \frac{p^{p-1}}{p!} e^{-px}$$

ist hingegen n eine unendlich grosse Potenz einer einzigen Primzahl p, so ist der Coefficient von x^{p^ν} $(\nu = \infty)$ selbst eine unendliche Reihe:

$$\frac{1^0}{1!} e^{-x^{p^\nu}} + \frac{p^{p-1}}{p!} e^{-px^{p^{\nu-1}}} + \frac{p^{2(p-1)}}{(p^2)!} e^{-p^2 x^{p^{\nu-2}}} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{p^{\nu(p^\nu-1)}}{(p^\nu)!} e^{-p^\nu x} \Big\}_{\nu=\infty}$$

in welcher die Coefficienten und Exponenten von e nach einem leicht erkennbaren Gesetze fortschreiten.

Mittelst der Reihe für $x \left(\begin{matrix} = 0 \\ < +1 \end{matrix} \right)$ lässt sich aber offenbar jede in eine Potenzreihe entwickelbare Function $f(x)$ auch in eine solche Reihe verwandeln, in welcher die Coefficienten der Potenzen von x Summen $\sum_1^n \varphi(d)$ von Functionen der Teiler des Exponenten n sind, und daher aus ebenso vielen Teilen bestehen, als n Divisoren aufweist.

So ist z. B.

$$\log\frac{1}{1-x} = x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\ldots$$
$$= \frac{1^0}{1!}xe^{-x}+\left(\frac{2^1}{2!}e^{-2x}+\frac{1}{2}\frac{1^0}{1!}e^{-x^2}\right)x^2+\left(\frac{3^2}{3!}e^{-3x}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1^2}{1!}e^{-x^3}\right)x^3$$
$$+\left(\frac{4^3}{4!}e^{-4x}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2^1}{2!}e^{-2x^2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1^0}{1!}e^{-x^4}\right)x^4,\ldots,$$

Hier ist

$$\varphi(d) = \frac{d}{n}\cdot\frac{d^{d-1}}{d!}e^{-dx}\overset{n}{\overline{d}} = \frac{1}{n}\frac{d^d}{d!}e^{-dx}\overset{n}{\overline{d}}$$

ebenso

$$e^x = 1+\frac{1^0}{1!}e^{-x}.x+\left(\frac{2^1}{2!}e^{-2x}+\frac{1}{2!}\cdot\frac{1^0}{1!}e^{-x^2}\right)x^2$$
$$+\left(\frac{3^2}{3!}e^{-3x}+\frac{1}{3!}\frac{1^0}{1!}e^{-x^3}\right)x^3+\left(\frac{4^3}{4!}e^{-4x}+\frac{1}{2!}\frac{2^1}{2!}e^{-2x}+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{4!}\cdot\frac{1^0}{1!}e^{-x^4}\right)x^4+\ldots$$

Der Coefficient von x^n ist in dieser Reihe:

$$\sum_1^n \frac{1}{\left(\frac{n}{d}\right)!}\ \frac{d^{d-1}}{d!}e^{-dx}\overset{n}{\overline{d}}$$

wo sich die Summirung wieder auf alle Divisoren d des Exponenten n erstreckt.

Salzburg, Juli 1887.

XX.

Die Bestimmung der Anzahl Primzahlen, welche nicht grösser als eine gegebene Zahl sind.

Von

Franz Rogel.

Im 46. Bande des geschätzten Archives berechnet K. E. Hoffmann die Anzahl aller Primzahlen unter einer gegebenen Grenze m mittelst der Function $\varphi(m)$ und einer Grösse μ, die auf rein empirischem Wege unter Beihilfe die Rechnung abkürzender Kunstgriffe aus der Primzahlentafel durch Abzählen gefunden wird; die Inanspruchnahme der letzteren erstreckt sich auf Primzahlen, welche weit über $\sqrt{m}$ liegen.

Diese Lösungsart, welche dem praktischen Rechner einen sehr rasch zum Ziele führenden Weg zeigt, lässt daher, eben wegen des Auftretens dieser Grösse μ, die Frage nach der Form der Abhängigkeit der gesuchten Anzahl von der gegebenen Zahl m und sonstiger Einfluss nehmender Grössen (den Primzahlen $< \sqrt{m}$) völlig offen. Dieselbe soll nun durch die im nachfolgenden entwickelte, rein rechnerisch vorgehende Methode beantwortet werden. Die Benutzung der Primzahlentafel wird hiebei auf ein Minimum, nämlich auf die Aufsuchung der Primzahlen $< \sqrt{m}$, beschränkt.

Die Untersuchung, ob eine vorgelegte Zahl m Primzahl ist oder nicht, führt zu der Erkenntniss, dass hiezu versuchsweise Teilungen dieser Zahl nur durch die Primzahlen von $p_2 = 2$ angefangen bis

zur grössten noch vor $\sqrt{m}$ liegenden Primzahl p_n erforderlich und hinreichend sind [1]).

Daraus folgt unmittelbar, dass die Primzahlen-Menge $\mathfrak{A}_m$ auch nur von diesen Primzahlen $p_2, p_3 \ldots p_{n-1}, p_n < \sqrt{m}$ $(\sqrt{m} < p_{n+1})$ neben der Zahl m selbst abhangen wird.

Bedeutet nun das Symbol $\left(\frac{m}{p}\right)$ die grösste im Bruche $\frac{m}{p}$ enthaltene ganze Zahl, so dass

$$\left(\frac{m}{p}\right) < \frac{m}{p} < \left(\frac{m}{p}\right) + 1$$

ist, dann stellt

$$\left(\frac{m}{p_r}\right) \quad (r = 2, 3, \ldots n-1, a)$$

die Anzahl aller nicht über m liegenden gegen p_r relativen Primzahlen vor.

Die Summe $\sum_{r=2}^{r=n} \left(\frac{m}{p_r}\right)$ giebt jedoch nicht die Anzahl aller gegen $P_n = p_1 p_2 \ldots p_{n-1} p_n$ relativen Primzahlen $\left(\leqq m\right)$; denn alle durch zwei oder mehrere der Primzahlen $p_2 \ldots p_n$ zugleich teilbaren Zahlen $\leqq m$ werden in derselben mehrmals gezählt. Zahlen von der Form $C_q(p)$ (Combinationen der $q$ten Classe ohne Wiederholung der Elemente $p_2 \ldots p^n$) erscheinen $q$mal: ebenso oft wie überhaupt alle Zahlen, welche aus q Primzahlen zusammengesetzt sind.

Um nun die Anzahl aller gegen P_n relativen Primzahlen $\leqq m$ zu finden, kann das folgende inductive Verfahren eingeschlagen werden.

In der Summe $\left(\frac{m}{p_2}\right) + \left(\frac{m}{p_3}\right)$ kommen alle durch $P_3 = p_2 \cdot p_3$ $(= 2 \cdot 3 = 6)$ teilbaren Zahlen $\leqq m$ zweimal vor; daher giebt $\left(\frac{m}{p_2}\right) - \left(\frac{m}{p_3}\right) - \left(\frac{m}{p_2 \cdot p_3}\right)$ die Anzahl aller gegen P_3 relativen Primzahlen $\leqq m$.

---

1) J. Frischauf, Vorlesungen über Zahlentheorie.

Die Summe $\left(\frac{m}{p_2}\right)+\left(\frac{m}{p_3}\right)+\left(\frac{m}{p_4}\right)$ enthält alle durch p_2p_3, p_3p_4 und p_2p_4 teilbaren Zahlen doppelt; die Differenz

$$\left(\frac{m}{p_2}\right)+\left(\frac{m}{p_3}\right)+\left(\frac{m}{p_4}\right)-\left(\frac{m}{p_2\ p_3}\right)-\left(\frac{m}{p_2\ p_4}\right)-\left(\frac{m}{p_3\ p_4}\right)$$

daher nur einmal, dagegen sind die durch $p_2p_3p_4$ teilbaren Zahlen in den positiven Gliedern zusammen $\binom{3}{1}$ mal in den negativen ebenfalls $\binom{3}{2}$ mal, im ganzen also $\binom{3}{1}-\binom{3}{2}=0$ mal gezählt

Es muss daher zu dieser Differenz $\left(\frac{m}{p_2\ p_3\ p_4}\right)$ addirt werden um sodann in

$$\left(\frac{m}{p_2}\right)+\left(\frac{m}{p_3}\right)+\left(\frac{m}{p_4}\right)-\left(\frac{m}{p_2\ p_3}\right)-\left(\frac{m}{p_2\ p_4}\right)-\left(\frac{m}{p_3\ p_4}\right)+\left(\frac{m}{p_2p_3p_4}\right)$$

die Menge aller gegen $P_4 = p_2 \cdot p_3 \cdot p_4$ relativen Primzahlen zu erhalten, wofür man auch abgekürzt schreiben kann:

$$\sum_2^4\left(\frac{m}{C_1\,p}\right)-\sum_2^4\left(\frac{m}{C_2\,p}\right)-\sum_2^4\left(\frac{m}{C_3\,p}\right)$$

Durch Fortsetzung dieses Verfahrens erscheint für die Anzahl aller gegen $P_n = p_2 \cdot p_3 \ldots p_{n-1} \cdot p_n$ relativen Primzahlen $\leqq m$ eine Summe von der Form:

$$\mathfrak{S}=\sum_2^n\left(\frac{m}{C_1\,p}\right)-\sum_2^n\left(\frac{m}{C_2\,p}\right)+\ldots+(-1)^{r+1}\sum_2^n\left(\frac{m}{C_r\,p}\right)\pm\ldots$$
$$+(-1)^{n+1}\sum_2^r\left(\frac{m}{C_n\,p}\right)$$

Die Zeiger beim Summenzeichen bedeuten, dass die Combinationen, welche als Teiler auftreten, aus den Elementen von p_2 bis p_n zu bilden sind.

Um die Summe $\sum_2^n\left(\frac{m}{C_r\,p}\right)$ zu erhalten, muss m durch sämtliche Combinationen der $r$ten Classe ohne Wiederholung dividirt und die ganzen Quotienten addirt werden.

Irgend eine Zahlform $p_2^{\alpha}p_3^{\beta}\ldots p^{\varrho}{}_{r+1}\cdot m'$ $(m' \backsim P_n)$ welche aus r Primzahlen aus der Reihe $p_2 \ldots p_n$ gebildet ist, kommt in $\mathfrak{S}$ wirklich nur einmal vor; denn in der ersten Partial-Summe in

1) nämlich in $\sum_{2}^{n}\binom{m}{C_1 p_r}$, ist für $\binom{r}{1}$ mal, in der zweiten $-\binom{r}{2}$, ... in der $(r-1)$ten $(-1)^r\binom{r}{r-1}$ und in der $r$ten $(-1)^{r+1}\binom{r}{r}$mal, im ganzen daher

$$\binom{r}{1}-\binom{r}{2}+\binom{r}{3}-+\ldots+(-1)^r\binom{r}{1}+(-1)^{r+1}=1 \text{ mal}$$

enthalten.

Dass die Combinationen der Primzahlen $p_2 \ldots p_n$, welche hier als Teiler auftreten, nicht grösser als m sein sollen, ist überflüssig besonders zu bedingen, da ja in diesem Falle $\binom{m}{p}=0$ wird $(p>m)$.

Durch diese successiven Teilungen werden aber die Primzahlen $p_2, p_3 \ldots p_{n-1}, p_n < \sqrt{m} < p_{n+1}$ selbst ausgeschieden; indem man ihre Anzahl $n-1$ restituirt, ergiebt sich als Ausdruck für die Anzahl aller Primzahlen, welche nicht grösser als m sind:

$$2] \qquad \mathfrak{A}_m = m-\mathfrak{S}+n-1$$

oder

$$3] \quad \mathfrak{A}_m = m-\sum_{2}^{n}\left(\frac{m}{C_1 p}\right)+\sum_{2}^{n}\left(\frac{m}{C_2 p}\right)-\sum_{2}^{n}\left(\frac{m}{C_3 p}\right)+\ldots$$
$$\ldots+(-1)\sum_{2}^{n}\left(\frac{m}{C_n p}\right)+n-1$$

$m-\mathfrak{S}$ kann symbolisch auch in folgende Form gebracht werden:

$$4] \quad m-\mathfrak{S}=[m]\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\left(1-\frac{1}{p_3}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{p_{n-1}}\right)\left(1-\frac{1}{p_n}\right)$$
$$=[m]\prod_{n=2}^{n=n}\left(1-\frac{1}{p_n}\right)$$

Das eingeklammerte m zeigt an, dass nach vollzogener Multiplication der Factorenfolge jedes Glied mit $[m]$ noch vor der Reduction zu multipliciren und dann

$$[m]\frac{1}{{}_sC_r\, p}=\left(\frac{m}{{}_sC_r\, p}\right)$$

zu setzen ist; ${}_sC_p$ bedeutet hier die $s$te Combination der $r$ten Classe ohne Wiederholung der Elemente $p_2 \ldots p_n$.

Die Aehnlichkeit dieses Ausdruckes 4] mit jenen für die Anzahl

$\varphi(m)$ [1]) aller zu $m = a^\alpha . b^\beta \ldots k^\varkappa . l^\lambda$ relativen Primzahlen ist unverkennbar; es ist bekanntlich

$$\varphi(m) = m\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{k}\right)\left(1-\frac{1}{l}\right)$$
$$= m\prod_{p=a}^{p=l}\left(1-\frac{1}{p}\right).$$

Durch Substitution von $m \cdots \mathfrak{S}$ aus 4] in 2] wird

$$4] \qquad \mathfrak{A}_m = [m]\prod_{2}^{n}\left(1-\frac{1}{p_n}\right)+n-1$$

Eine von dieser verschiedene für praktische Zwecke bedeutsame Form für $\mathfrak{A}_m$ wird mit Benutzung der Gleichung

$$\left(\frac{m}{ab}\right) = \left(\frac{\left(\frac{m}{a}\right)}{b}\right)$$

erhalten. In seiner ursprünglichen Form ist nämlich

$$\begin{aligned}\mathfrak{A}_m = m &- \left(\frac{m}{p_2}\right) - \left(\frac{m}{p_3}\right) - \left(\frac{m}{p_4}\right) - \ldots \\ &+ \left(\frac{m}{p_2p_3}\right)+\left(\frac{m}{p_2p_4}\right)+\left(\frac{m}{p_3p_4}\right)+\ldots \\ &- \left(\frac{m}{p_2p_3p_4}\right)-\left(\frac{m}{p_2p_3p_5}\right)-\ldots \\ &+ \left(\frac{m}{p_2p_3p_4p_5}\right)+\ldots \\ &- \ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ n-1\end{aligned}$$

Da dio Ordnung der Glieder ohne jeden Einfluss auf die Grösse von $\mathfrak{A}_m$ ist, so gilt auch:

$$\begin{aligned}\mathfrak{A}_m = m &- \left(\frac{m}{p_2}\right) \\ &- \left(\frac{m}{p_3}\right)+\left(\frac{m}{p_2p_3}\right) \\ 4'] \quad &- \left(\frac{m}{p_4}\right)+\left(\frac{m}{p_2p_4}\right)+\left(\frac{m}{p_3p_4}\right)-\left(\frac{m}{p_2p_3p_4}\right) \\ &- +\ldots\ldots \\ &+ n-1\end{aligned}$$

1) G. Lejeune-Dirichlet, Vorlesungen über Zahlentheorie.

Diese veränderte Ausdrucksweise entspricht einem Satze der Combinationslehre; $\mathfrak{A}_m$ wird dadurch nicht geändert. Nun geht daraus deutlich hervor, dass die zweite Zeile aus der ersten durch Teilung mit $-p_3$, die 3te aus der 2ten durch Teilung mit $-p_4$, allgemein die $r$te Zeile aus der $(r-1)$ten Zeile durch Teilung mit $-p_{r+1}$ entsteht. Diese Wahrnehmung zum Ausdruck gebracht, wird

$$5] \quad \mathfrak{A}_m = m - \left(\frac{m}{p_2}\right) - \left(\frac{m - \left(\frac{m}{p_2}\right)}{p_3}\right) - \left(\frac{m - \left(\frac{m}{p_2}\right) - \left(\frac{m - \left(\frac{m}{p_2}\right)}{p_3}\right)}{p_4}\right) - + \ldots, \; n-1$$

wo die Bruchformen, besondere Arten von aufsteigenden Kettenbrüchen [1]), so zu verstehen sind, dass Glied für Glied des Zählers besonders zu teilen ist, weil im allgemeinen

$$\frac{a+b+c+\ldots}{p} \gtreqless \left(\frac{a}{p}\right)+\left(\frac{b}{p}\right)+\left(\frac{c}{p}\right)+ \ldots \text{ ist.}$$

Das Bildungsgesetz der einzelnen Glieder ist ein leicht erkennbares. Die wirkliche Ausführung für ein specielles m giebt sich bedeutend einfacher, als das complicirte Aussehen dieser Formel erwarten lässt.

Beispiel.

$m = 359$; $p_n = 17 < \sqrt{359} < 19 (= p_{n+1})$; $n = 8$.

Die Teilerreihe $p_2 \ldots p_n$ ist $= 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17$.

Der Mechanismus der Rechnung ist folgender:

In Ausführung der in 4] angedeuteten Operationen werden eine entsprechende Anzahl von Colonnen, alternirend mit + und − bezeichnet, zur Aufnahme der Quotienten aufgestellt. Zunächst durch $-p_2 = -2$ geteilt wird $\left(\frac{359}{-2}\right) = -179$ in die mit − gekennzeichnete Colonne eingetragen, wodurch schon die erste Zeile abgeschlossen ist; dieselbe wird nun durch $-p_3 = -3$ Glied für Glied geteilt und die Resultate mit entgegengesetzten Vorzeichen in die gleichbezeichnete Colonne eingestellt. Das Verfahren wiederholt sich für alle Teiler und alle Zeichen bis zum letzten, hier $p_n = 17$.

---

1) Kuntze und Schlömilch III. Bd. 64.

Die Addition mit Hinzufügung von $n-1=7$ ergiebt $\mathfrak{A}_m = 73$.

Zur besseren Uebersicht wurden 5 Colonnen aufgestellt; es würden doch zwei, für + und — vollkommen genügen.

Teiler	+	—	+	—	+	
	359					
2		179				
3		119	59			
		71	35			
5						
			23	11		
		51	25			
			17	8		
7						
			10	5		
				3	1	
		32	16	5		
			10	3		
11			6	2		
			4	2		
				1	1	
		27	13	4		
			9	2		
13			5	1		
			3	1		
			2	1		
				1		
		21	10	3		
			7	2		
17			4	1		
			3	1		
			1	1		
			1			
Zusammen	+359	−509	+263	−58	+2	= 66

$$n-1=7$$

$$\mathfrak{A}_{359} = 73$$

ist die Zahl m eine zusammengesetzte, etwa von der Form

$$m = p_2^{\alpha}\, p_3^{\beta} \ldots p_r^{\varrho}$$

tet die Kenntniss von $\varphi(m)$ für diese Art der rechnerischen hrung einen kaum nennenswerten Vorteil, da die Teilsumme

in 4'] ja aus sämtlichen vorhergehenden Gliedern bestimmt werden, die Ermittlung von $\left(\frac{m}{p_2}\right)$ bis $\left(\frac{m}{p_r}\right)$ daher immer vorzunehmen ist.

Schliesslich sei noch bemerkt, dass dieser Algorithmus der Combinationen mit Wiederholung nicht bedarf.

Da 359 selbst eine Primzahl ist, so kann man sagen, dass es 73 Primzahlen giebt, welche nicht grösser als 359 sind.

Salzburg im Januar 1887.

XXI.

Neues über Vier- und Vielecke.

Von

B. Sporer.

I. Teil.

I. (Fig. 1.)

A, *B*, *C* und *D* seien irgend 4 Punkte der Ebene, *M*, *N* und *P* die Brennpunkte der Parabeln, welche die Linien *AB*, *AC*, *BD*, *BC* resp. *AB*, *AD*, *BC*, *CD* und *AD*, *AC*, *BC*, *BD* berühren. Die Gegenseitenpaare des Vierecks *AB*, *CD*, *AC*, *BD* und *AD*, *BC* mögen sich ferner in den Punkten *F*, *E*, *G* schneiden.

Berücksichtigen wir nun, dass, wenn wir von *F*, *E* und *G* Lote auf die 4 Linien *EC*, *AD*, *DB* und *BC* fällen und deren Fusspunkte der Reihe nach verbinden, die Inhalte der dadurch entstandenen 3 Figuren verschwinden, so ergiebt sich uns, dass für jeden Punkt des Kreises durch *P*, *E* und *G* die Vierecke der Fusspunkte der Lote auf die Seiten des gewöhnl. Vierecks *ACBD* einen verschwindenden Inhalt haben (Vergl. J. Steiners Abhandl über Fusspunktcurven ges. W. B. 2 p. 121.) Diese Eigenschaft der Punkte des Kreises durch *P*, *E* und *G* lässt sich nun auch noch anders ausdrücken. Soll nämlich für irgend einen Punkt des Kreises der Inhalt der Fusspunktscurve verschwinden, so ist dies identisch mit dem Umstande, dass die Verbindungslinien der Fusspunkte der Lote von diesem Punkt auf die Gegenseiten des gewöhnl. Vierecks *ACBD* unter sich parallel werden, oder, mit andern Worten, wir erhalten den Satz:

Fällen wir von irgend einem Punkte des durch *P*, *E* und *G* gelegten Kreises Lote auf die Seiten des gewöhnl. Vierecks *ACBD*

und verbinden die auf den Gegenseiten gelegenen Fusspunkte mit einander, so sind diese Verbindungslinien unter sich parallel.

Erwägen wir ferner, dass die Kreise durch die Punkte G, F und N, E, F und M analoge Eigenschaften in Bezug auf die Vierecke $ABCD$ und $ABDC$ besitzen, so ergiebt sich uns sofort, dass die 3 durch P, E, G; G, F, N und E, F, M gelegten Kreise sich in einem und demselben Punkte y treffen, und dass, wenn wir auf die 6 Seiten des vollst. Vierecks $ABCD$ Lote von y fällen, die Verbindungslinien der Fusspunkte auf den Gegenseitenpaaren unter sich parallel werden. Zugleich ergiebt sich, dass es im allgemeinen nur einen einzigen Punkt geben wird, der die letzt erwähnte Eigenschaft in Bezug auf ein volles Viereck besitzt.

Fassen wir die entwickelten Eigenschaften zusammen, so erhalten wir den Satz:

„Die sechs Seiten eines vollständigen Vierecks lassen sich 3 mal „zu 2 Paaren von Gegenseiten anordnen, welche je eine Parabel be„rühren. Legen wir durch die Brennpunkte der Parabeln und die „Schnittpunkte der zugehörigen Gegenseitenpaare Kreise, so ergeben „uns 3 sich in einem Punkte schneidende Kreise und fällen wir von „dem gemeinsamen Punkte der Kreise Lote auf die sechs Seiten des „Vierecks, so liegen deren Fusspunkte auf den Gegenseitenpaaren „auf parallelen Linien, und im allgemeinen besitzt nur dieser Punkt „in Bezug auf das Viereck die erwähnte Eigenschaft“

II.

Legen wir ferner durch P, A und B einen Kreis, so bildet dieser mit der Linie AB einen Winkel $= CGD + CED - 2\text{R}$, da ein durch B, D, G gehender Kreis durch P gehen muss, also Wkl. $DPB =$ Wkl. CGD und ebenso Wkl. $APD =$ Wkl. CED ist. Ebenso bildet der durch A, M und D gelegte Kreis mit der Linie AD einen Winkel $= -CFB - CEB + 2\text{R}$. Daraus folgt aber, dass die beiden Kreise durch A, B, P und A, D, M in A sich unter einem Winkel

$$\begin{aligned}\alpha &= 4\text{R} + BAD - CFB - CEB - CGD - CED \\ &= 2\text{R} + BAD - CFB - CGD\end{aligned}$$

durchschneiden.

Ebenso finden wir, dass die Winkel β und γ, unter denen sich die Kreise durch A, M, D; D, N, B und A, B, P in D und B durchschneiden, sind:

$$\beta = 2R + ADB - AGC - CEB$$
$$\gamma = 2R + DBA - AFC - CED$$

Aus den Werten für α, β, γ folgt nun sofort die Relation:

$$\alpha + \beta + \gamma = 2R$$

Schneiden sich nun aber 3 Kreise unter Winkeln, deren Summe $= 2R$ ist, so gehen sie durch einen und denselben Punkt. Die Kreise durch P, A, B; A, M, D und D, N, B gehen somit durch einen Punkt. Berücksichtigen wir ferner, dass in Bezug auf die Dreiecke ACB, ADC und BCD analoge Eigenschaften wie für das Dreieck ADB gelten, so erhalten wir den Satz:

„Legen wir durch die Brennpunkte der (in I. erwähnten) Para-„beln und die Endpunkte der Seiten des Vierecks, die nicht Tan-„genten der Parabel sind, Kreise, so erhalten wir sechs Kreise, welche „sich viermal zu dreien in einem Punkte schneiden."

III. (Fig. 2.)

Wir haben in I. bemerkt, dass im allgemeinen in Bezug auf ein Viereck nur ein Punkt y existire, der die in I. erwähnten Eigenschaften besitzt; es giebt jedoch eine bestimmte Lage der 4 Punkte A, B, C und D, wo dies nicht mehr der Fall ist, dann nämlich, wenn jeder der 4 Punkte Höhenschnitt des Dreiecks der 3 übrigen Punkte ist.

In diesem Falle liegen nämlich die Punkte P, M, N, E, F und G auf einem Kreise, indem P mit F, M mit G und N mit E zusammenfallen. Der Punkt y selbst wird auf diesem Kreise unbestimmt, oder mit andern Worten, jeder Punkt des durch E, F und G gehenden Kreises hat die erwähnte Eigenschaft. Nun wird aber der Kreis durch die Punkte E, F und G zum gemeinschaftlichen Feuerbach'schen Kreise, der aus je 3 der 4 Punkte A, B und D gebildeten Dreiecke, d. h. wir erhalten den Satz:

„Fällen wir von irgend einem Punkte des Feuerbach'schen „Kreises eines Dreiecks Lote auf die Seiten und Höhen des Drei-„ecks und verbinden jeden Fusspunkt dieser Lote auf den Seiten „mit dem Fusspunkt des Lotes auf der zugehörigen Höhe, so sind „diese 3 Verbindungslinien unter sich parallel."

IV.

Die vorhin erwähnte Lage der 4 Punkte A, B, C und D bietet auch in anderer Beziehung noch Interesse.

„Fällen wir nämlich von irgend einem Punkte auf die Seiten „eines vollständigen Vierecks Lote und verbinden die auf den Gegen-„seiten gelegenen Fusspunkte derselben, so werden sich die dadurch „entstehenden 3 Verbindungslinien im allgemeinen nicht in einem „Punkte schneiden. Haben jedoch die 4 Punkte A, B, C und D die „in III. erwähnte Lage zu einander, so dass also jeder der Höhen-„schnitt des Dreiecks der 3 andern ist, so ist dies stets der Fall, „der Punkt möge eine Lage haben, welche er wolle.

Sind nämlich von dem Punkte P auf die Seiten eines solchen Vierecks die Lote PH, PJ, PK, PO, PM und PN gefällt und die Fusspunkte dieser Lote auf den Gegenseiten mit einander verbunden, also die Linien HO, JK und NM gezogen und ziehen wir ferner PE, PF und PG und durch E, F und G parallele Linien EW, FV und GU mit HO, JK und MN, so bilden die ersten 3 Linien mit den Linien PE, PF und PG dieselben Winkel wie die letzteren drei. Bedenken wir nun, dass CE, CG und CF die Halbirungslinien der Winkel des Dreiecks EFG sind und dass, da EP, FP und GP sich in einem Punkte schneiden,

$$\frac{\sin PGE}{\sin UGF} \cdot \frac{\sin PEF}{\sin PEG} \cdot \frac{\sin PFG}{\sin PFE} = -1$$

ist, so finden wir, dass auch

$$\frac{\sin UGE}{\sin UGF} \cdot \frac{\sin WEF}{\sin WEG} \cdot \frac{\sin VFG}{\sin VFE} = -1$$

ist, oder dass sich die durch E, F und G mit den Linien HO, JK, MN gezogenen Parallelen EW, FV und GU ebenfalls in einem Punkte Q treffen. Hieraus folgt aber sofort, dass sich die Linien HO, JK und MN im Halbirungspunkte L von PQ schneiden, womit die Behauptung bewiesen ist.

Zugleich ergiebt sich daraus, dass die Punkte P und Q sich gegenseitig entsprechen.

II. Teil

V. (Fig. 3.)

Sind wieder 4 Punkte gegeben, und fällen wir von einem der Punkte D auf die Seiten des Dreiecks der drei andern Punkte ABC die Lote DE, DF und DG, und legen wir durch die Punkte E, G und F einen Kreis, so wird, da Wkl. DGE = Wkl. DCE und Wkl. DGF = Wkl. DAF ist:

Wkl. EGF = Wkl. DCB + Wkl. DAB

Andererseits ist aber, wenn wir durch E und die Halbirungspunkte von DC und DB einen Kreis legen, $HE = CH$, also Wkl. $DHD = 2 . HCE$ und Wkl. DHJ = Wkl DCB und somit Wkl. JHE = Wkl. DCB. Ebenso wird, für einen Kreis durch F, J und den Halbirungspunkt K von AD, Wkl FKJ = Wkl. DAF. Fassen wir diese Resultate mit Worten zusammen, so finden wir also, dass ein Kreis durch EFG der Peripheriewinkel über dem Bogen EF so gross ist als die Summe der Peripheriewinkel über den Bögen EJ und JF der Kreise durch HEJ und JFK, oder dass die 3 erwähnten Kreise sich in einem und demselben Punkte x treffen.

Berücksichtigen wir ferner, dass die Kreise durch H, F, J und J, F, K die Feuerbach'schen Kreise der Dreiecke BCD und ABD sind, so erhalten wir den Satz:

„Sind 4 Punkte gegeben. und fällen wir von jedem der Punkte „Lote auf die Seiten des Dreiecks der 3 andern und legen durch „deren Fusspunkte Kreise, so erhalten wir 4 Kreise, welche sich „in einem und demselben Punkte, dem Schnittpunkt der 4 Feuer„bach'schen Kreise der 4 Dreiecke, welche man aus je 3 der 4 „Punkte bilden kann, schneiden".

Oder:

„Sieht man jeden von 4 Punkten als Brennpunkt eines Kegel„schnitts an, der die Seiten des Dreiecks der 3 übrigen Punkte be„rührt, so schneiden sich die über den Hauptachsen der Kegelschnitte „beschriebenen Kreise in einem Punkte, dem gemeinsamen Punkte „der 4 Feuerbach'schen Kreise der Dreiecke, die man aus je 3 der „4 Punkte bilden kann". (Vergl. des Verfassers Mitt. im württ. Korrespbl. für Gelehrten- und Realschulen 1885.)

VI. (Fig. 2.)

Sind wieder 4 Punkte derart gegeben, dass jeder der Höhenschnitt des Dreiecks der 3 übrigen ist und nehmen wir irgend einen fünften Punkt P an, so bildet dieser mit den 4 ersten Punkten A, B, C, D im ganzen 10 Dreiecke. Da nun die Dreiecke, welche wir aus je 3 der 4 Punkte A, B, C, D bilden können, einen gemeinsamen Feuerbach'schen Kreis haben, so folgt daraus sofort, dass die Feuerbach'schen Kreise aller dieser 10 Dreiecke, die je 3 der Punkte A, B, C, D und P bilden, durch einen und denselben Punkt x gehen müssen. Fällen wir nun von P etwa auf die Seiten des Dreiecks ABD Lote PH, PK, PN und legen durch deren Fusspunkte H, K

und N einen Kreis, so geht dieser nach V. ebenfalls durch x. Daraus erhalten wir den Satz:

„Sind irgend 4 Punkte so gegeben, dass jeder Höhenschnitt des „Dreiecks der 3 übrigen ist, und fällen wir von irgend einem 5ten „Punkt Lote auf die Seiten der Dreiecke, welche wir aus je drei „der 4 ersten Punkte bilden können, und legen durch die Fusspunkte „der Lote auf den Seiten jedes solchen Dreiecks Kreise, so schnei- „den sich dieselben in einem Punkte des Feuerbach'schen Kreises „der 4 Dreiecke."

Oder:

„Sind 4 Punkte derart gegeben, dass jeder Höhenschnitt des „Dreiecks der 3 übrigen ist, und sieht man irgend einen 5ten „Punkt als Brennpunkt eines Kegelschnitts an, der die Seiten eines „Dreiecks aus 3 der gegebenen Punkte berührt, so erhält man 4 „Kegelschnitte derart, dass die über den Hauptachsen derselben be- „schriebenen Kreise sich in einem Punkte schneiden, der auf dem „gemeinsamen Feuerbach'schen Kreise der Dreiecke liegt, die man „aus je 3 der geg. 4 Punkte bilden kann."

VII.

Fällen wir ferner auf die Seiten der 4 Dreiecke, die sich aus je 3 der 4 Punkte A, B, C, D bilden lassen, von einem Punkte P Lote und legen wir durch die Fusspunkte der Lote, welche auf den Seiten eines Dreiecks liegen, Kreise, so erhalten wir 4 solche Kreise. Sind die Fusspunkte der Lote die Punkte E, F, G, H, J, K, so erhalten wir die Kreise durch E, F, G; F, J, H; J, G, K und E, H, K. Nun ist aber der Peripheriwinkel über dem Bogen JG des Kreises durch J, G und K, also der Winkel

$$\begin{aligned} JGK &= \text{Wkl. } JKP - \text{Wkl. } GKP \\ &= \text{Wkl. } JDP - \text{Wkl. } GCP \end{aligned}$$

und ebenso der Peripheriewinkel über dem Bogen GF des Kreises durch F, G, E, also

$$\begin{aligned} \text{Wkl. } GEF &= \text{Wkl. } GEP + \text{Wkl. } PEF \\ &= \text{Wkl. } GCP + \text{Wkl. } PBF. \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \text{Wkl. } JGK + \text{Wkl. } GEF &= \text{Wkl. } JDP + \text{Wkl. } PBF \\ &= \text{Wkl. } JHP + \text{Wkl. } PHF \\ &= \text{Wkl. } JHF \end{aligned}$$

Der Peripheriewinkel über dem Bogen JF des Kreises durch J, F H ist also so gross als die Summe der Peripheriewinkel über den Bögen JG und GF der Kreise durch J, G, K und durch E, F, G. Daraus folgt aber, dass die erwähnten Kreise durch einen und denselben Punkt gehen, oder mit andern Worten, wir erhalten den Satz:

„Ordnen wir 4 Punkte viermal zu dreien und fällen von irgend „einem 5ten Punkt Lote auf die Seiten des Dreiecks von je dreien „dieser Punkte und legen durch deren Fusspunkte Kreise, so er„halten wir 4 sich in einem Punkte schneidende Kreise."

Oder:

„Sehen wir irgend einen Punkt als Brennpunkt der Kegelschnitte „an, welche die Seite der aus je 3 von 4 Punkten gebildeten Drei„ecke berühren, so schneiden sich die über den Hauptachsen der „Kegelschnitte beschriebenen Kreise in einem und demselben Punkte."

VIII.

Wir haben, indem wir den Satz des vorigen Paragraphen bewiesen haben, zugleich den Beweis eines andern bekannten Satzes gegeben, den Beweis des Satzes nämlich:

Legt man durch die übrigen Schnittpunkte von je dreien von 4 Kreisen durch einen Punkt wieder Kreise, so erhalten wir 4 neue Kreise, die ebenfalls durch einen Punkt gehen.

Ziehen wir nämlich von dem gemeinsamen Punkt der 4 Kreise die Durchmesser derselben, so gehen die 6 Verbindungslinien der Endpunkte derselben durch die 6 weitern Schnittpunkte der 4 ersten Kreise, woraus sich die Figur des vorigen Abschnitts sofort ergiebt.

Um zu einem weiteren Satz, über das Kreisviereck wenigstens zu kommen, wollen wir die gegenseitige Lage der 8 Mittelpunkte der oben erwähnten Kreise näher untersuchen. Zu diesem Zwecke beschreiben wir über den Linien PA, PB, PC und PD Kreise um die Figur der 8 Kreise vollständig zu erhalten (Fig. 4.)

Ziehen wir nun LR, OL, LM und LN, so stehen LR senkr. auf JG, LM senkr. auf PF, LN senkr. auf FG und LO senkr. auf PJ.

Daraus folgt sofort, dass Wkl. OLM = RLN ist, da ja Wkl. JPF = Wkl. JGF ist. Nun gehören jedoch die Mittelpunkte R, L und N 3 Kreisen durch G, und die Mittelpunkte O, L, M 3 Kreisen durch P an. Da für die andern Punkte Analoges gültig ist,

so können wir daraus schliessen, dass die Verbindungslinien der Mittelpunkte von 4 in einem Punkte sich schneidenden Kreisen dieselben Winkel mit einander bilden, wie die Verbindungslinien der Mittelpunkte von 4 durch einen andern Punkt gehenden Kreisen. Liegen insbesondere die Mittelpunkte von irgend 4 solchen Kreisen auf einem Kreise, so ist dies mit den Mittelpunkten von jeden solchen der Fall. Daraus folgt der Satz:

„Liegen die 4 (in Abschnitt 7. erwähnten) Punkte A, B, C und „D auf einem Kreise, so liegen auch die Mittelpunkte der 4 Fuss-„punktskreise auf einem Kreise, und überdies liegen je 2 der letz-„teren Mittelpunkte mit je 2 der Halbirungspunkte der Strecken AB, „PA, PB, PC und PD auf einem Kreise."

Liegen nämlich die Halbirungspunkte der Strecken PA, PB, PC und PD auf einem Kreise, so ist dies auch mit den Punkten A, B, C, D selbst der Fall und umgekehrt.

IX. (Fig. 5.)

Bevor wir nun auf die Vielecke und Vielseite übergehen, wollen wir einen Satz beweisen, der es uns ermöglicht, ohne weitere grosse Schwierigkeit zwei analoge Sätze auszusprechen, von denen der eine sich auf das Vieleck, der andere auf das Vielseit bezieht

Sind nämlich 5 durch einen Punkt A gehende Kreise gegeben, so können wir dieselben zehnmal zu dreien anordnen und durch die übrigen von A verschiedenen 3 Schnittpunkte je dreier dieser 5 Kreise wieder Kreise legen. Dies giebt 10 neue Kreise, welche nach dem vorigen Abschnitt sich 5 mal zu 4 in einem Punkte schneiden werden.

Sind nun die übrigen Schnittpunkte der durch A gehenden Kreise die Punkte A, B, C, D, E, F, G, H, J, K und L, so können wir nun von einem dieser Punkte etwa F ausgehen und den Punkt F und 4 von den 5 durch diesen Punkt gehenden Kreisen betrachten, also etwa den durch F, C, H, J und A gehenden Kreis ausschliessen. Die 5 Punkte, in welchen sich die 10 nicht durch A gehenden Kreise je zu 4 treffen, seien ferner U, W, X, Y und Z. Nun schneiden sich die Kreise $FCBZY$, $FGHVZ$ und $FKJVY$ ausser in F noch in den Punkten V, Y und Z; die Kreise $ABFGK$, $FCBZG$, $FGHVZ$ in B, G und Z; die Kreise $ABFGK$, $FCBZY$ und $FKJVY$ in B, K und Y und die Kreise $ABFGK$, $FKJVY$, $FGHVZ$ in K, G und V. Legen wir nun durch V, Y, Z; B, G, Z; B, K, Y und G, K, V Kreise, so müssen sich diese in einem und demselben Punkte

treffen. Nun schneiden sich aber die 3 letzteren in dem Punkte X, woraus sofort folgt, dass ein durch V, Y und Z gelegter Kreis auch durch X und ebenso auch durch W gehen muss. Wir erhalten also den Satz:

Gehen 5 Kreise durch einen Punkt und legen wir durch die übrigen Schnittpunkte von je dreien einen Kreis, so erhalten wir 10 neue Kreise, welche 5 mal zu 4 durch einen Punkt gehen, und diese 5 Punkte selbst liegen wieder auf einem Kreise.

Anbei sei es uns gestattet, noch auf eine gewisse Reciprocität zwischen den auftretenden Kreisen und Punkten aufmerksam zu machen. In Abschnitt VII. traten 8 Kreise und 8 Punkte auf, auf jedem Kreise lagen 4 Punkte und durch jeden Punkt giengen 4 Kreise. Hier treten nun im ganzen 16 Kreise und 16 Punkte auf, auf jedem Kreise selbst liegen 5 Punkte und durch jeden Punkt gehen 5 Kreise.

Geht nun durch A noch ein sechster Kreis, so lassen sich diese 6 Kreise 6 mal zu 5 anordnen. Dies giebt 6 Kreise $K^{(V)}$, welche dem obigen Kreis durch V, W, X, Y, Z entsprechen. Durch analoge Schlüsse wie oben, könnten wir nun beweisen, dass diese 6 Kreise $K^{(V)}$ durch einen und denselben Punkt $P^{(VI)}$ gehen. Davon ausgehend wieder, dass zu 7 Kreisen 7 Punkte $P^{(VI)}$ gehören, die alle auf einem Kreise $K^{(VII)}$ liegen u. s. f. in inf., wir wollen jedoch den weitern Beweis hiefür auf eine etwas andere Art geben.

Um nämlich den durch die Punkte V, W, X, Y, Z gehenden Kreis zu construiren, haben wir nur nötig irgend einen Schnittpunkt der 5 Kreise durch A, etwa den Punkt F festzuhalten und die durch F gehenden Kreise zu construiren. Dadurch erhalten wir 3 Kreise, welche sich noch in 3 weiteren Punkten, den Punkten V, Y, Z des Kreises durch V, W, X, Y, Z schneiden. Tritt noch ein solcher Kreis durch A hinzu, so kommt durch F ebenfalls ein weiterer Kreis hinzu. Dadurch sind nun 4 Kreise $K^{(V)}$ bestimmt, welche sich nach dem Obigen in einem Punkte schneiden. Wählen wir einen andern Punkt als F, so erhalten wir ebenfalls wieder 4 Kreise $K^{(V)}$, die durch einen Punkt gehen. Daraus folgt jedoch ohne weiteres, dass alle 6 Kreise $K^{(V)}$ durch einen Punkt $P^{(VI)}$ gehen.

Tritt ein siebenter Kreis durch A hinzu, so tritt zu den 4 durch F gehenden, noch ein fünfter Kreis, zu diesen 5 gehört jedoch ein Kreis mit 5 Punkten $P^{(VI)}$; wählen wir statt F wieder einen andern Punkt, so erhalten wir wieder einen Kreis mit 5 Punkten $P^{(VI)}$, woraus folgt, dass überhaupt alle 7 Punkte $P^{(VI)}$ auf einem Kreise $K^{(VII)}$ liegen u. s. w. in inf.

Was die Anzahl der auftretenden Kreise betrifft, so finden wir, dass dieselbe sich bei jedem weitern Kreis verdopplt. Ebenso ist dies mit den Punkten der Fall. Wir erhalten also folgenden Satz:

„Legen wir durch die übrigen Schnittpunkte von je dreien von „4 durch einen Punkt gehenden Kreisen wieder Kreise, so erhalten „wir 4 Kreise $K^{(III)}$, die sich in einem Punkte $P^{(IV)}$ treffen. Fünf „Kreise lassen sich fünfmal zu 4 anordnen, dazu gehören 5 Punkte „$P^{(IV)}$ auf einem Kreise $K^{(V)}$. Sechs Kreise durch einen Punkt lassen „lassen sich sechsmal zu fünf anordnen. Dies giebt 6 Kreise $K^{(V)}$ „durch einen Punkt $P^{(VI)}$ u s. w. in inf."

„Ist die Figur vollständig construirt, so treten im ganzen 2^{n-1} „Kreise und 2^{n-1} Punkte auf. Auf jedem Kreise liegen n Punkte, „und durch jeden Punkt gehen n Kreise."

X.

Der obige Satz ermöglicht es, uns sofort einen andern aufzustellen, der sich auf das vollständige Vieleck bezieht, nämlich den Satz:

„Fällen wir von irgend einem festen Punkte P Lote auf die „Seiten der Dreiecke, welche je 3 von 4 Punkten bilden, und be„schreiben wir durch die Fusspunkte der Lote, welche auf den Seiten „jedes solchen Dreiecks liegen, Kreise, so schneiden sich die 4 sich „ergebenden Kreise in einem Punkte $P^{(IV)}$. Tritt ein fünfter Punkt „hinzu, so können wir diese 5 Punkte 5 mal zu 4 anordnen und „erhalten in Bezug auf P 5 Punkte $P^{(IV)}$ auf einem Kreise $K^{(V)}$. „Sechs Punkte geben 6 Kreise $K^{(V)}$ durch einen Punkt $P^{(VI)}$ u. s. w. „in inf."

Beschreiben wir nämlich über den Linien, welche den Punkt P mit den geg. Punkten verbinden, Kreise, so ergiebt sich uns sofort die Figur zu Abschnitt IX., woraus der Satz folgt.

XI.

Aus Abschnitt IX. lälst sich ferner ein anderer Satz ableiten, der einer Notiz in Salmon-Fiedler anal. Geom. d. Eb. 4 Aufl. Anm. 70. p 687 von Clifford in den „Educat. Times" Dec. 1870 veröffentlicht wurde [1]). Durch circulare Inversion erhalten wir näm-

1) Der Beweis Clifford ist dem Verfasser nicht bekannt. Obgleich der

lich, wenn das Centrum der Inversion in einen der gemeinsamen Punkte des Kreissystems des Abschnitts IX. verlegt wird, sofort den Satz:

„Vier Linien bilden 4 Dreiecke; die Umkreise dieser Dreiecke „schneiden sich in einem Punkte $P^{(IV)}$. Zu fünf Linien gehören 5 „Punkte $P^{(IV)}$ auf einem Kreise $K^{(V)}$, zu sechs Linien 6 Kreise $K^{(V)}$ „durch einen Punkt $P^{(VI)}$ u. s. w. in inf."

Auf ähnliche Art wie der Satz in Abschnitt X., lässt sich obiger Satz ebenfalls ableiten.

XII.

Wir sind in den letzten Abschnitten auf eine interessante Verwandtschaft gestossen, die zwischen Vielecken und Vielseiten existirt, und zwar beruht dieselbe auf Eigenschaften der circularen Inversion, welche uns gewissermassen gestattete von einem n-eck auf ein n-seit überzugehen. An Stelle des n-ecks können wir zunächst n durch einen Punkt gehende Kreise setzen. Die 2ten n-Endpunkte, der durch den gemeinsamen Punkt der Kreise gehenden Durchmesser lieferten die Ecken des n-ecks, während die Fusspunkte der Lote von dem Punkt auf die Seiten des n-ecks den Schnittpunkten der Seiten des a-seits entsprechen.

Dadurch sind wir öfters in die Lage versetzt, einen Satz der sich auf ein n-eck bezieht, auf ein n-seit zu übertragen und umgekehrt.

Die Anwendbarkeit dieses Umstandes wollen wir noch an zwei bekannten Sätzen über über das Vierseit und Fünfseit zeigen. In jedem Vierseit schneiden sich die über den Diagonalen beschriebenen Kreise in zwei Punkten Q_1 und Q_2. Dieser Satz auf das Viereck übertragen, lautet:

Fällen wir von irgend einem Punkte P auf 2 Gegenseiten eines Vierecks Lote und legen durch deren Fusspunkte einen Kreis K, der den Kreis durch diese Fusspunkte und P rechtwinklig durchschneidet, und verfahren wir mit den anderen Gegenseitenpaaren ebenso, so erhalten wir 3 Kreise K, welche sich in 2 Punkten Q_1 und Q_2 (reellen oder imaginären) schneiden.

Satz eigentlich nicht zu der Abhandlung gehört, glaubte der Verfasser diesen Satz hier dennoch anführen zu sollen.

Ist insbesondere das Viereck derart beschaffen, dass jeder Punkt Höhenschnitt des Dreiecks der andern ist, so ergiebt sich uns der im Abschnitt IV. entwickelte Satz.

Tritt ein 5ter Punkt hinzu, so können wir dieselben 5 mal zu 4 ordnen und erhalten 10 Punkte Q, welche dem Gauss-Bodermiller-schen Satze über über das Fünfseit entsprechend auf einem Kreise liegen.

Weingarten, (Württ.) im Januar 1886.

XXII.

Sechs Beweise für den die elliptischen Integrale erster Gattung betreffenden Additionssatz.

Von

Ulrich Bigler.

1°.) Nach Riemannischen Begriffen.

Wenn S, y rechtwinklige Coordinaten eines Punkes in der Ebene bedeuten (es ist die geometrische Ebene, nicht die Hülfsebene, die man oft zur Versinnlichung der imaginären Zahlen anwendet), so ist

$$(1-S)y^2 = (1+S)(1-k^2S^2)$$

die Gleichung einer ebenen Curve dritten Grades. (Sie wird durch die Abscissenaxe $y=0$ in zwei symmetrische Hälften geteilt und besteht für die sinnliche Anschauung aus drei getrennten Stücken. Das mittelste Stück liegt zwischen den Geraden $S=-1$ und $S=1$, berührt jene auf der Abscissenaxe und hat diese zur Wendungsasymptote; es enthält die zwei noch übrigen reellen Wendepunkte und wird von jeder reellen Geraden reell geschnitten. Die zwei andern Stücke entsprechen den Gebieten $S<-\frac{1}{k}$, $S>\frac{1}{k}$, berühren die Geraden $S=-\frac{1}{k}$ und $S=\frac{1}{k}$ auf der Abscissenaxe und liegen in den von der Abscissenaxe halbirten Scheitelwinkeln der zwei gewöhnlichen Asymptoten $y=k(S+1)$, $y=-k(S+1)$; sie werden nicht von jeder reellen Geraden reell geschnitten, z. B. nicht von der Geraden $S=0$, und machen für die analytische oder geometrisch-perspectivische Betrachtung ein einziges Stück aus, wie die zwei Zweige einer Hyperbel (das sogenannte Oval). ($S=0$, $y=1$)

ist ein Punkt der Curve; die Differentialgleichung der Curve wird hier zu $dy = dS$, folglich ist $y = 1 + S$ die Gleichung der Tangente in diesem Punkte. Substituirt man diesen Wert von y in die Gleichung der Curve, so erhält man $S^2(1+S) = 0$. Der potenzirte Factor S^2 zeigt die Berührung an, der einfache Factor $1+S$ einen einfachen Durchschnitt im Punkte $(S = -1,\ y = 0)$.

$\int \frac{dS}{(1-S)y}$ im Punkte $(S = 0,\ y = 1)$ begonnen ist das elliptische Normalintegral erster Gattung, Argument der mit S bezeichneten elliptischen Function sin. am. Als rationale Function der zwei Coordinaten S und y hat $\frac{1}{(1-S)y}$ in jedem Punkte der Curve einen einzigen Wert. Daher hat auch das Integral immer einen einfach bestimmten Wert, der durch den Weg bedingt ist, den der laufende Punkt auf der Curve zurück gelegt hat. Das Oval wollen wir von der Betrachtung, die ganz im Reellen verweilen soll, ausscheiden. Wenn der laufende Punkt von $(S = 0,\ y = 1)$ aus nach der Seite hingeht, wo S und y zugleich wachsen, so kommt er endlich in die Nähe der Wendungsasymptote, wo $1-S$ positiv sehr klein und y positiv sehr gross ist; der Wert des Integrals geht gegen die Grenzen K hin und erreicht dieselbe, wenn $S = 1$, $y = \infty$ geworden sind. Dann erscheint der laufende Punkt wieder in der Nähe der Asymptote, da wo $1-S$ positiv sehr klein und y negativ sehr gross ist; S muss nun abnehmen, während y wächst, und weil dS und y zugleich negativ sind, so sind die Incremente des Integrales positiv und bekommen in umgekehrter Ordnung dieselben Werte wie früher. Wenn der laufende Punkt in $(S = 0,\ y = -1)$ angelangt ist, so beträgt folglich das Integral $2K$. Jetzt wird S negativ und wenn man die bekannte Quadratwurzel als Ausdruck für $(1-S)y$ herstellt, so ist leicht zu zeigen, dass wenn der laufende Punkt in $(S = -1,\ y = 0)$ anlangt, das Integral den Wert $3K$ erreicht hat. Wenn endlich der laufende Punkt wieder am Ort der Abscisse $(S = 0,\ y = 1)$ angelangt ist, so hat das Integral den Wert $4K$ erreicht und kann nun durch fortwährende Wiederholung dieser Reihe periodisch wachsen.

Wenn in der Gleicung $Ax + By + C = 0$ einer Geraden die Coefficienten A, B, C zu ganzen Functionen einer Variabeln λ gemacht werden (die zum Unterschiede an den auch variabeln Coordinaten x, y Parameter heisse), so gehört zu jedem andern Werte des Parameters λ eine andere Gerade und die Gleichung stellt nun eine einfache Schaar von Geraden dar (die Gerade hat einfache Beweglichkeit). Die Gerade schneidet jeweilen die Curve in drei Punkten,

und die Summe der Werte, die das Integral $\int \frac{dS}{(1-S)y}$ in jedem der drei Schnittpunkte annimmt, kann nur von λ abhangen und wird durch Permutation der Schnittpunkte nicht geändert. Sie kann daher, wenn man alle reellen und imaginären Werte von λ in Betracht zieht, auf einem einblättrigen λ-Felde ausgebreitet werden, ist hier überall differentiabel und wird nirgends unendlich gross. An periodisches Zunehmen kann nicht gedacht werden, weil keine ungewöhnlichen Zusammenhänge da sind. Die genannte Summe kann daher nur eine Constante sein.

Irgend zwei feste Gerade seien durch die Gleichungen $p = 0$, $q = 0$ gegeben; dann ist auch $\lambda p + q = 0$, worin die Coeficienten lineare Functionen des Parameters λ sind, Gleichung einer Geraden, die durch den festen Punkt ($p = 0$, $q = 0$) geht, und die um diesen Punkt sich dreht, wenn λ nach und nach alle Werte annimmt. Zu $\lambda = \infty$ gehört die Gerade $p = 0$ und zu $\lambda = 0$ die Gerade $q = 0$. Für beide Gerade hat die Summe der drei Integrale nach obigem denselben Wert. Obige Constante ist also für alle Geraden dieselbe. Wir kennen eine Gerade, die in ($S = 0$, $y = 1$) berührt und in ($S = -1$, $y = 0$) schneidet. In ihren drei Schnittpunkten dürfen wir dem Integrale resp. die Werte $0, 0, -K$ beilegen; die Constante ist also $-K$ (im allgemeinen könnte man $(4m-1)K$ setzen, wo m eine ganze Zahl ist). Beiläufig ersieht man hieraus, dass die gemeinschaftliche Abscisse der zwei im endlichen liegenden reellen Wendepunkte $S(-\frac{1}{2}K) = -S(\frac{1}{2}K)$ ist. Auf der positiven Seite der Abscissenaxe (wo y positiv) haben im Wendepunkte die drei Integrale in der Tat die Werte $-\frac{1}{3}K$, $-\frac{1}{3}K$, $-\frac{1}{3}K$. Fährt man fort, die Gerade als Tangente an der Curve gleiten zu lassen, indem man den Berührungspunkt in der Richtung von ($S = 0$, $y = 1$) gegen ($S = -1$, $y = 0$) hin bewegt, so gelangt man zu einem Punkte, wo die Tangente durch ($S = 0$, $y = 1$) geht; die drei Integrale sind hier $-\frac{1}{2}K$, $-\frac{1}{2}K$, 0. Ist der Berührungspunkt in ($S = -1$, $y = 0$) angelangt, die Tangente also mit der Asymptote parallel, so sind die drei Integrale $-K$, $-K$, K; denn der dritte Schnittpunkt ist auf der positiven Seite in unendliche Ferne gegangen, um nachher auf der negativen Seite in grosser Ferne wieder zu erscheinen (Durchgang durch ($S = 1$, $y = \infty$)). Der Berührungspunkt kommt dahin, wo die Tangente durch ($S = 0$, $y = -1$) geht; die Integrale $-\frac{3}{2}K$, $-\frac{3}{2}K$, $2K$. Der Berührungspunkt gelangt in den Wendepunkt, der auf der negativen Seite der Abscissenaxe liegt; Integrale $-\frac{5}{3}K$, $-\frac{5}{3}K$, $\frac{5}{3}K$ Der Berührungspunkt nach ($S = 0$, $y = -1$), wo die Tangente in ($S = -1$, $y = 0$) schneidet; Integrale $-2K$, $-2K$, $3K$.

Die neun Wendepunkte der Curve entsprechen den Argument-

werten $-\frac{1}{3}K$, K, $\frac{7}{3}K$, $-\frac{1}{3}K+\frac{2}{3}L$, $K+\frac{2}{3}L$, $\frac{7}{3}K+\frac{2}{3}L$, $-\frac{1}{3}K+\frac{4}{3}L$, $K+\frac{4}{3}L$, $\frac{7}{3}K+\frac{4}{3}L$. Da $S(K)=1$ schon bekannt ist, so bleiben für die sin am Function, die zu den übrigen 8 Wendepunkten gehört, nur folgende 4 unbekannte Werte: Zwei reelle $S(-\frac{1}{3}K)=S(\frac{7}{3})K$, $S(K+\frac{2}{3}L)=S(K+\frac{4}{3}L)$; zwei imaginäre $S(-\frac{1}{3}K+\frac{2}{3}L)=S(\frac{7}{3}K+\frac{4}{3}L)$, $S(\frac{7}{3}K+\frac{2}{3}L)=S(-\frac{1}{3}K+\frac{4}{3}L)$. Die Gleichung für S ist daher vom vierten Grade, nämlich

$$1+2S-2k^2S^3-k^2S^4=0$$

Denn man findet

$$\frac{\partial^2 y}{\partial S^2}=\frac{l^2}{(1-S)^4y^3}(1+2S-2k^2S^3-k^2S^4)$$

und

$$\frac{\partial^2 y}{\partial S^2}=0$$

ist die Bedingung für das Minimum des Winkels, den die Tangente der Curve mit der Abscissenaxe bildet.

Die Gleichung der schneidenden Geraden sei $y=\alpha S+\beta$. Gebraucht man die Functionszeichen C, D, die durch $C^2=1-S^2$, $D^2=1-k^2S^2$ und durch die Bedingung, dass sie im Ausgangspunkte ($S=0$, $y=1$) beide den Wert 1 haben, definirt sind, so ist

$$y=\frac{CD}{1-S}=\frac{(1+S)D}{C}$$

Man hat also die Gleichung

$$\frac{CD}{1-S}=\alpha S+\beta$$

Das Zeichen y für die Ordinate werde fortan nicht mehr gebraucht; dagegen sollen nun die Argumente in den drei Schnittpunkten mit a, x, y bezeichnet werden. Es sei also $a+x+y=-K$, und wenn $-a-K=c$ gesetzt wird, $x+y=c$. Schreibt man die Gleichg. drei Male hin mit den Argumenten a, x, y, ersetzt Sa, Ca, Da resp. durch $-\frac{Cc}{Dc}$, $-l\frac{S(c)}{D(c)}$, $\frac{l}{Dc}$, so dass die betreffende Gleichg. zu

$$-l^2\frac{Sc}{Dc(Dc+Cc)}=\frac{\beta Dc-\alpha Cc}{Dc}$$

d. h.

$$\frac{Dc-Cc}{Sc\,Dc}=\alpha Cc-\beta Dc$$

wird und eliminirt α, β aus allen drei Gleichungen, so hat man den

Additionssatz in einer besondern Form. Um zu den sonst bekannten Formen derselben zu gelangen, wollen wir zuerst die Gleichung der Geraden in Bezug auf S rational machen. Sie wird

$$V = (S-1)(\alpha S+\beta)^2+(1+S)(1-k^2S^2) = 0$$

und, wenn

$$V = S^3-LS^2+MS-N$$

gesetzt wird, so hat man

$$\begin{array}{llll}(\alpha^2-k^2)L = \alpha^2-2\alpha\beta+k^2; & (1-L)\alpha^2-2\alpha\beta & = k^2(-1-L)\\ (\alpha^2-k^2)M = \beta^2-2\alpha\beta+1; & (M\alpha^2+2\alpha\beta-\beta^2 & = k^2M+1\\ (\alpha^2-k^2)N = \beta^2-1; & -N\alpha^2 \qquad +\beta^2 & = -k^2N+1\end{array}$$

Setzt man der Kürze wegen

$$J = 1-L+M-N = (1-S\alpha)(1-Sx)(1-Sy)$$

und addirt alle drei geordneten Gleichungen, so hat man

$$J\alpha^2 = k^2J+2l^2$$

Die erste Gleichung gibt dann

$$J\,2\alpha\beta = (1-L)(k^3J+2l^2)+k^2J(1+L) = 2k^2J+2l^2(1-L)$$

also

$$J\alpha\beta = k^2J+l^2(1-L) = 1-L+k^2(M-N)$$

Die dritte Gleichung gibt

$$J\beta^2 = N(k^2J+2l^2)+J(1-k^2N) = J+2l^2N$$

Aus den für $J\alpha^2$, $J\alpha\beta$, $J\beta^2$ gefundenen Ausdrücken folgt

$$J\alpha(\alpha-\beta) = l^2(1+L), \quad J\beta(\alpha-\beta) = -l^2(M+N)$$

und durch Subtraction

$$J(\alpha-\beta)^2 = l^2(1+L+M+N) = l^2(1+S\alpha)(1+Sx)(1+Sy)$$

Um endlich α, β zu eliminiren, kann man die gefundenen Ausdrücke in der identischen Gleichung

$$J\alpha\beta \times J(\alpha-\beta)^2-J\alpha(\alpha-\beta)\times J\beta(\alpha-\beta) = 0$$

substituiren und bekommt

$$(1-L+k^2(M-N))(1+L+M+N)+l^2(1+L)(M+N) = 0$$

das ist

$$1-(L^2-2M)+2l^2N+k^2(M^2-2LN)-k^2N^2 = 0$$

wo

$$L = Sa + Sx + Sy, \quad M = Sa(Sx + Sy) + Sx\,Sy, \quad N = Sa\,Sx\,Sy$$

folglich

$$L^2 - 2M = S^2a + S^2x + S^2y; \quad M^2 - 2LN = S^2a(S^2x + S^2y) + S^2x\,S^2y$$

Die Gleichung ist also

$$1 - S^2a - (1 - k^2S^2a)(S^2x + S^2y) + 2l^2Sa\,Sx\,Sy + k^2S^2x\,S^2y - k^2S^2a\,S^2x\,S^2y = 0$$

Um den ungeraden Term $2l^2Sa\,Sx\,Sy$ in einem Quadrate zu verbergen, wollen wir $-S^2a$ durch $-l^2S^2a - k^2S^2a$ und $k^2S^2x\,S^2y$ durch $-l^2S^2x\,S^2y + S^2x\,S^2y$ ersetzen. Dann wird die Gleichung zu

$$-l^2(Sa - Sx\,Sy)^2 + (1 - k^2S^2a)(1 - S^2x - S^2y + S^2x\,S^2y) = 0$$

das ist

$$D^2a\,C^2x\,C^2y - l^2(Sa - Sx\,Sy)^2 = 0$$

Jetzt kann man die Gleichung spalten, und es fragt sich nur noch, welchen der zwei Factoren man annulliren soll. Wenn $x = 0$, $y = 0$, $a = -K$, so ist

$$Da\,Cx\,Cy = l, \quad Sa - Sx\,Sy = -1$$

Man muss also

$$Da\,Cx\,Cy + l(Sa - Sx\,Sy) = 0$$

setzen. Da man die drei Schnittpunkte beliebig mit einander vertauschen darf, so kann man in dieser Gleichung auch a mit x vertauschen und hat

$$Ca\,Dx\,Cy + l(Sx - Sa\,Sy) = 0$$

Setzt man endlich $a = -K - c$ und multiplicirt die Gleichung mit $\frac{Dc}{l}$, so ergeben sich folgende Gleichungen:

$$Cx\,Cy - Cc - Dc\,Sx\,Sy = 0; \quad -Sc\,Dx\,Cy + Dc\,Sx + Cc\,Sy = 0$$

In der ersten Gleichung kann man, weil $x = c - y$ ist, c mit x und y mit $-y$ vertauschen und bekommt

$$Cx = Cc\,Cy + Sc\,Dx\,Sy$$

In der zweiten kann man c mit y und x mit $-x$ vertauschen und bekommt

$$Sx\,Dy = Sc\,Cy - Cc\,Dx\,Sy$$

Multiplicirt man nun die zwei Gleichungen

$$\begin{array}{l|l} Cx = Cc\,Cy + Sc\,Dx\,Sy & \times 1 \\ Sx\,Dy = Sc\,Cy - Cc\,Dx\,Sy & \times i \end{array}$$

resp. mit 1, i und addirt, so erhält man

$$Cx + i\,Sx\,Dy = (Cc + i\,Se)\,(Cy - i\,Dx\,Sy)$$

also

$$Cc + iSc = \frac{Cx + i\,Sx\,Dy}{Cy - i\,Dx\,Sy}$$

und somit

$$S(x+y) = \frac{Sx\,Cy\,Dy + Cx\,Dx\,Sy}{1 - k^2 S^2 x\,S^2 y}; \quad C(x+y) = \frac{Cx\,Cy - Sx\,Dx\,Sy\,Dy}{1 - k^2 S^2 x S^2 y}$$

Substituirt man den Wert von $C(x+y)$ in der Gleichung

$$Cx\,Cy - Cc - Dc\,Sx\,Sy = 0$$

so erhält man auch

$$D(x+y) = \frac{Dx\,Dy - k^2\,Sx\,Cx\,Sy\,Cy}{1 - k^2 S^2 x\,S^2 y}$$

2°.) Durch Betrachtung des Unendlichwerdens und Verschwindens.

$S(a+x)$ als Function von x wird unendlich in

$$x = 2mK + (2n+1)\,L - a$$

und nur in diesen Punkten, und zwar einfach unendlich. In

$$x = 4mK + (2n+1)\,L - a \quad \text{ist}$$

$$Sx = -\frac{1}{kSa}$$

verschwindet also $1 + k\,Sa\,Sx$ und zwar einfach; in

$$x = (4m+2)\,K + (2n+1)\,L - a \quad \text{ist}$$

$$Sx = \frac{1}{kSa}$$

verschwindet also $1 - k\,Sa\,Sx$ und zwar einfach. Der Ausdruck $1 - k^2 S^2 a\,S^2 x$ verschwindet also überall einfach, wo $S(a+x)$ unendlich wird und sonst nirgends. Also wird

$$(1 - k^2 S^2 a\,S^2 x)\,.\,S(a+x)$$

in $$x = 2mK + (2n+1)\,L - a$$

nicht mehr unendlich, wohl aber in allen Punkten

$$x = 2mK + (2n+1)\,L$$

und zwar zweifach. Wenn der Ausdruck in Form einer ganzen Function von Sx, Cx, Dx ausgedrückt werden kann, so muss er daher vom zweiten Grade sein. Weil er durch den Schnitt $2K$ in sein

entgegengesetztes übergeht, so muss er in Bezug auf Sx, Cx allein von ungeradem Grade, folglich linear sein; und weil er durch den Schnitt $2L$ nicht geändert wird, so muss er in Bezug auf Cx, Dx allein von geradem, also vom zweiten Grade sein. Er kann also nur aus den zwei Termen $Cx\,Dx$ und Sx bestehen. Um den ersten Term wegzuschaffen, betrachten wir den Ausdruck

$$f(x) = (1 - k^2 S^2 a S^2 x)(S(a+x) - S(a-x))$$

Die Function

$$f(L+y) = \left(1 - \frac{S^2 a}{S^2 y}\right)\left(\frac{1}{kS(a+y)} - \frac{1}{kS(a-y)}\right)$$
$$= \frac{(S^2 a - S^2 y)(S(a+y) - S(a-y))}{k^2 S^2 y\, S(a+y)\, S(a-y)}$$

geht für ein sehr kleines y in tiefster Näherung in $2\,\frac{Ca\,Da}{ky}$ über, wird also nur einfach unendlich.

$$f(-x) = -f(x); \qquad f(2K+x) = -f(x)$$
$$f(2L+x) = f(x)$$

Setzt man im Ausdrucke für $f(L+y)$, $y = a+w$, wo w sehr klein sein soll, so wird

$$S^2 a - S^2 y = -2\,Sa\,Ca\,Da\,.\,w, \qquad S(a-y) = -w$$

also ist

$$f(L+a) = 2\,\frac{Ca\,Da}{k\,Sa} = f(-L+a)$$

also

$$f(L-a) = -2\,\frac{Ca\,Da}{k\,Sa}$$

Wenn endlich x sehr klein wird, so ist

$$f(x) = 2Ca\,Da\,.\,x$$

Ueberall also, wo Sx unendlich oder null wird, wird es auch $f(x)$ und umgekehrt, und in allen diesen Punkten ist

$$\frac{f(x)}{S(x)} = 2Ca\,Da$$

Zum Ueberfluss mag man noch untersuchen, ob $f(x)$ noch anderswo verschwinden könne, als wo Sx verschwindet. Die Punkte, wo der Factor $1 - k^2 S^2 a S^2 x$ verschwindet, sind schon erledigt. Es bleiben nur noch diejenigen übrig, wo der andere Factor $S(a+x) - S(a-x)$ verschwindet. Denkt man sich nun das zweiblättrige S-Feld mit den Verzweigungspunkten $-\frac{1}{k}$, -1, 1, $\frac{1}{k}$ und mit den zwei Perioden

$4K$ und $2L$ des Arguments, die den zwei ungewöhnlichen Zusammenhängen entsprechen, so sieht man, dass abgesehen von den Perioden, demselben Punkte S im einen Blatte das Argument x, im andern $2K - x$ zugehört. Aus der Gleichung $Sy = S(z)$ folgt also mit Notwendigkeit entweder

$$y - z = 4mK + 2nL$$

oder

$$y + z = (4m + 2)K + 2nL$$

Aus

$$S(a + x) - S(a - x) = 0$$

kann man aber nicht auf

$$2a = (4m + 2)K + 2nL$$

schliessen, weil a schon zufällig gegeben ist, sondern nur auf

$$2x = 4mK + 2nL$$

und hieraus entweder auf

$$x = 2mK + (2n + 1)L$$

wo $f(x)$ nicht verschwindet, oder auf

$$x = 2mK + 2nL$$

wo Sx und $f(x)$ zugleich verschwinden. Die zwei Functionen $S(x)$ und $f(x)$ haben also alle Nullpunkte gemein.

Die Function $\frac{f(x)}{S(x)}$ hat in der S-Ebene überall nur einen Wert und wird nirgends unendlich (und nirgends null), folglich ist sie keine Function, sondern eine Constante, nämlich $2Ca\,Da$;

$$(1 - k^2 S^2 a\, S^2 x)(S(a + x) - S(a - x)) = 2Ca\,Da\,Sx$$

Vertauscht man a mit x, so hat man

$$(1 - k^2 S^2 a\, S^2 x)(S(a + x) + S(a - x)) = 2Sa\,Cx\,Dx$$

und die Addition ergibt

1) $$(1 - k^2 S^2 a\, S^2 x)\, S(a + x) = Sa\,Cx\,Dx + Ca\,Da\,Sx$$

Es sei

$$m^2 = 1 - k^2 S^2 a\, S^2 x = C^2 a + S^2 a\, D^2 x = C^2 x + D^2 a\, S^2 x$$

$$m \cos\varphi = Ca, \quad m \sin\varphi = Sa\,Dx; \quad m \cos\chi = Cx, \quad m \sin\chi = Da\,Sx$$

Dann ist

$$Sa\,Cx\,Dx = m^2 \sin\varphi \cos\chi; \quad Ca\,Da\,Sx = m^2 \cos\varphi \sin\chi$$

Die Gleichung 1) verwandelt sich also in

$$S(a+x) = \sin(\varphi+\chi)$$

Wenn $x = 0$, so ist $m = 1$, $\cos\varphi = Ca$, $\sin\varphi = Sa$, $\cos\chi = 1$, $\sin\chi = 0$, also $\chi = 0$. Unter denselben Voraussetzungen ist die Gleichung

$$C(a+x) = \cos(\varphi+\chi)$$

richtig. Die Gleichung ist also überhaupt richtig, weil der andere Fall

$$C(a+x) = -\cos(\varphi+\chi)$$

ausgeschlossen ist. Folglich

2) $$(1 - k^2 S^2a\, S^2x)\, C(a+x) = Ca\, Cx - Sa\, Da\, Sx\, Dx$$

Ferner ist

$$m^2 = D^2a + k^2 S^2a\, C^2x = D^2x + k^2\, C^2a\, S^2x$$

man kann also

$$Da = m\cos\psi, \quad kSa\, Cx = m\sin\psi, \quad Dx = m\cos w, \quad k\, Ca\, Sx = m\sin w$$

setzen. Die Gleichung 1) wird

$$kS(a+x) = \sin(\psi+w)$$

Also

$$D(a+x) = \cos(\psi+w)$$

und man hat

3) $$(1 - k^2 S^2a\, S^2x)\,.\, D(a+x) = Da\, Dx - k^2\, Sa\, Ca\, Sx\, Cx$$

3°.) Beweis mittelst zweier Kreise, von denen der eine innerhalb des andern liegt, ohne den Mittelpunkt mit ihm gemein zu haben.

Wenn in einem einzigen Augenblick eine punktförmige Masse m in Bezug auf ein rechtwinkliges System die Coordinaten a, b, c; ein andrer Massenpunkt m' die Coordinaten a', b', c' etc. hat; wenn x, y, z die Coordinaten eines freien Punktes P sind, der von m, m', m'' ... Gravitationswirkungen erfährt, und wenn

$$r^2 = (a-x)^2 + (b-y)^2 + (c-z)^2$$
$$r'^2 = (a'-x)^2 + (b'-y)^2 + (c'-z)^2$$

etc., so heisst

$$V = \frac{m}{r} + \frac{m'}{r'} + \frac{m''}{r''} + \ldots$$

als Function der Coordinaten x, y, z des freien Punktes P be-

trachtet, das Potentiel des Massensystems (m, m', m'' ...) in Bezug auf den Punkt P. Die Componenten der Beschleunigung, welche der Punkt P durch die Gravitationswirkung des Massensystems erfährt, sind

$$\frac{\partial V}{\partial x}, \quad \frac{\partial V}{\partial y}, \quad \frac{\partial V}{\partial z}$$

Das Potential gewährt also den Vorteil der Einheit gegenüber der Dreiheit der Componenten der Beschleunigung. Wir wollen das Potential eines Kreisbogens in Bezug auf einen innern Punkt seiner Ebene berechnen.

Der Durchmesser AB eines Kreises (Fig. 1.) werde durch den Pol O, auf den das Potential eines Kreisbogens AP sich bezieht, in einen grössern Teil $AO = 1$ und einen kleineren $OB = l$ geteilt. M sei Mittelpunkt; Wkl. $ABP = \varphi$, $OP = r$. Die Projection von OP auf BP ist gleich der von AO, also $= \cos\varphi$; die von OP auf AP gleich der von OB, also $l\sin\varphi$; folglich

$$r^2 = \cos^2\varphi + l^2\sin^2\varphi$$

Der Radius des Kreises ist $\frac{1+l}{2}$, der Mittelpunktswinkel $AMP = 2\varphi$, der Bogen AP also gleich $(1+l)\varphi$. Das Bogenelement PP', das, wenn man vom constanten infinitesimalen Querschnitt und von der Dichtigkeit absieht, als Massenelement gelten darf, ist daher $(1+l)d\varphi$. Das Element des Potentials V ist also

$$dV = (1+l)\frac{d\varphi}{r}$$

Das Potential des Kreisbogens in Bezug auf einen innern Punkt seiner Ebene ist also ein elliptisches Integral erster Art, das $(1+l)$-fache des Normalintegrales, wenn l den complementären Modul bedeutet. Wenn

$$k^2 + l^2 = 1, \quad \text{so ist} \quad r^2 = 1 - k^2\sin^2\varphi$$

Bedeutet x das Argument, so ist

$$\sin\varphi = Sx, \quad r = Dx, \quad V = (1+l)x$$

Der Kreis $APBQA$, (Fig. 2.) Mittelpunkt M, Pol O seien dieselben wie vorhin. Ausser dem Punkte P (Wkl. $ABP = \varphi$) auf der positiven Seite der Abscissenaxe wähle man noch einen zweiten Q(Wkl. $ABQ = \chi$) auf der negativen Seite und verlange, dass das Potential des Bogens QP in Bezug auf O constant bleibe, während die Punkte P und Q sich auf der Kreislinie bewegen. Wenn $\varphi = \mathrm{am}\, x$, $\chi = \mathrm{am}\, y$, so sei $x + y = c$, $\mathrm{am}\, c = \gamma$. Das Potential des Bogens QP in Bezug auf O soll also den Wert $(1+l)c$ behalten.

Die unendlich nahe auf die Sehne PQ (Fig. 3.) folgende Sehne schneide sie in T; dann darf man die Dreiecke TPP' und TQQ' als ähnlich ansehen, weil jede Sehne von der Kreislinie unter gleichen Winkeln geschnitten wird; folglich ist

$$\frac{PP'}{TP} = \frac{QQ'}{TQ}$$

Damit aber das Potential sich nicht ändere, muss

$$\frac{PP'}{OP} = \frac{QQ'}{OQ}$$

sein. Also ist

$$\frac{QT}{OQ} = \frac{TP}{OP}$$

Die Gerade OT halbirt daher den Winkel QOP. Macht man nun den Winkel TOE dem Winkel OTP gleich (E liege auf der verlängerten Sehne), so ist ETO ein gleichschenkliges Dreieck; E Mittelpunkt eines durch O und T gehenden Kreises.

Wkl. EOP = Wkl. EOT — Wkl. POT = Wkl. ETO — Wkl. TOQ = Wkl. OQE. Weil die zwei Dreiecke EOP und EQO ausserdem noch den Winkel in E gemein haben, so sind sie einander ähnlich. Daher

$$\frac{EP}{EO} = \frac{EO}{EQ} = \frac{OP}{OQ} = \frac{TP}{TQ}$$

und weil $EO = ET$, so ist

$$\frac{EP}{ET} = \frac{ET}{EQ}\,\frac{PT}{TQ}$$

olglich

$$\overline{EO}^2 = \overline{ET}^2 = \overline{EP} \cdot \overline{EQ}$$

Also ist $\overline{EO}$ gleich der Länge der aus E an den Kreis $APBQ$ gezogenen Tangente. EF sei diese Tangente. Man ziehe EB senkrecht auf die Abscissenaxe AB. Dann ist

$$\overline{ON}^2 + \overline{NE}^2 = \overline{OE}^2 = \overline{EF}^2 = \overline{EM}^2 - \overline{MF}^2 = \overline{MN}^2 + \overline{NE}^2 - \overline{MA}^2$$

$$\overline{ON}^2 = \overline{MN}^2 - \overline{MA}^2 = \overline{NB}^2 \cdot \overline{NA}$$

folglich ist BO gleich lang wie die aus N an den Kreis $AFPBQ$ gezogene Tangente. Zieht man in T auf die Sehne PQ eine Senkrechte, welche der Abscissenaxe in C begegne, und beschreibt um den Mittelpunkt C mit dem Halbmesser CT einen Kreis, so ist ET Tangente an diesen zweiten Kreis, und man beweist für diesen

zweiten Kreis, dass die aus N an ihn gezogene Tangente gleich NO ist, gerade sowie für den ersten Kreis geschehen ist.

Umgekehrt, wenn aus einem Punkte N der Abscissenaxe (Mittelpunktsgeraden) an zwei (oder mehrere) Kreise, deren Mittelpunkte M, C in der durch N gehenden Mittelpunktsgeraden liegen, gleich lange Tangenten gehen, denen das Stück NO der Mittelpunktsgeraden gleich gemacht wird, und man zieht in D auf die Mittelpunktsgerade eine Senkrechte (die Radicalaxe), so hat jeder Punkt E der Radicalaxe die Eigenschaft, gleich lange Tangenten an beide Kreise (überhaupt an alle Kreise der Schaar, liegen sie links oder rechts der Radicalaxe) zu senden, und ihre Länge ist gleich EO; (der Punkt O ist der eine der zwei Schaarenkreise, deren Halbmesser unendlich klein geworden ist) und wenn T Berührungspunkt der an den zweiten Kreis gehenden Tangente ist, so ist $OE(=EF)$ geometrisches Mittel zwischen EP und EQ. Der gemeinsame Winkel E der zwei Dreiecke EPO, EOQ wird also von proportionalen Seiten eingeschlossen. Die Dreiecke sind daher ähnlich; folglich ist

$$\frac{OP}{OQ} = \frac{EP}{ET} = \frac{ET}{EQ} = \frac{PT}{TQ}$$

Von welchem Punkte R der Radicalaxe aus man an irgend einen Schaarkreis, der innerhalb des ersten Kreises liegt, eine Tangente ziehen mag, die den innern Kreis in T berührt, und den äussern in P, Q schneidet, immer wird der Berührungspunkt T die Sehne PQ in zwei Teile teilen, die sich zu einander wie die Strahlen OP und OQ verhalten. — Die Bedingung der Constanz des Kreisbogens QP ist also erfüllt, wenn man den zweiten Kreis (Mittelpunkt C, Radius CT) festhält und an ihm die Sehne PQ des ersten Kreises fortgleiten lässt.

Für die geometrische Vorstellung ist jetzt die Integration der Differentialgleichung

$$\frac{d\varphi}{\Delta\varphi} + \frac{d\chi}{\Delta\chi} = 0$$

vollzogen; denn man kann sich der sichern Ueberzeugung hingeben, dass man im Stande sein wird, durch trigonometrische Formeln die der Figur entsprechende Abhängigkeit der Amplituden φ und χ von einander auszudrücken. Diese Form des Additionssatzes ist geometrisch interessant. Denkt man sich Q als beliebig gewählten Anfangspunkt und zieht nun von diesem aus eine erste Tangente QP an den zweiten Kreis, so ist der Punkt P durch das Argument

$$x = -y + c$$

bestimmt. Von P aus ziehe man eine zweite Tangente an den innern Kreis, die den äussern in P_2 trifft; dann gehört zu P_2 das Argument $-y+2c$: aus P_2 ziehe man eine Sehne P_2P_3, die den innern Kreis berührt; ;dann ist P_3 durch das Argument $-y+3c$ bestimmt, und so fort. Im allgemeinen wird man eine endlose gebrochene Linie bekommen, die dem äussern Kreis eingeschrieben und dem innern umschrieben ist. Das Potential des ganzen äussern Kreises in Bezug auf O ist $(1+l).2K$, die entsprechende Zunahme des Argumentes also $2K$. Wenn nun im besondern

$$c = \frac{m}{n}.2K$$

ist, wo m, n zwei positive zu einander prime ganze Zahlen bedeuten, so gehört zum Punkte P_n das Argument $-y+2mK$; dieser Punkt P_n fällt also mit Q zusammen; die gebrochene Linie hat sich geschlossen, und zwar nach m Umläufen. Man hat ein Vieleck, dessen Ecken in der äussern Kreislinie liegen und dessen Seiten den innern Kreis berühren. Man kann den Anfangspunkt Q verschieben; immer wird die gebrochene Linie fortfahren, sich nach m Umläufen zu schliessen und ein n-Eck zu bleiben.

(In dieser Zeichnung ist der Bequemlichkeit wegen χ negativ angenommen). Vom laufenden Punkte P des äussern Punktes aus ziehe man eine Gerade durch den Pol Q, welche den äussern Kreis noch in P', den innern in R und R' und die Radicalaxe in G schneide. Vom Anfangspunkte G an haben der Reihe nach die Punkte P, R, O, R', P' die Abstände p, r, n, r', p'. Dann ist

$$pp' = rr' = n^2$$

es sei noch

$$PT = t$$

Versucht man nun P als Anfangspunkt zu gebrauchen, so ist

$$(r-p)(r'-p) = rr'+p^2-p(r+r') = p(p'+p-(r+r'))$$
$$= 2p.\left(\frac{p+p'}{2} - \frac{r+r'}{2}\right)$$

ebenso

$$(n-p)^2 = 2p\left(\frac{p+p'}{2} - n\right)$$

OP (früher mit r bezeichnet) mag ϱ heissen. Wenn die Mitten der Sehnen PP' und RR' resp. M', C, sind, so haben diese zwei Punkte von G aus die Abstände $\frac{p+p'}{2}$, $\frac{r+r'}{2}$. Weil

$$\overline{PR} \cdot \overline{PR'} = t^2$$

ist, so hat man durch Elimination von $2p$ die Gleichung

$$\frac{t^2}{\varrho^2} = \frac{C'M'}{OM'} = \frac{MC}{MO}$$

Nicht nur ist also, wie wir schon wissen,

$$\frac{TP}{OP} = \frac{TQ}{OQ}$$

sondern dieses Verhältniss ändert sich überhaupt nicht, während P den äussern Kreis durchläuft. Der hier bewiesene Satz, allgemein ausgesprochen, lautet:

Wenn von einem Punkte eines beliebigen Schaarkreises aus Tangenten an alle innern Kreise derselben Schaar gehen, so verhalten sich die Quadrate der Tangenten, wie die Abstände der Mittelpunkte der betreffenden innern Kreise vom festen Mittelpunkte des äussern Kreises.

Entweicht der Mittelpunkt M des äussern Kreises in unendliche Ferne, und beachtet man nur solche innern Kreise, die in endlicher Nähe um O herum liegen, so nähert sich das Verhältniss der Abstände irgend zweier Mittelpunkte derselben von M ohne Ende dem Werte 1; und der äussere Kreis selbst geht in die Radicalaxe. Der Satz, dass jeder Punkt der Radicalaxe gleich lange Tangenten an alle Schaarkreise sendet, ist also als besonderer Fall in dem zuletzt ausgesprochenen Satze enthalten.

Man findet leicht

$$AN = \frac{1}{1-l}, \quad ON = \frac{l}{1-l}, \quad BN = \frac{l^2}{1-l}$$

Wenn Q mit A zusammenfällt, so muss Wkl. $ABP = \gamma$ werden, weil wir $x+y=c$, am. $c = \gamma$ angenommen haben. Daher ist

$$AP = (1+l)\sin\gamma$$

Weil $AO = 1$, $OP = \Delta\gamma$, so ist

$$AT = \frac{1}{1+\Delta\gamma} \cdot AP = \frac{(1+l)\sin\gamma}{1+\Delta\gamma} = \frac{AT}{AO}$$

gleich dem erwähnten constanten Verhältniss $\sqrt{\frac{MC}{MO}}$. Weil Wkl. $ACT = \gamma$ ist, so ergibt sich

$$AC = \frac{1+l}{1+\Delta\gamma}, \quad CT = \frac{(1+l)\cos\gamma}{1+\Delta\gamma}$$

Halbmesser des innern Kreises. (Es wird vorteilhaft sein, alle Linienmaasse durch AC zu dividiren). Da wir durch diese zwei Werte die Lage des innern Kreises kennen, so denken wir uns die Sehne PQ wieder so gezogen, dass P und Q auf entgegen gesetzten Seiten der Mittelpunktsgeraden sich befinden, und bezeichnen die Mitte der Sehne PQ mit M'. Dann ist

$$\text{Wkl. } QMP = 2(\varphi+\chi), \quad \text{Wkl. } QMM' = \text{Wkl. } M'MP = \varphi+\chi$$

und wenn man

$$\text{Wkl. } QMA = 2\chi$$

subtrahirt, so ergibt sich

$$\text{Wkl. } AMM' = \text{Wkl. } ACT = \varphi-\chi$$

Also ist

$$PQ = (1+l)\sin(\varphi+\chi), \quad \frac{PQ}{AC} = (1+\Delta\gamma(\varphi+\chi)$$

Weil das constante Verhältniss $\sqrt{\frac{MC}{MO}} = \frac{\text{Tangente}}{\text{Polstrahl}}$ durch $\frac{AC}{AO}\cdot\sin\gamma$ ausgedrückt werden kann, so ist

$$\frac{TP}{AC} = \sin\gamma\,.\,\Delta\varphi, \quad \frac{QT}{AC} = \sin\gamma\,\Delta\chi$$

Weil

$$\frac{AM}{AC} = \frac{1+\Delta\gamma}{2}$$

so ist

$$\frac{MC}{AC} = \frac{1-\Delta\gamma}{2}$$

ferner ist

$$\frac{MM'}{AC} = \frac{1+\Delta\gamma}{2}\cos(\varphi+\chi); \quad \frac{CT}{AC} = \cos\gamma$$

Weil

$$\frac{CT}{AC} = \frac{MM'}{AC} + \frac{MC}{AC}\cos(\varphi-\chi)$$

so hat man

$$\cos\gamma = \frac{1+\Delta\gamma}{2}\cos(\varphi+\chi) + \frac{1-\Delta\gamma}{2}\cos(\varphi-\chi) = \cos\varphi\cos\chi - \Delta\gamma\,.\,\sin\varphi\sin\chi$$

Ferner ist

$$M'T = MC.\sin(\varphi-\chi)$$

daher

$$\frac{TP}{AC} = \frac{1}{2}\frac{PQ}{AC} - \frac{MC}{AC}\sin(\varphi-\chi)$$

das heisst

$$\sin\gamma\,\Delta\varphi = \frac{1+\Delta\gamma}{2}\sin(\varphi+\chi) - \frac{1-\Delta\gamma}{2}\sin(\varphi-\chi)$$

ähnlicher Ausdruck für $\frac{QT}{AC}$; also

$$\sin\gamma\,\Delta\varphi = \Delta\gamma\sin\varphi\cos\chi + \cos\varphi\sin\chi$$
$$\sin\gamma\,\Delta\chi = \sin\varphi\cos\chi + \Delta\gamma\cos\varphi\sin\chi$$

Führt man statt der Amplituden φ, χ, γ die Argumente x, y, $c = x+y$ ein, so hat man folgende drei Gleichungen gewonnen

$$C(x+y) = Cx\,Cy - D(x+y)\,Sx\,Sy$$
$$S(x+y)\,Dx = D(x+y)\,Sx\,Cy + Cx\,Sy$$
$$S(x+y)\,Dy = Sx\,Cy + D(x+y)\,Cx\,Sy$$

von denen aus es leicht ist, zu andern bekannten Formeln zu gelangen.

4°.) Der von Euler gefundene älteste Beweis des Additionssatzes.

Derselbe entstand aus dem Versuche die Differentialgleichung

$$\frac{dx}{R(x)} + \frac{dy}{R(y)} = 0$$

wo $(R(x))^2$ gleich einer ganzen Function vierten Grades von x ist, durch eine Gleichung zu integriren, deren linke Seite eine ganze Function von x und y ist, die in Bezug auf jede einzelne dieser zwei Variabeln nur auf den zweiten Fall sich erhebt (in Bezug auf beide zugleich, also den vierten Grad erreicht), während die rechte Seite null ist. Die Coefficienten in dieser Gleichung sind wol algebraische, aber nicht rationale Functionen der arbiträren Integrationsconstante. Das Polynom der Integralgleichung, das die Form $(x, 1)^2\,(y, 1)^2$ hat, muss in Bezug auf x, y symmetrisch sein, weil die Differentialgleichung in Bezug auf x, y symmetrisch ist. Es enthält daher Coefficienten für die Terme x^2y^2, (x^2y+xy^2), (x^2+y^2), xy, $(x+y)$, 1, sechs an der Zahl. Da man aber mit einem derselben, wenn er nicht verschwindet, die fünf übrigen dividiren kann, so sind nur fünf unbekannte Coefficienten zu zählen, die als Functionen einer einzigen Integrationsconstanten dargestellt werden müssen. Nach x geordnet sei das Polynom

$$V = Ax^2 + 2Bx + C$$

wo A, B, C ganze Functionen zweiten Grades von y allein bedeuten; nach y geordnet sei

$$V = Dy^2 + 2Ey + F$$

wo D, E, F der Reihe nach dieselben Functionen von x bedeuten, welche A, B, C von y waren. Da nun

$$\tfrac{1}{2}\frac{\partial V}{\partial x} = Ax + B; \quad \tfrac{1}{2}\frac{\partial V}{\partial y} = Dy + E$$

so ist

$$(Ax + B)dx + (Dy + E)dy = 0$$

also auch

$$\frac{dx}{Dy + E} + \frac{dy}{Ax + B} = 0, \quad \text{wenn} \quad V = 0$$

ist. Diese Gleichung gibt aber

$$(Dy + E)^2 = E^2 - DF$$

ganze Function vierten Grades von x allein;

$$(Ax + B)^2 = B^2 - AC$$

dieselbe Function vierten Grades von x allein. Die Differentialgleichung hat also wirklich dieselbe Form, wie die vorgelegte. Man muss nun bewirken, dass $E^2 - DF$ sich von $R^2(x)$ bloss durch einen constanten Factor unterscheidet. Dieses zählt für vier Bedingungen, weil eine ganze Function vierten Grades von x fünf Terme zählt. Da die fünf unbekannten Coefficienten nur vier Bedingungen ergeben, so ist wirklich noch Spielraum für die einzige arbiträre Integrationsconstante vorhanden.

Wenn das Polynom alle fünf Terme hat, so verursacht die Zergliederung des Systems der vier Bedingungen für die fünf unbekannten Constanten beträchtliche Schwierigkeiten. Ich will daher den Gegenstand nicht in derselben Allgemeinheit wie Euler behandeln, sondern von Anfang an die Normalform des elliptischen Integrales erster Art, auf die man ja jedes andere solche Integrale zurückführen kann, gebrauchen, also

$$(R(x))^2 = (1 - x^2)(1 - k^2x^2) = 1 - (1 + k^2)x^2 + k^2x^4$$

setzen. Die zu integrirende Differentialgleichung sei

$$\frac{ds}{R(s)} + \frac{dt}{R(t)} = 0$$

Auf transcendente Weise ist sie sogleich integrirt, indem man setzt

$$s = Sx, \quad t = Sy, \quad x + y = c$$

wo das Argument c die Integrationsconstante ist. Die algebraische Integralgleichung sei $V = 0$, wo

$$V = As^2 + 2Bs + C = Dt^2 + 2Et + F$$

wo A, B, C der Reihe nach dieselben ganzen Functionen zweiten Grades von t allein bedeuten, welche D, E, F von s allein sind. Da man das Polynom V mit irgend einem constanten Factor multipliciren darf (Null ausgeschlossen), so steht es einem frei, unmittelbar

$$E^2 - DF = (R(s))^2$$

als identische Gleichung zu setzen; man hat dann fünf Bedingungen für die sechs unbekannten Constanten im Polynom V. Um die Erörterung von Fällen, die sich als unstatthaft erweisen würden, abzuschneiden, beginne ich mit der auf den ersten Blick ungerechtfertigten Behauptung, dass man das Polynom V als gerade in Bezug auf x, y zusammen annehmen dürfe, das heisst, dass es sich nicht ändere, wenn man darin zugleich $-x$, $-y$ für x, y setze. Denn, weil $-x-y=-c$ ist, so heisst das: die Coefficienten in V sind alle samt gerade oder alle ungerade Functionen von c. Die Coefficienten von (x^2y+xy^2) und von $(x+y)$ sind dann null, folglich

$$V = \alpha s^2 t^2 + \beta(s^2+t^2) + 2\gamma s t + \delta$$
$$D = \alpha s^2 + \beta, \qquad E = \gamma s, \qquad F = \beta s^2 + \delta$$

und die Gleichung

$$E^2 - DF = R^2(s)$$

d. h.

$$\gamma^2 s^2 - (\alpha s^2 + \beta)(\beta s^2 + \delta) = 1 - (1+k^2)s^2 + k^2 s^4$$

soll identisch richtig sein (in Bezug auf s). Da nur 1, s^2, s^4 darin vorkommen, so enthält die identische Gleichung nur drei Bedingungen für die vier unbekannten Constanten α, β, γ, δ. Eine von diesen wird also arbiträr bleiben, und die drei übrigen werden als Functionen derselben bestimmt, was dem Charakter der Aufgabe angemessen ist. Die Behauptung ist jetzt gerechtfertigt und man sieht ein, dass, wenn man auch fünf Bedingungen mit sechs unbekannten Constanten gehabt hätte, doch mit Notwendigkeit (nach Ausscheidung unstatthafter Fälle) sich würde ergeben haben, dass die Coefficienten von (s^2t+st^2) und von $(s+t)$ null sind.

Die drei Bedingungen sind:

$$-\beta\delta = 1; \qquad \gamma^2 - \alpha\delta - \beta^2 = -(1+k^2); \qquad -\alpha\beta = k^2$$

Wenn $y=0$, so ist

$$x = c, \quad t = 0, \quad s = S(c)$$

Aus

$$V = Dt^2 + 2Et + F = 0 \quad \text{und} \quad Dt + E = R(s) = Cx\,Dx$$

folgt also, wenn $t=0$ ist, $F=0$, das heisst

$$\beta S^2c + \delta = 0 \quad \text{und} \quad E = R(Sc)$$

das heisst

$$\gamma Sc = Cc\,Dc$$

Eliminirt man β aus $-\beta\delta = 1$ und $\beta . S^2c + \delta = 0$, so ergibt sich

$$\delta^2 = S^2c, \quad \beta = -\frac{1}{\delta}, \quad \alpha = k^2\delta$$

$$\delta V = k^2 S^2c . s^2t^2 - (s^2 + t^2) + 2\frac{\delta}{Sc} Cc\,Dc . st + S^2c$$

Denkt man sich s, t, folglich auch Sc sehr klein, und vernachlässigt die sechste Ordnung des Termes $k^2S^2c . s^2t^2$ (indem

$$Cc\,Dc = 1 - \frac{1+k^2}{2}S^2 + \ldots$$

durch 1 ersetzt wird, vernachlässigt man ohnehin die vierte Ordnung neben der zweiten), so muss die Gleichung die Form

$$-(s+t)^2 + S^2c = 0$$

nicht die andere

$$-(s-t)^2 + S^2c = 0$$

annehmen; also muss

$$\delta = -Sc$$

sein. Dann ist

$$\beta = \frac{1}{Sc}, \quad \alpha = -k^2 Sc, \quad \gamma = \frac{Cc\,Dc}{Sc}, \quad \delta = -Sc$$

endlich ist

$$Sc . V = -k^2 S^2c . s^2t^2 + s^2 + t^2 + 2Cc\,Dc . st - S^2c = 0$$

die verlangte Integralgleichung.

Weil

$$D = \frac{1}{Sc}(1 - k^2 S^2c\,S^2x), \qquad E = \frac{Cc\,Dc}{Sc} Sx$$

so wird die Gleichung

$$Dt + E = R(s)$$

mit Sc multiplicirt, zu

$$(1 - k^2 S^2c\,S^2x)\,Sy = Sc\,Cx\,Dx - Cc\,Dc\,Sx$$

Da $y = c - x$, so bleibt diese Gleichung bestehen, wenn man c und y mit einander vertauscht und x durch $-x$ ersetzt; dann wird

$$Sc = \frac{Sx\,Cy\,Dy + Cx\,Dx\,Sy}{1 - k^2 S^2x\,S^2y}$$

Weniger leicht gelangt man von $V = 0$ aus zu dieser Gleichung. Die in Bezug auf Sx Sy rationale Integralgleichung ist nämlich

$$-(1+k^2S^2xS^2y)S^2c+S^2x+S^2y+2Cc\,Dc\,.\,Sx\,Sy=0$$

Soll sie nun in Bezug auf Sc (was man als die arbiträre Integrationsconstante betrachten kann) rational werden, so muss man beide Seiten derselben mit

$$-(1+k^2S^2xS^2y)S^2c+S^2x+S^2y-2Cc\,Dc\,.\,Sx\,Sy$$

multipliciren und bekommt

$$[-(1+k^2S^2xS^2y)S^2c+S^2x+S^2y]^2-4S^2xS^2y(1-(1+k^2)S^2c+k^2S^4c)=0$$

Die linke Seite sei mit LS^4c-2MS^2c+N identisch. Dann ist

$$L=(1-k^2S^2xS^2y)^2,\quad N=(S^2x-S^2y)^2,\quad M=(1+k^2S^2xS^2y)(S^2x+S^2y)$$
$$-2(1+k^2)S^2xS^2y=S^2x\,(1-(1+k^2)S^2y+k^2S^4y)$$
$$+S^2y(1-(1+k^2)S^2x+k^2S^4x)=S^2x\,C^2y\,D^2y+C^2x\,D^2x\,S^2y$$

Zugleich ist

$$(Sx\,Cy\,Dy)^2-(Cx\,Dx\,Sy)^2=(S^2x-S^2y)(1-k^2S^2xS^2y)$$

Also

$$M^2-LN=4(Sx\,Cy\,Dy)^2(Cx\,Dx\,Sy)^2$$

Man muss die Lösung

$$LS^2c-M=2Sx\,Cy\,Dy\,.\,Cx\,Dx\,Sy$$

wählen und bekommt

$$(1-k^2S^2xS^2y)^2S^2c=(Sx\,Cy\,Dy+Cx\,Dx\,Sy)^2$$

wo man wiederum

$$(1-k^2S^2xS^2y)Sc=Sx\,Cy\,Dy+Cx\,Dx\,Sy$$

wählen muss. Sonst kann man die Gleichung

$$-(1+k^2S^2xS^2y)S^2c+S^2x+S^2y+2Cc\,Dc\,.\,Sx\,Sy=0$$

auch wie folgt behandeln. Weil

$$S^2x+S^2y=1+S^2xS^2y-C^2xC^2y$$

ist, so wird die Gleichung zu

$$C^2c+D^2cS^2xS^2y-C^2xC^2y+2Cc\,Dc\,.\,Sx\,Sy=0$$

das ist zu

$$(Cx+Dc\,Sx\,Sy)^2-C^2xC^2y=0$$

und nun muss man den Factor

$$Cc + Dc\,Sx\,Sy - Cx\,Cy = 0$$

wählen, bekommt also die bekannte Gleichung

$$Cc = Cx\,Cy - Dc\,Sx\,Sy$$

5°.) Beweis von Lagrange.

Es sei

$$x+y=c, \quad \text{am.}x=\varphi, \quad \text{am.}y=\chi, \quad \text{am.}c=\gamma, \quad \varphi+\chi=p$$
$$\varphi-\chi=q$$

Dann ist

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=Dx; \quad \frac{\partial\chi}{\partial x}=-Dy$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}=-k^2\,Sx\,Cx=-\tfrac{1}{2}k^2\sin(p+q)$$

$$\frac{\partial^2\chi}{\partial x^2}=-k^2\,Sy\,Cy=-\tfrac{1}{2}k^2\sin(p-q)$$

also

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}=-k^2\sin p\cos q, \quad \frac{\partial^2 q}{\partial x^2}=-k^2\cos p\sin q$$

Ferner ist

$$\frac{\partial p}{\partial x}\cdot\frac{\partial q}{\partial x}=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2-\left(\frac{\partial\chi}{\partial x}\right)^2$$
$$=D^2x-D^2y=-k^2(\sin^2\varphi-\sin^2\chi)=-k^2\sin p\sin q$$

Dividirt man mit dieser dritten Gleichung jede der zwei vorigen, so bekommt man

$$\frac{\frac{\partial}{\partial x}\log\frac{\partial p}{\partial x}}{\frac{\partial q}{\partial x}}=\frac{\cos q}{\sin q}, \quad \frac{\frac{\partial}{\partial x}\log\frac{\partial q}{\partial x}}{\frac{\partial q}{\partial x}}=\frac{\cos p}{\sin p}$$

also

$$d\log\frac{\partial p}{\partial x}=d\log\sin q, \quad d\log\frac{\partial q}{\partial x}=d\log\sin p$$

Beachtet man, dass

$$\frac{\partial p}{\partial x}=Dx-Dy, \quad \frac{\partial q}{\partial x}=Dx+Dy$$

so geben diese Gleichungen für $y=0$ (also $x=c$, $\chi=0$, $\varphi=\gamma$, $p=q=\gamma$):

$$\frac{\partial p}{\partial x}=-(1-\Delta\gamma), \quad \frac{\partial q}{\partial x}=1+\Delta\gamma$$

Man kann also bei der Integration der zwei letzten Differentialgleichungen die Integrationsconstanten angeben und hat

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{1-\Delta\gamma}{\sin\gamma}\sin q, \quad \frac{\partial q}{\partial x} = \frac{1+\Delta\gamma}{\sin\gamma}\sin p$$

Multiplicirt man die linke Seite der ersten Gleichung mit der rechten Seite der zweiten, und die rechte Seite der ersten mit der linken der zweiten, ausserdem noch mit $\frac{\sin\gamma}{2}$, so hat man

$$\frac{1+\Delta\gamma}{2}\sin p\,dp = -\frac{1-\Delta\gamma}{2}\sin q\,dq$$

das heisst

$$d\left(\frac{1-\Delta\gamma}{2}\cos q + \frac{1+\Delta\gamma}{2}\cos p\right) = 0$$

also

$$d(Cx\,Cy - Dc\,Sx\,Sy) = 0$$

Für $y = 0$ wird der eingeklammerte Ausdruck zu Cc. Also

$$Cc = Cx\,Cy - Dc\,Sx\,Sy$$

Die zwei vorhergehenden Gleichungen, addirt und subtrahirt geben noch

$$Sc\,Dx = Dc\,Sx\,Cy + Cx\,Sy; \qquad Sc\,Dy = Sx\,Cy + Dc\,Cx\,Sy$$

6°.) Beweis aus den Formeln der sphärischen Trigonometrie.

Wenn a, b, c die Seiten, A, B, C die Winkel eines Kugeldreiecks bedeuten, so gelten die Gleichungen:

$$\cos a = \cos b\cos c + \sin b\sin c\cos A$$
$$\sin a\cos B = \cos b\sin c - \sin b\cos c\cos A$$
$$\sin a\sin B = \sin b\sin A$$

1) $\cos A = -\cos B\cos C + \sin B\sin C\cos a$
2) $\sin A\cos b = \cos B\sin C + \sin B\cos C\cos a$

Man betrachte A, B, C als die drei unabhängigen Variabeln und setze $k = \frac{\sin a}{\sin A} = \text{etc.}$; k ist also eine Function von A, B, C. Die Gleichung 1) gibt, wenn man A, B constant setzt:

$$(\cos B\sin C + \sin B\cos C\cos a)\,dC - \sin B\sin C\sin a\,da = 0$$

also

XXIII.

Miscellen.

1.

Ueber Vierecke am Kreise.

Wenn man ein Viereck in einen Kreis legt, seine Diagonalen zieht und die gegenüberliegenden Seiten bis zu ihren Durchschnittspunkten verlängert; so kann man die entstandene Figur dreimal auf verschiedene Weise als inbeschriebenes Viereck betrachten. Man fasst nämlich zweimal die Diagonalen als gegenüberstehende Seiten auf, indem man ausser ihnen zwei wirkliche gegenüberstehende Seiten hinzu nimmt, dann entstehen zwei überschlagene Vierecke, deren Eckpunkte in der Peripherie liegen, welche also inbeschrieben sind, und zu ihnen kommt das gewöhnliche inbeschriebene Viereck.

Die beiden Durchschnittspunkte der gegenüberliegenden Seiten und den Durchschnittspunkt der Diagonalen kann man 3 zusammengehörige Pole nennen, insofern jeder von ihnen Pol zur Verbindungslinie der beiden anderen als Polare ist. Man nenne die beiden ausserhalb des Kreises liegenden Pole Y und Z, den innen liegenden X. Man kann die besprochene Figur auch auf folgende Art erzeugen; man stelle die Pole X und Y fest; d. h. man nehme z. B. X an, ziehe eine Linie durch X und suche in derselben zu X und den beiden Durchschnittspunkten des Kreises den vierten harmonischen Punkt, dieser sei Y. Nun ziehe man durch Y eine Secante, verbinde ihre Kreisdurchschnittspunkte mit X und mit den dadurch entstehenden zwei neuen Kreisdurchschnittspunkten, so schneiden sich die letzten Linien in Z und die Verbindungslinie der beiden letzten Kreisdurchschnittspunkte geht durch Y.

Da die erste durch Y gelegte Secante nicht bestimmt ist, so kann man die drei Punkte X, Y, Z auf sehr verschiedene Weisen finden; oder es ergiebt sich eine inbeschriebene Vierecksschaar, welche zu den drei zusammengehörigen Polen X, Y, Z gehört.

Verlängert man die durch X gehenden Diagonalen, bis sie YZ in U, zwischen Y und Z und V, ausserhalb der beiden schneiden; so sind die Punkte Y, U, Z, V harmonisch, denn die Linien XU, XV und YZ sind die Diagonalen eines vollständigen Vierecks, von welchem Y und Z zwei Ecken sind.

Bei einem Viereck aus der Vierecksschaar, welche zu den Punkten X, Y, Z gehört, sind aber die Punkte U und V nicht nur harmonisch zu Y und Z, sondern sie sind auch zusammengehörige Pole zum Punkte X. Wir wollen alsdann diese Punkte Y', Z' nennen und das betreffende Viereck das Hauptviereck der Schaar. Man kann ein inbeschriebenes Viereck, dessen Diagonalen Polaren zu einander sind, oder deren Durchschnittspunkte auf der Polaren YZ zum Punkte X gehören, (also das Hauptviereck) auf folgende Weise finden; man wähle X und construire seine Polare. Dann ziehe man von einem Punkte Z' der Polare nach dem Mittelpunkt M des Kreises und fälle von X auf $Z'M$ ein Lot, welches in A schneidet. Dieses Lot ist die eine der Diagonalen des zu construirenden Vierecks AY', die andere ist XZ'. Da nämlich $Y'Z'$ Polare zu X ist und XY' Polare zu Z', so ist auch XZ' Polare zu Y'.

Zieht man MX und verlängert diese Linie, bis sie die Polare $Y'Z'$ in O trifft, ist ferner $MX = a$, so ist

$$MO = \frac{r^2}{a}$$

(r Radius des Kreises) und

$$OX = \frac{r^2 - a^2}{a}$$

Nun sind aber die Dreiecke MOZ', MAX und $Y'OX$ einander ähnlich, und wenn man $OZ' = b$ setzt, so hat man

$$b : \frac{r^2}{a} = OY' : \frac{r^2 - a^2}{a}$$

also ist

$$OY' = \frac{r^2(r^2 - a^2)}{a^2 b}.$$

Daraus ersieht man, dass

$$OY' \times OZ' = \frac{r^2(r^2 - a^2)}{a^2}$$

also unabhängig von b ist; sind also Y und Z zwei mit X zusammengehörige Pole, so ist das Product der Abstände YO, ZO von dem Fusspunkte des auf die Polare vom Mittelpunkt gefällten Lotes constant und stets

$$r^2 \frac{(r^2 - a^2)}{a}$$

Man kann nun auch die Lage der beiden Ecken Y und Z des Vierecks bestimmen. Nennt man nämlich $OY' = c$, $YY' = x$ und $Y'Z = y$, so hat man die beiden Gleichungnn

$$x : y = b + c + x : b + c - y$$

und

$$(x + c)(y - c) = bc$$

Aus denselben findet sich

$$x = \frac{b+c}{b-c}(c + \sqrt{bc}), \quad y = \frac{b+c}{b-c}(-c + \sqrt{bc})$$

Nennt man noch

$$ZZ' = z = b + c - y$$

so ergiebt sich

$$z = \frac{b+c}{b-c}(b - \sqrt{bc})$$

Man hat somit alle drei zwischen den harmonischen Punkten Y, Y', Z, Z' liegenden Linien x, y, z gefunden.

Das Viereck, dessen Diagonalen die Polare von X in Y' und Z' schneiden, ist das einzige inbeschriebene Viereck der Viereckschaar, welche zu den Punkten X, Y, Z gehört, dessen Diagonalen gegenseitige Polaren zu einander sind; denn da die Punkte Y, Z, Y', Z' harmonisch sind, so nähert sich Y' dem Z, wenn Z' sich ihm nähert, ebenso entfernt sich Y' von Z, wenn sich Z' von ihm entfernt; also kann der Fall nur einmal vorkommen, dass

$$OY' \times OZ' = r^2\left(\frac{r^2 - a^2}{a^2}\right) \text{ ist.}$$

Setzt man

$$x + c = \frac{2bc}{b-c} + \frac{b+c}{b-c}\sqrt{bc} = b'$$

und

$$y - c = -\frac{2bc}{b-c} + \frac{b+c}{b-c}\sqrt{bc} = c'$$

und sucht aus den Formeln

$$x' = \frac{b'+c'}{b'-c'}(c'+\sqrt{b'c'}), \quad y = \frac{b'+c'}{b'-c'}(-c'+b'c')$$

x' und y', indem man für b' und c' die Werte in b und c einsetzt, so ergiebt sich

$$x' = \frac{b+c}{b-c}(b-\sqrt{bc}) \text{ und } y' = \frac{b+c}{b-c}(-c+\sqrt{bc})$$

Das heisst also, wenn man von Y und Z, welche ebenfalls zugehörige Pole zu X sind, ausgegangen wäre, so würde man als Diagonalen des betreffenden Vierecks XY' und XZ' gefunden haben.

Es giebt also zwei inbeschriebene Vierecksschaaren, welche in der Art conjugirt sind, dass die eine zu den Punkten X, Y, Z gehört, und die Diagonalen ihres Hauptvierecks durch Y' und Z' gehen; während die andere Schaar zu X, Y', Z' gehört, und die Diagonalen ihres Hauptvierecks durch Y und Z gehen.

Betrachten wir nun die Vierecksschaar, welche zu X, Y, Z gehört, näher. Wir setzen dabei voraus, dass O näher an Z als an Y liegt. Die Diagonalen eines dieser Vierecke, welche sich in X schneiden, fallen sehr nahe mit XY zusammen; dann liegen die Punkt U und V sehr nahe an Y. Fallen die Diagonalen in XY, so fällt das ganze Viereck in die Linie XY, zwei Seiten werden dabei unendlich klein, sind als Tangenten aufzufassen und schneiden sich in Z. Lassen wir nun die Diagonalen grössere Winkel mit XY bilden, so rücken die Punkte U und V nach entgegengesetzten Seiten von Y fort. Dabei kommt U in die Mitte zwischen Y und Z, dann liegt XV parallel YZ, und die Sehne wird durch X halbirt. Lassen wir die Winkel der Diagonalen noch mehr wachsen, so liegen nun U und V auf der zweiten Hälfte von YZ und nähern sich Z. Dabei kommt zunächst der Fall vor, dass U und V zu Y' und Z' werden, oder dass

$$UO \times VO = Y'O \times Z'O = \frac{r^2}{r'^2}(r^2 - a^2) \text{ ist.}$$

Dann tritt noch der Fall ein, dass Y' in O fällt, und endlich fallen beide Diagonalen und mithin das ganze Viereck in XZ. Die Punkte Y und Z können die bisher erörterte Rolle von X nicht spielen, weil sie ausserhalb des Kreises liegen. Die beiden durch X gehenden Polaren XY und XZ konnten nämlich als Diagonalen oder Seiten eines inbeschriebenen Vierecks angesehen werden, dies ist jedoch bei den Polaren YZ und YZ nicht möglich, weil YZ ganz ausserhalb des Kreises liegt.

Zu jedem inbeschriebenen Viereck der eben besprochenen Art, das heisst zu den drei inbeschriebenen Vierecken, als welche man ein vollständiges, inbeschriebenes Viereck mit seinen Diagonalen betrachten kann, gehört ein vollständiges, umbeschriebenes Viereck, dessen Seiten in den vier Eckpunkten des inbeschriebenen Vierecks den Kreis berühren.

Ein solches vollständiges Viereck besteht aus drei einzelnen Vierecken, nämlich einem gewöhnlichen Viereck, einem überschlagenem und einem mit dem einspringendem Winkel. Jedes dieser drei Vierecke im umbeschriebenen, vollständigen Viereck entspricht einem der drei Vierecke des inbeschriebenen Vierecks näher, wenn man die Folgen der Eckpunkte mit den Folgen der dazwischen liegenden Durchschnittspunkte der Tangenten zusammenhält. Liegt z. B. der Mittelpunkt des Kreises innerhalb des gewöhnlichen inbeschriebenen Vierecks, so entspricht das gewöhnliche Viereck des umbeschriebenen dem gewöhnlichen des inbeschriebenen; es entspricht dann das überschlagene Viereck des umbeschriebenen einem überschlagenen des insbeschriebenen und das mit dem einspringenden Winkel des umbeschriebenen dem anderen überschlagenen des inbeschriebenen.

Da sich indessen nach dem Satze:

Dreht sich eine Linie um einen Pol, so durchläuft ihr Pol die Polare des ersten Poles — alle Tangenten des umschriebenen Vierecks in den Polaren XY, YZ und XZ schneiden, so haben alle zur inbeschriebenen Vierecksschaar gehörigen umbeschriebenen Vierecke die gemeinschaftlichen Diagonalen XY, YZ und XZ.

Es gehört also eine inbeschriebene Vierecksschaar, welche zu den Punkten X, Y, Z gehört, mit einer umschriebenen Viereckschaar, welche zu den Polaren XY, XZ, YZ gehört, zusammen.

Verfolgen wir nun die Durchschnittspunkte der Tangentenpaare dieser umbeschriebenen Vierecke, welche an die Enppunkte der Diagonalen der inbeschriebenen Vierecke gelegt sind. Dieselben durchlaufen die Linie YZ, wir nennen sie $U'V'$.

Fällt das inbeschriebene Viereck in die Linie XY zusammen, so besteht das umbeschriebene Viereck aus zwei Tangenten, welche sich in Z schneiden. Bilden die Diagonalen des inbeschriebenen Vierecks kleine Winkel mit XY, so liegen U' und V' nahe bei Z und entfernen sich mit wachsenden Winkeln mehr und mehr von diesem Punkte. Dabei kommt zunächst der Fall vor, dass U' in O fällt; dann ist die Sehne ZX parallel YZ.

Ferner kommt der Fall vor, dass U' in U und V' in V fällt. Sie heissen dann Y' und Z', und es ist

$$U'O \times V'O = UO \times VO = Y'O \times Z'O = \frac{r^2}{a^2}(r^2 - a^2)$$

Dann fällt U' in die Mitte zwischen Y und Z, wenn die nicht zu U' gehörige Sehne ein Durchmesser ist. Endlich, wenn das ganze inbeschriebene Viereck in Z zusammenfällt, so besteht das umbeschriebene Viereck aus 2 Tangenten, welche sich in Y schneiden.

Legt man also um einen Kreis ein Viereck, sieht die Durchschnittspunkte seiner Diagonalen mit der Peripherie als Eckpunkte eines inbeschriebenen Vierecks an, legt um dieses wiederum ein Viereck, sieht die Kreis-Durchschnittspunkte der Diagonalen dieses zweiten umbeschriebenen Vierecks wieder als Eckpunkte eines inbeschriebenen Vierecks an, und legt um dieses wiederum ein Viereck, so fallen die Diagonalen des dritten umbeschriebenen Vierecks mit den Diagonalen des ersten zusammen. Das erste umbeschriebene Viereck ist nicht notwendiger Weise dasselbe wie das dritte, kann aber mit demselben auch übereinstimmen. Dann kommen überhaupt nur 2 umbeschriebene und zwei inbeschriebene Vierecke vor. Stets existiren jedoch bei dem aufgestellten Satze nur 2 verschiedene inbeschriebene Vierecke.

Hätte man die Reihe der Vierecke mit einen beliebigen inbeschriebenen angefangen, so brauchte dieses erste Viereck nicht mit dem dritten überein zu stimmen; stimmt es aber mit ihm überein, so existiren auch nur 2 Arten von inbeschriebenen Vierecken.

Setzt man die Art von Beschreibung der Vierecke in und um den Kreis fort, so wechseln nur 2 inbeschriebene und 2 umbeschriebene Vierecke ab.

Ist bei einem inbeschriebenen Viereck

$$OZ' = \frac{r}{a}\sqrt{r^2 - a^2}$$

so ist auch

$$OY' = \frac{r}{a}\sqrt{r^2 - a^2}$$

Das Viereck, zu welchem die Linien XZ' und XY' Diagonalen sind, und die ganze Schaar, deren Hauptviereck es ist, sind in diesem Falle die Trapeze, deren Diagonalen durch X gehen.

Bei dem Hauptviereck der dieser Trapezschaar conjugirten inbeschriebenen Viereckschaar schneiden sich die Diagonalen recht-

winklig und eine ist Durchmesser, dieses Hauptviereck ist also symmetrisch, rechtwinklig. Die Ecken in YZ dieser Vierecksschaar liegen paarweise gleich weit von O entfernt. Die umbeschriebene Viereckschaar zur ersten Schaar besteht aus symmetrischen Vierecken, deren Diagonalen rechtwinklig auf einander stehen und deren eine ein Durchmesser ist. Das Hauptviereck der zweiten umbeschriebenen Viereckschaar ist ein Trapez; sodass bei der fortgesetzten Vierecksbeschreibung bei den inbeschriebenen Vierecken ein Trapez mit einem rechtwinkligen symmetrischen Viereck abwechselt, bei den umbeschriebenen Vierecken ein symmetrisches Viereck mit einem Trapez.

Liegt X im Mittelpunkt, so rückt YZ in die Unendlichkeit. Beide inbeschriebene Viereckschaaren sind Rechtecke mit parallelen Seiten und die beiden Hauptvierecke sind die unter diesen vorkommenden Quadrate. Die Seiten, oder auch die Diagonalen dieser Quadrate bilden Winkel von 45°. Die beiden umbeschriebenen Viereckschaaren sind Rhomben, deren Diagonalen gegenseitig Winkel von 45° bilden, und die ihnen gehörigen Hauptvierecke sind wieder die vorkommenden Quadrate.

Berlin, den 12. Sept. 1888.

Dr. Beyssell.

2.

Geometrischer Beweis eines Satzes der Flächentheorie.

Der Beweis des Satzes von der Unveränderlichkeit des Krümmungsmaasses einer Fläche bei einer Biegung derselben wird auf den Gauss'schen Satz gegründet, dass das Krümmungsmaass durch die Fundamentalgrössen E, F, G und ihre ersten und zweiten Ableitungen allein darstellbar ist. Wir teilen nachstehend einen Versuch mit, den erwähnten Satz geometrisch zu begründen.

Es sei M der betrachtete Punkt der Fläche, T die Tangentialebene, H_1, H_2 die beiden zugehörigen Hauptnormalebenen, MN die Normale; bezüglich der Richtung der letzteren wollen wir, um an bestimmte Vorstellungen anzuknüpfen, voraussetzen, dass sie, wenn die beiden Hauptnormalschnitte in der Umgebung von M auf der nämlichen Seite von T liegen, nach dieser selben Seite gerichtet sei; im andern Falle denken wir sie auf derjenigen Seite von T liegend, auf welcher der Schnitt mit H_1 sich befindet.

Auf den Hauptnormalschnitten mögen nun von M aus nach beiden Seiten unendlich kleine Bögen ds_1, beziehungsweise ds_2 aufgetragen werden, welche, bis auf unendlich kleine Grössen höherer Ordnung, mit den zugehörigen Sehnen übereinstimmen, so dass mit dieser Beschränkung

$$MP_1 = MP_1' = ds_1, \qquad MP_2 = MP_2' = ds_2$$

gesetzt werden kann.

Die Normalen der Fläche in den Punkten P_1, P_1'; P_2, P_2' dürfen als in den Ebenen H_1, H_2 liegend und mit den Normalen der zugehörigen Normalschnitte zusammenfallend angesehen werden. Die Winkel, welche die Normalen in P_1 und P_2 mit der Normale MN in M bilden, seien $d\sigma_1$, bzhw. $d\sigma_2$; dann sind

$$\frac{1}{\varrho_1} = \frac{d\sigma_1}{ds_1}, \quad \frac{1}{\varrho_2} = \frac{d\sigma_2}{ds_2} \tag{1}$$

die beiden Hauptkrümmungen.

Die Winkel, welche die Haupttangenten t_1, t_2 mit den Sehnen MP_1, MP_2 einschliessen, sind $\frac{d\sigma_1}{2}$, $\frac{d\sigma_2}{2}$ respective.

Um das Krümmungsmaass der Fläche im Punkte M zu bestimmen, betrachten wir das Dreieck MP_1P_2 auf der Fläche und seine Abbildung $M\Pi_1\Pi_2$ auf der Einheitskugel. Beide können, wenn es sich um ihre Fläche handelt, mit Beschränkung auf unendlich kleine Grössen der zweiten Ordnung wie ebene rechtwinklige Dreiecke angesehen werden; demgemäss sind

$$dw = \tfrac{1}{2} ds_1\, ds_2 \tag{2}$$

$$d\bar{\omega} = \tfrac{1}{2} d\sigma_1\, d\sigma_2 \tag{3}$$

ihre Flächeninhalte und

$$K = \frac{d\bar{\omega}}{dw} = \frac{d\sigma_1\, d\sigma_2}{ds_1\, ds_2} = \frac{1}{\varrho_1 \varrho_2} \tag{4}$$

das verlangte Krümmungsmaass in M.

Die vier Dreiecke MP_1P_2, $MP_1'P_2$, MP_1P_2', $MP_1'P_2'$, welche hier als der den Punkt M umgebende Teil der krummen Fläche betrachtet werden, bilden eine vierseitige gleichseitige Pyramidenfläche, welche im Falle gleichgerichteter Hauptkrümmungsradien ganz zu einer Seite von T liegt und bei M spitze Kantenwinkel hat, während sie im Falle ungleichgerichteter Hauptkrümmungsradien von T geschnitten wird und bei M stumpfe Kantenwinkel aufweist. Bezeichnet

man den Kantenwinkel mit γ, so folgt für ihn aus dem in der Kante MN rechtwinkligen Dreikant $M(P_1P_2N)$ die Bestimmung

$$\cos\gamma = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{d\sigma_1}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2} \mp \frac{d\sigma_2}{2}\right)$$

aus welcher bis auf Grössen der zweiten Ordnung

$$1 - \frac{\gamma^2}{2} = \pm\frac{d\sigma_1 d\sigma_2}{4} \tag{4}$$

folgt; das obere Zeichen gilt für gleichgerichtete, das untere für entgegengesetzt gerichtete Hauptkrümmungsradien.

Denkt man sich nun mit der Fläche eine Biegung, ohne Dehnung und Zusammenziehung, vorgenommen, so erleidet die eben betrachtete Pyramidenfläche eine Deformation, die jedoch nur die Flächenwinkel alterirt, während die Seitenflächen ungeändert bleiben; die Seitenkanten MP_1, MP_1'; MP_2, MP_2' bewegen sich dabei in den Ebenen H_1, H_2 beziehungsweise. Da also γ constant bleibt, so ändern sich die Grössen $d\sigma_1$, $d\sigma_2$ vermöge der Gleich. (5) derart, dass

$$d\sigma_1 d^2\sigma_2 + d\sigma_2 d^2\sigma_1 = 0 \tag{6}$$

ist. Die sphärische Abbildung $M\Pi_1\Pi_2$ erfährt gleichfalls eine Veränderung, welche der Gleich. (3) gemäss durch

$$d^2\bar{\omega} = \tfrac{1}{2}(d\sigma_1 d^2\sigma_2 + d\sigma_2 d^2\sigma_1) \tag{7}$$

dargestellt ist und daher vermöge der Gleich. (6) verschwindet, so dass $d^2\bar{\omega} = 0$ wird. Bei der Biegung behält demnach nicht allein dw, sondern auch $d\bar{\omega}$, somit auch K seinen Wert bei, d. h. das Krümmungsmaass bleibt bei jeder Biegung der Fläche in allen Punkten derselben ungeändert.

Brünn, 1888.

E. Czuber.

3.

Ein geometrischer Ort.

(Schüleraufgabe.)

Es ist der geometrische Ort des Mittelpunktes des einem Dreiecke eingeschriebenen Kreises zu bestimmen, wenn die Endpunkte der Basis des Dreiecks die Brennpunkte einer Ellipse sind, deren Umfang der Scheitel des Dreiecks durchläuft.

Bezeichnet man die laufenden Coordinaten der Ellipse mit $x_1 y_1$, die Coordinaten des Kreiscentrums mit $\xi\eta$, so findet man aus der Bedingung, dass der Kreis dem Dreiecke eingeschrieben ist, leicht

$$1) \quad \eta = \frac{e y_1}{a + e}$$

Daher

$$y_1 = \frac{a + e}{e} \eta$$

Nennt man die Segmente der Dreiecksseiten, welche durch die Berührungspunkte des Kreises gebildet werden, s und t, so finden sich, wenn die Radienvectoren des Punktes $x_1 y_1$ mit r_1, r_2 bezeichnet werden, leicht die folgenden Relationen

$$s + t = 2e$$
$$s + u = r_1$$
$$t + u = r_2$$

daher, da $r_1 + r_2 = 2a$ ist:

$$u = a - e$$

Es ist aber auch

$$(y_1 - \eta)^2 + (x_1 - \xi)^2 = \eta^2 + u^2 = \eta^2 + (a - e)^2$$

daher

$$(x_1 - \xi)^2 = (a - e)^2 - y_1^2 + 2 y_1 \eta$$

substituirt man hierin statt η seinen Wert aus 1) und nimmt für $x_1 - \xi$ das positive Vorzeichen ist, so findet man nach einigen einfachen Reductionen

$$x_1 - \xi = \frac{b}{a} x_1 \sqrt{\frac{a - e}{a + e}}$$

daher

$$x_1 = \xi \frac{a\sqrt{a + e}}{a\sqrt{a + e} - b\sqrt{a - e}}$$

Es besteht aber zwischen x_1 und y_1 die Bedingungsgleichung

$$a^2 y_1^2 + b^2 x_1^2 = a^2 b^2$$

Daraus findet sich die Gleichung des geometrischen Ortes

$$\frac{\eta^2 (a + e)}{e^2 (a - e)} + \frac{\xi^2}{e^2} = 1$$

d. h. eine Ellipse mit den Axen

$$(a) = e \qquad (b) = \frac{eb}{a + e}$$

Ich brauche wol kaum hinzuzufügen, dass a, b, e gewöhnliche Bedeutung (grosse Halbaxe, kleine Halbaxe und Excentricität der Ellipse) haben. Die zum Verständnisse nötige Figur ist leicht herzustellen.

Waehring, 1888. December.

K. Zelbr.

4.

Ueber eine Differentialgleichung.

Sei φ eine beliebige Function von x, so lässt sich die Gleichung:

$$\frac{dy}{dx} = e^{\int \varphi\, dx} + \varphi y + \frac{e^{-\int \varphi\, dx}}{x^2} y^2$$

immer integriren. Denn setzt man

$$z = y e^{-\int \varphi\, dx} - x$$

so folgt

$$x^2 \frac{dz}{dx} = (z+x)^2$$

dieses ist aber eine homogene Gleichung. Oder man setze

$$y = -x e^{\int \varphi\, dx} \frac{d \log u}{dx}$$

so folgt

$$\frac{d^2u}{dx^2} - \frac{z}{x}\frac{du}{dx} + \frac{u}{x^2} = 0$$

Diese Gleichung gehört zur Form:

$$\sum_0^n a_k x^k \frac{d^k y}{dx^k} = 0$$

deren allgemeines Integral

$$y = \sum_1^n A_k x^{\beta_k}$$

ist, wobei β_n die verschiedenen Wurzeln der Charakteristik

$$\sum_0^n a_k (\beta \mid k) = 0$$

bezeichnen, in welcher

$$(\beta \mid 0) = 1$$
$$(\beta \mid k) = \beta(\beta-1)(\beta-2) \ldots (\beta-k+1)$$

zu setzen ist. Sind etwa drei gleich, so sind

$$y = x^{\beta_1}(A_1 + A_2 \log x + A_3 \log^2 x) + \sum_4^n A_k x^{\beta_k}$$

sind zwei conjugirt imaginär, so folgt

$$y = x^m\{A_1 \cos[n \log x] + A_2 \sin[n \log x]\} + \sum_3^n A_k x^{\beta_k}$$

wobei

$$\beta_1 = m + ni$$
$$\beta_2 = m - ni$$

angenommen wurde. Man sieht, dass diese Gleichungen eine Analogie zu jenen mit constanten Coefficienten bilden.

Prag, November 1888.

W. Láska.

5.

Zur Theorie der astronomischen Strahlenbrechung.

In Brünnow's Lehrbuch der sphärischen Astronomie wird im Abschnitt über „die Refraction" bezüglich der verschiedenen Refractionstheorien bemerkt, dass die von Cassini gemachte Hypothese einer Atmosphäre von gleichförmiger Dichtigkeit mit einmaliger Brechung die mittlere Refraction bis zu 80° ganz gut darstellt.

Es lässt sich demnach erwarten, dass die Annahme einer zweimaligen Brechung in zwei an Dichtigkeit verschiedenen Schichten die mittlere Refraction bis zu einem höhern Grade genau darstellen wird. Wir haben diese Berechnung angestellt und geben im Nachstehenden eine Lösung dieser Aufgabe.

Wir bezeichnen mit i_1 den Einfalls-, mit f_1 den Brechungswinkel, mit δz_1 die Refractionsablenkung, mit u_1 den Brechungsexponenten und mit r_1 den Radius der ersten oder äussern Schicht der voransgesetzten Atmosphäre. Dann gelten folgende Gleichungen:

$$\sin i_1 = u_1 \sin f_1, \quad i_1 = f_1 + \delta z_1, \quad \delta z_1 = (u_1 - 1) \operatorname{tg} f_1$$

$$\delta z_1 = \frac{u_1 - 1}{\sqrt{\frac{u_1^2}{\sin i_1^2} - 1}}$$

Für die zweite Schicht hat man ebenso:

$$\sin i_2 = u_2 \sin f_2, \quad i_2 = f_2 + \delta z_2, \quad \delta z_2 = (u_2 - 1)\,\mathrm{tg} f_2$$

$$\delta z_2 = \frac{u_2 - 1}{\sqrt{\frac{u_2^2}{\sin i_2^2} - 1}}$$

Bezeichnen wir den Erdhalbmesser mit a, die scheinbare Zenithdistanz des Sterns mit z und bemerken, dass

$$r_2 \sin i_2 = r_1 \sin f_1 \quad \text{und} \quad a \sin z = r_2 \sin f_2$$

ist, so erhalten wir vermittelst der Relationen

$$\sin i_1 = \frac{a}{r_1} u_1 u_2 \sin z$$

$$\sin i_2 = \frac{a}{r_2} u_2 \sin z$$

durch Einsetzen in die vorhergehenden Ausdrücke

$$\delta z = \frac{u_1 - 1}{\sqrt{\frac{r_1^2}{a^2 u_2^2 \sin z^2} - 1}} + \frac{u_2 - 1}{\sqrt{\frac{r_2^2}{a^2 \sin z^2} - 1}}$$

als vollständige Refraction

$$\delta z = \delta z_1 + \delta z_2$$

Für eine 3- oder n-malige Brechung würden analoge Glieder hinzukommen. So wäre eine 4-malige Brechung

$$\delta z = \frac{u_1 - 1}{\sqrt{\left(\frac{r_1}{a}\right)^2 \frac{1}{u_2^2 u_3^2 u_4^2 \sin z^2} - 1}} + \frac{u_2 - 1}{\sqrt{\left(\frac{r_2}{a}\right)^2 \frac{1}{u_3^2 u_4^2 \sin z^2} - 1}}$$
$$+ \frac{u_3 - 1}{\sqrt{\left(\frac{r_3}{a}\right)^2 \frac{1}{u_4^2 \sin z^2} - 1}} + \frac{u_4 - 1}{\sqrt{\left(\frac{r_4}{a}\right)^2 \frac{1}{\sin z^2} - 1}}$$

Indem wir uns zunächst auf eine zweimalige Brechung beschränken, haben wir die Unbekannten u_1 und u_2 und ferner $\frac{r_1}{a}$ und $\frac{r_2}{a}$ zu ermitteln, über welche nichts weiter bekannt ist. Da aber die obigen Gleichungen in Bezug auf die Unbekannten nicht linear sind, so würde eine directe Herleitung derselben aus z und δz Schwierigkeiten unterliegen. Wir schlagen deshalb den folgenden Weg ein:

Schreiben wir den Refractionsausdruck in der Form

$$\delta z = \frac{x_1}{\sqrt{\cot z^2 + y_1}} + \frac{x_2}{\sqrt{\cot z^2 + y_2}}$$

oder

$$\delta z = \frac{x_1 \operatorname{tg} z}{\sqrt{1 + y_1 \operatorname{tg} z^2}} + \frac{x_2 \operatorname{tg} z}{\sqrt{1 + y_2 \operatorname{tg} z^2}}$$

und entwickeln ihn nach Potenzen von $\operatorname{tg} z$, so kommt

$$\delta z = (x_1 + x_2)\operatorname{tg} z - \tfrac{1}{2}(x_1 y_1 + x_2 y_2)\operatorname{tg} z^3 + \tfrac{3}{8}(x_1 y_1^2 + x_2 y_2^2)\operatorname{tg} z^5 - \tfrac{5}{16}(x_1 y_1^3 + x_2 y_2^3)\operatorname{tg} z^7 + \ldots$$

In dem genannten Lehrbuch ist nun bis zu diesem Grade eine analoge Reihe entwickelt, welche wir in folgender Form benutzen werden

$$\delta z = 57,''5234 \operatorname{tg} z - 0,''066365 \operatorname{tg} z^3 + 0,''00020986 \operatorname{tg} z^5 - 0,''000000996 \operatorname{tg} z^7$$

Die Coefficienten der vorhergehenden Reihe sind demnach als bekannt anzusehen, so dass wir auf das nachstehende Gleichungssystem gekommen sind:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= a \\ x_1 y_1 + x_2 y_2 &= b \\ x_1 y_1^2 + x_2 y_2^2 &= c \\ x_1 y_1^3 + x_2 y_2^3 &= d \end{aligned}$$

Aus diesen Gleichungen erhalten wir der Reihe nach die Werte

$$x_1 = \frac{b - a y_2}{y_1 - y_2} = \frac{c - b y_2}{y_1 (y_1 - y_2)} = \frac{d - c y_2}{y_1^2 (y_1 - y_2)}$$

und die Verbindung dieser Relationen liefert

$$\begin{aligned} a y_1 y_2 - b(y_1 + y_2) + c &= 0 \\ b y_1 y_2 - c(y_1 + y_2) + d &= 0 \end{aligned}$$

Demnach stellen sich y_1 und y_2 als Wurzeln einer quadratischen Gleichung

$$y^2 - (y_1 + y_2) y + y_1 y_2 = 0$$

dar, deren Coefficienten sich aus den beiden vorhergehenden Gleichungen ergeben, so dass man hat

$$y^2 (b^2 - ac) - (bc - ad)\, y + c^2 - bd = 0$$

Hierin sind einzuführen

$$a = 57,5234, \quad b = 0,132\,731, \quad c = 0,000\,559\,66, \quad d = 0,000\,003\,1878$$

Die Auflösung dieser Gleichung, deren Wurzeln zugleich auch x_1 und x_2 bestimmen, führt schliesslich auf folgenden Refractionsausdruck für eine zweimalige Brechung

$$\delta z = \frac{44{,}96}{\sqrt{\cot z^2 + 0{,}001\,128}} + \frac{12{,}585}{\sqrt{\cot z^2 + 0{,}006\,228}}$$

Um zu sehen, bis zu welchem Grade genau diese Formel die Refractionen wiedergiebt, haben wir die Refractionen für die folgenden Zenithdistanzen berechnet, und geben die in Klammern darunter stehenden Decimalen den Unterschied zwischen der genauen mittleren Refraction und der berechneten in Bogensecunden:

45°	60°	70°	75°	80°	85°
57,5″	1′39,4″	2′36,9″	3′31,6″	5′15,6″	9′46,6″
(0,2″)	(0,3″)	(0,4″)	(0,5″)	(0,5″)	(− 0,1″)

86°	87°	87°10′	87°30′	88°	89°	90°
11′38,9″	14′15,1″	14′46,8	15′55,8″	17′53,8″	22′23,5″	25′
(0,0″)	(— 0,5″)	(1,″0)	(5″)	(15″)	(2′1″)	(10′)

E. Oekinghaus.

6.

Die Refractionsfläche des Meeresbodens.

Betrachtet man Punkte, Linien oder Flächen durch lichtbrechende Medien, so erscheinen sie im allgemeinen verschoben. Ein interessanter Fall ist derjenige, die Gleichung des scheinbaren Meeresgrundes aufzustellen unter der Annahme, dass das Meer eine Kugeloberfläche bedeckt.

Wir bezeichnen mit r ihren Radius, mit a den des Meeresspiegels, mit h die Entfernung des Auges vom Mittelpunkt der Kugel. Durch h legen wir eine Ebene und nehmen in dem Meridianschnitt vom Radius r einen beliebigen Punkt $r(\gamma)$ in Bezug auf h als Axe an, lassen von ihm einen Lichtstrahl ausgehen, welcher in $a(\psi)$ des zweiten Meridianschnittes, also im Meeresniveau mit dem entsprechenden Radius a den Winkel β bildet und dann nach erfolgter Brechung unter dem Winkel α ins Auge gelangt.

Nehmen wir endlich noch an, dass ein zweiter, dem ersten unendlich naher Lichtstrahl von $r(\gamma)$ ausgeht und in's Auge tritt, so werden beide divergirenden Strahlen rückwärts verlängert sich in

einem Convergenzpunkt $R(\varepsilon)$ schneiden, welcher der Bildpunkt von $r(\gamma)$ ist. Nach dem Brechungsgesetz haben wir zunächst

$$\sin\alpha = n\sin\beta$$

und ferner

$$R\sin(\alpha-\psi+\varepsilon) = a\sin\alpha$$
$$r\sin(\beta-\psi+\gamma) = a\sin\beta$$

als Gleichungen für den ersten Strahl. Die Gleichungen für den zweiten entwickeln sich aus den Differentialformeln

$$\cos\alpha\,d\alpha = n\cos\beta\,d\beta$$
$$R\cos(\alpha-\psi+\varepsilon)(d\alpha-d\psi) = a\cos\alpha\,d\alpha$$
$$r\cos(\beta-\psi+\gamma)(d\beta-d\psi) = a\cos\beta\,d\beta$$

in welchen R und ε zunächst als Constante zu betrachten sind.

Die Resultante der Elimination von $d\alpha$, $d\beta$, $d\psi$ ist

$$\frac{n}{\cos\alpha}-\frac{1}{\cos\beta} = \frac{an}{R\cos(\alpha-\psi+\varepsilon)}-\frac{a}{r\cos(\beta-\psi+\gamma)}$$

oder auch, wenn wir die rechte Seite vermittelst der ersteren Gleichungen transformiren

$$\frac{1}{\sqrt{1-\sin\alpha^2}}-\frac{1}{\sqrt{n^2-\sin\alpha^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{R^2}{a^2}-\sin\alpha^2}}-\frac{1}{\sqrt{\frac{n^2r^2}{a^2}-\sin\alpha^2}}$$

Hierin ist für α eine andere Variabele, welche zur Polargleichung der Refractionscurve des Meeresgrundsmeridians hinleitet. Hierfür stehen zwei Wege offen.

Aus der 2. und 3. unserer Gleichungen folgt

$$\sin(\alpha+\varepsilon)\cos\psi-\cos(\alpha+\varepsilon)\sin\psi = \frac{a}{R}\sin\alpha$$

und

$$\sin(\beta+\gamma)\cos\psi-\cos(\beta+\gamma)\sin\psi = \frac{a}{r}\sin\beta$$

woraus

$$\cos\psi\sin(\alpha+\varepsilon-\beta-\gamma) = \frac{a}{R}\sin\alpha\cos(\beta+\gamma)-\frac{a}{r}\sin\beta\cos(\alpha+\varepsilon)$$

$$\sin\psi\sin(\alpha+\varepsilon-\beta-\gamma) = \frac{a}{R}\sin\alpha\sin(\beta+\gamma)-\frac{a}{r}\sin\beta\sin(\alpha+\varepsilon)$$

folgt.

Bezeichnen wir $\alpha+\varepsilon-\beta-\gamma$ mit U und eliminiren ψ, so folgt

$$\sin u^2 = \frac{a^2}{R^2}\sin\alpha^2 + \frac{a^2}{r^2}\sin\beta^2 - \frac{2a^2}{Rr}\sin\alpha\sin\beta\,.\,\cos u$$

und da

$$\sin\beta = \frac{\sin\alpha}{n}$$

auch

$$\sin\alpha^2 = \frac{\sin U^2}{\frac{a^2}{R^2} + \frac{a^2}{r^2 n^2} - \frac{2a^2}{Rrn}\cos U}$$

Führen wir diesen Wert für $\sin\alpha^2$ in die obige Refractionsformel ein, so werden 2 Wurzelausdrücke rational und es bedarf nur noch einer Relation von U als Function von R und ε, um die gesuchte Gleichung zu erhalten.

Wir benutzen hierzu die Formel

$$h\sin(\alpha-\psi) = a\sin\alpha$$

aus welcher

$$\frac{a}{h} = \cos\psi - \sin\psi\,.\cot\alpha$$

folgt. Da wir vorhin schon $\cos\psi$ und $\sin\psi$ entwickelt haben, so erhalten wir nach Einsetzung ihrer Werte in die letzte Formel

$$\frac{\sin(\alpha-\beta+\varepsilon-\gamma)}{h} = \frac{\sin\varepsilon}{nr} + \sin\frac{(\alpha-\beta-\gamma)}{R}$$

oder

$$\sin U\left(\frac{1}{h} - \frac{\cos\varepsilon}{R}\right) + \cos U\,\frac{\sin\varepsilon}{R} = \frac{\sin\varepsilon}{nr}$$

und man hat $\cos U$ aus der Gleichung

$$\cos U^2\left(\frac{1}{R^2} - \frac{2\cos\varepsilon}{Rh} + \frac{1}{h^2}\right) - \frac{2\sin\varepsilon^2}{Rrn}\cos U + \frac{\sin\varepsilon^2}{n^2r^2} - \left(\frac{1}{h} - \frac{\cos\varepsilon}{R}\right)^2 = 0$$

zu berechnen und in die betreffende Gleichung einzusetzen.

Da aber diese Polargleichung für $R(\varepsilon)$ etwas complicirt ist, wollen wir statt ihrer die einfachere für $\varrho(\varphi)$ einführen, in welcher ϱ den Radiusvector vom Auge zum Convergenzpunkt $R(\varepsilon)$, und φ seinen Winkel mit h, d. i. mit der Normalen vom Auge zum Meere bedeutet. Dann ist

$$h\sin\varphi = a\sin\alpha, \quad R\cos(\alpha-\psi+\varepsilon) = h\cos\varphi - \varrho$$

$$r\cos(\beta - \psi + \gamma) = \sqrt{r^2 - a^2 \sin\beta^2} = \sqrt{r^2 - \frac{a^2}{n^2}\sin\alpha^2}$$

$$= \sqrt{r^2 - \frac{h^2}{a^2 n^2}\sin\varphi^2}$$

und die Relation

$$\frac{n}{\cos\alpha} - \frac{1}{\cos\beta} = \frac{an}{R\cos(\alpha - \psi + \varepsilon)} - \frac{a}{r\cos(\beta - \psi + \gamma)}$$

geht über in die folgende einfache Polargleichung der Bildcurve eines grössten Kreises des Meeresgrundes, dessen Ebene durch's Auge geht:

$$\frac{1}{h\cos\varphi - \varrho} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{a^2 - h^2\sin\varphi^2}} - \frac{1}{\sqrt{a^2 n^2 - h^2\sin\varphi^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2 r^2 - h^2\sin\varphi^2}}$$

Diese Curve und demnach auch die entsprechende Rotationsfläche als Bildfläche des Meeresbodens liegen symmetrisch gegen die Axe h, deren Pol im Auge ruht. Ihr veränderlicher Parameter ist h, welcher von dem jeweiligen Orte des Auges abhängig ist.

Die Form der Curve oder Fläche ist in Bezug auf mässige Höhen das betrachtende Auge im allgemeinen concav. Der Meeresboden scheint gehoben und napfförmig sich nach oben auszubreiten.

Setzen wir nämlich $\varphi = 0$, so erhält man den scheinbaren Ort des dem Auge nächsten Punktes aus

$$\frac{1}{h - \varrho} = \frac{1}{a} - \frac{1}{na} + \frac{1}{nr}$$

wobei wir $nr > a$ voraussetzen, welches der Fall der Natur ist.

Es sei die Tiefe des Meeres gleich e und x die Höhe des Bildpunktes beim senkrechten Sehen, dann ist

$$\frac{x}{e} = \frac{n-1}{n + \frac{e}{r}}$$

oder die scheinbare Tiefe $y = e - x$ des Meeresbodens unter dem Meeresspiegel

$$\frac{y}{e} = \frac{1 + \frac{e}{r}}{n + \frac{e}{r}}$$

Dieselbe hängt also ausser von n von der Meerestiefe e und ihrem Kugelradius r ab. Je grösser e und r ist, um so grösser wird auch x.

Ist dagegen $\frac{1}{r} = 0$, d. h. die Oberfläche und der Grund des Meeres eine Ebene, so ist die Tiefe

$$y = \frac{e}{n}$$

Blickt das Auge zum Meereshorizont, wofür die Bedingung

$$a = h \sin \varphi$$

gilt, so ist

$$\varrho = h \cos \varrho$$

Demnach scheint der Meeresboden, den wir als kugelförmig annehmen, sich bis zum Horizont zu erheben, wobei aber die Bedingung $r > \frac{a}{n}$ erfüllt sein muss.

Ein lebendes Wesen, welches sich aus dem Grunde des als vollständig durchsichtig vorausgesetzten Meeres in Wirklichkeit immer weiter vom Auge des Betrachtenden entfernt, scheint in Folge der Refraction einen ganz andern Weg zu nehmen, indem es sich in aufsteigender Curve scheinbar dem Meeresniveau nähert und schliesslich im Horizont verschwindet. Die Sehrichtung in diesem Verschwindungspunkt ist zugleich auch eine Tangente der scheinbaren Bahn, wie sich leicht aus dem Differentialquotienten der Gleichung ermitteln lässt.

Ist r im Verhältniss zu a klein, die Meerestiefe also gross, so erscheint für grössere Höhen h die Refractionscurve des Meridians dem Auge convex. Für bestimmte Verhältnisse kann es demnach möglich sein, dass die Curve nur schwach gekrümmt erscheint, welches dann eintritt, wenn die concave Krümmung in convexe übergeht. So kann es vorkommen, dass die Gerade zwischen dem Verschwindungspunkt und dem dem Auge nächsten Bildpunkt senkrecht zur normalen Sehrichtung steht.

Setzen wir also jetzt

$$nr = h \sin \varphi, \quad h \cos \varphi = \varrho$$

$$\varrho \cos \varphi = h - r - e \frac{n-1}{n+\frac{e}{r}}$$

so folgt als Bedingung aus diesen Formeln

$$h = \frac{nr}{a}(nr + a - r)$$

wobei $h \gtrless a$ sein muss.

Ist z. B. $n = \frac{4}{3}$, $r = 3$, $a = 4$, so ist $h = 5$.

Diese specielle Curve würde also der obigen Bedingung genügen. Ihre Zweige tangiren den grösseren Kreis in Punkten, deren Verbindungsgerade durch den obern Bildpunkt geht. Dagegen ist

$$h = \frac{a}{nr}(nr + a - r)$$

zu setzen, wenn für $a = h \sin \varphi$ die Curve das Niveau erreicht.

Um die Wendepunkte der allgemeinen Curve zu bestimmen, wäre der zweite Differentialquotient y'' derselben gleich null zu setzen, wofür in Polarcoordinaten auch die Relation

$$\varrho^2 - \varrho\varrho'' + 2\varrho'^2 = 0$$

gültig ist. Doch hat die Durchführung dieser Rechnung nur nebensächliches Interesse, weshalb wir darauf verzichten.

E. Oekinghaus.

7.

Ueber die Bewegung eines Luftballons in ruhiger Luft.

Das Volumen des Luftballons sei V, das Gewicht eines Liters Luft in der Höhe x beim Barometerstande b und der Temperatur t sei $= p$, das Gewicht eines Liters Gas $= s$, das angehängte Gewicht $= P$.

Der Auftrieb des Ballons ist also Vp, das Gewicht des eingeschlossenen Gases Vs, demnach die nach oben wirkende Kraft in der Höhe x gleich

$$Vp - Vs - P$$

Diese wirkt auf die Masse $\frac{Vs + P}{g}$ ein, und die Beschleunigung q der Bewegung ist folglich, wenn wir noch $Vs + P = Q$ setzen

$$-q = \frac{Vp - Q}{Q} g$$

Indem wir nun die Formel $vdv = qdx$ benutzen, erhalten wir

$$v\,dv = -\frac{Vp - Q}{Q}\,g\,dx$$

Gemäss der barometrischen Höhenformel in ihrer einfachsten Gestalt

$$\frac{p}{p_0} = \frac{b}{b_0} = e^{-\frac{x}{A}}$$

oder

$$x = A \log \frac{b_0}{b}$$

geht die Differentialformel über in

$$v\,dv = -\left(\frac{V}{Q}\,p_0\,e^{-\frac{x}{A}} - 1\right) g\,dx$$

worin p_0 und b_0 sich auf die Erdoberfläche beziehen.

Nehmen wir an, dass die Bewegung in der Höhe H zur Ruhe kommt, wo also $Vp_1 = Q$ ist, so hat man

$$v\,dv = -\left(\frac{b_0}{b_1}\,e^{-\frac{x}{A}} - 1\right) g\,dx$$

und integrirt

$$\frac{v^2}{2g} = A\frac{b_0}{b_1}\,e^{-\frac{x}{A}} + x + C$$

Da nun für $v = 0$, $x = H$ wird, so ist die Geschwindigkeit des Ballons in der Höhe x durch

$$\frac{v^2}{2g} = A\frac{b_0}{b_1}\left(e^{-\frac{x}{A}} - e^{-\frac{H}{A}}\right) + x - H$$

gegeben. Darin ist b_1 der Barometerstand für H.

Die Anfangsgeschwindigkeit für $x = 0$ wäre also vermittelst

$$\frac{c^2}{2g} = A\frac{b_0}{b_1}\left(1 - e^{-\frac{H}{A}}\right) - H$$

bestimmt.

Führen wir noch für $\frac{c^2}{2g}$ die Geschwindigkeitshöhe für den freien Fall ein, setzen also $c^2 = 2gh$, so ist einfacher wegen $e^{-\frac{H}{A}} = \frac{b_1}{b_0}$

$$\frac{h}{A} = \frac{b_0}{b_1} - 1 - \log\frac{b_0}{b_1}$$

Der Coefficient A bedeutet eine gewisse Höhe, bei welcher das Verhältniss der Barometerstände $\frac{b_0}{b_1} = e$ ist. Für $b_1 = \frac{760\text{mm}}{2{,}718\ldots}$ wird A ungefähr gleich 8000 m. Dabei haben wir keine Rücksicht genommen auf die Veränderlichkeit der Schwere, der Temperatur und der Breite, um die Formeln nicht zu complicirt zu machen. Doch genügt die Formel $x = 8000 \log \frac{b_0}{b_1}$ für die Breite von 45° und die mittlere Temperatur = 0.

Um die Zeit des Steigens zu finden, gehen wir aus von

$$\frac{v^2 - c^2}{2gA} = \frac{b_0}{b_1}\left(e^{-\frac{x}{A}} - 1\right) + \frac{x}{A}$$

$$v = \frac{dx}{dt}$$

woraus

$$t = \sqrt{\frac{A}{2g}} \int \frac{d\frac{x}{A}}{\sqrt{\frac{b_0}{b_1}\left(e^{-\frac{x}{A}} - 1\right) + \frac{x}{A} + \frac{h}{A}}}$$

Die Integration ist nicht ausführbar. Für mässige Höhen können wir indes $e^{-\frac{x}{A}}$ in eine Reihe entwickeln, so dass man hat

$$t = \sqrt{\frac{A}{2g}} \int \frac{d\frac{x}{A}}{\sqrt{-\frac{b_0}{b_1}\left(\frac{x}{A} - \frac{x^2}{2A^2} + \frac{x^3}{6A^3} - \frac{x^4}{24A^4}\cdots\right) + \frac{x}{A} + \frac{h}{A}}}$$

Um nicht auf elliptische Integrale zu kommen, lassen wir die dritten und höheren Potenzen fort und erhalten, wenn x eine bestimmte Grenze nicht überschreitet, das Näherungsintegral

$$t = \sqrt{\frac{A}{2g}} \int \frac{d\frac{x}{A}}{\sqrt{\frac{h}{A} - \left(\frac{b_0}{b_1} - 1\right)\frac{x}{A} + \frac{b_0}{2b_1}\frac{x^2}{A^2}}}$$

d. i.

$$\text{Const} + t = \sqrt{\frac{A\,b_1}{q\,b_0}} \log\left(1 - \frac{b_0}{b_1} + \frac{b_0}{b_1}\frac{x}{A} + \sqrt{\frac{2b_0}{b_1}\left(\frac{h}{A} - \left(\frac{b_0}{b_1} - 1\right)\frac{x}{A} + \frac{b_0}{2b_1}\frac{x^2}{A^2}\right)}\right)$$

Nach Bestimmung der Constanten haben wir

$$t = \sqrt{\frac{Ab_1}{gb_0}} \log \frac{1-\frac{b_0}{b_1}+\frac{b_0}{b_1}\frac{x}{A}+\sqrt{2\frac{b_0}{b_1}\left(\frac{h}{A}-\left(\frac{b_0}{b_1}-1\right)\frac{x}{A}+\frac{b_0}{2b_1}\frac{x^2}{A^2}\right)}}{1-\frac{b_0}{b_1}+\sqrt{\frac{2b_0}{b_1}\frac{h}{A}}}$$

oder nach Einsetzen von

$$\frac{x}{A} = \log\frac{b_0}{b}, \quad \frac{h}{A} = \frac{b_0}{b_1} - 1 - \log\frac{b_0}{b_1}$$

für den Grenzfall $x = H$, $b = b_1$.

Die Zeit des Steigens bis zum höchsten Punkt

$$T = \sqrt{\frac{Ab_1}{gb_0}} \log \frac{1-\frac{b_0}{b_1}+\frac{b_0}{b_1}\log\frac{b_0}{b_1}+\frac{b_0}{b_1}\sqrt{1-\frac{2b_1}{b_0}+\left(1-\log\frac{b_0}{b_1}\right)^2}}{1-\frac{b_0}{b_1}+\sqrt{2\frac{b_0}{b_1}\left(\frac{b_0}{b_1}-1-\log\frac{b_0}{b_1}\right)}}$$

darin bedeuten b_0 und b_1 beziehungsweise die Barometerstände am untern und am obern Punkte, g die Acceleration der Schwere und $A = 8000\,\text{m}$.

Entwickelt man für $\frac{b_0}{b_1} = 1+x$ den $\log(1+x)$ in eine Reihe, so wird

$$T = \sqrt{\frac{A}{g}\frac{b_1}{b_0}} \log \frac{\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+(1+x)\sqrt{\frac{1}{3}x-\frac{7}{12}x^2}}{-1+\sqrt{1+\frac{x}{3}-\frac{x^2}{6}}}$$

welche Formel man für kleine Werte von x noch weiter vereinfachen kann.

Beispiel. Ist $b_0 = 760\,\text{mm}$, $b_1 = 690\,\text{mm}$, also $H = 761\,\text{m}$, so ist T ca. 73 Secunden.

Gräfrath, den 21. September 1888.

E. Oekinghaus.

Litterarischer Bericht
XXV.

Lehrbücher.

Anfangsgründe der Zahlen- und Raumgrössen-Lehre. Im Auftrage der Königlich Preussischen General-Inspektionen der Artillerie zum Gebrauche als Leitfaden bei dem mathematischen Unterricht in den Regiments-Schulen der Artillerie, sowie zur Benutzung beim Selbstunterrichte bearbeitet von R. Foth, Feuerwerks-Hauptmann. Mit 135 in den Text gedruckten Holzschnitten. Dritte Auflage. Hannover 1888. Carl Meyer. 284 S.

Das Buch ist mit ungemeinem Fleiss und Geschick für den klar erfassten und stets im Auge behaltenen besondern Zweck, für den es bestimmt ist, bearbeitet. Die für wissenschaftliches Studium erforderliche Exactheit und Gründlichkeit ist nicht zum Ziele genommen, demgemäss wird die Grundlegung der Begriffe grossenteils durch populäre Erläuterung vertreten. In Hinsicht auf den ausschliesslich praktischen Zweck der angestrebten mathematischen Ausbildung aber ist es sehr anzuerkennen, dass der Verfasser, wie es auch im Vorwort ausgesprochen ist, den grossen Gewinn, den die Schüler aus der Theorie für leichtere Aneignung der Lehren ziehen können, richtig gewürdigt, sich nicht mit Aufstellung von Regeln begnügt, sondern das Selbstdenken in umsichtigster Weise erweckt und ein eingehendes Verständniss eines grossen Umfangs von Begriffen zugänglich gemacht hat. Die Lehrweise ist, namentlich im Anfang, auf ein sehr geringes Fassungsvermögen eingerichtet, doch, wenigstens soweit Erklärung oder Herleitung durch die Sache gefordert war, derart, dass die grössere Ausführlichkeit stets instructiv auch für die fähigeren Schüler bleibt. Dies möchte wol nicht mehr

gelten von den Einschaltungen zwischen Lehrsatz und Beweis, welche zur Auffindung der Beweise Anleitung geben sollen. Diese Anleitungen sind weniger einfach und schwerer zu verstehen als der Beweis selbst und werden selten gerade den Weg repräsentiren, auf dem ein Schüler den Beweis findet. Statt ihm Vertrauen zu eigner Fähigkeit einzuflössen, machen sie ihn vorher unselbständig, indem sie ihn am Gängelbande führen. Höchstens durften in manchen Fällen kurze Winke gegeben werden. Dass der Verfasser es mit Angaben zur Bestimmung von Grundbegriffen nicht genau nimmt, würde kaum der Rüge wert erscheinen. Findet sich aber zu diesem Zwecke ein Satz aufgestellt, der in jeder Beziehung unrichtig ist, so kann man wol, auch wo der Fehler keine pädagogische Wirkung haben sollte, Abänderung verlangen. Auf S. 4. steht der dreifach unrichtige Satz: „Ist man berechtigt, eine Grösse für eine andre zu setzen, so sagt man, die beiden Grössen seien einander gleich". 1) ist die Bedingung unzureichend aufgestellt. Innerhalb seines Eigentums ist doch wol Jeder berechtigt Ungleiches für einander zu setzen, und wenn jemand für 2 Mark, die er zu zahlen hat, 20 Mark setzen will, so wird man ihm die Berechtigung wol meistens nicht absprechen. 2) Ergänzt man die verschwiegene Bedingung, dass nämlich das Ergebniss, sei es Grösse oder Gleichung, bei der Substitution bestehen bleibt, so ist der Begriff der Gleichheit vorausgesetzt, und auf Umwege nur derselbe Begriff dadurch bestimmt. 3) Auch alsdann ist der Satz eine falsche Umkehrung eines richtigen Satzes: Gleiches kann man für einander setzen, das Ergebniss bleibt bestehen; aber bekanntlich ist dies auch oft bei Substitution von Ungleichen der Fall, z. B. in algebraischen Identitäten. Also nur der ursprüngliche Satz, nicht seine Umkehrung war hier auszusprechen; dieser sagt ebensowenig, was gleich heisst, aber dafür, wozu die Erkenntniss der Gleichheit nütz ist, und damit wird das Wesen des Begriffs deutlich. — Die Herleitung der Sätze der Arithmetik geschieht im Anfang an speciellen Zahlen; wie bekannt, tritt die Bündigkeit dabei, solange es sich um einfache Dinge handelt, mindestens ebensogut ins Bewusstsein. Weiterhin werden die Buchstaben zum Ausdruck und zur Deduction gebraucht. Die Operationen werden zuerst an positiven ganzen Zahlen gelehrt, dann werden Brüche und benannte Zahlen eingeführt, negative Grössen nur bei der Subtraction erwähnt, von da an von aller Betrachtung ausgeschlossen; selbst die zur Uebung gegebenen Gleichungen sind so gewählt, dass ihre Lösungen positiv ausfallen. Ausser den 4 Species sind noch behandelt die Proportionen nebst den darauf beruhenden bürgerlichen Rechnungsarten, die Potenzen, Wurzeln und das Wurzelausziehen, die einfachsten Bestimmungsgleichungen. Die Uebungsaufgaben sind sämtlich für militärische Zwecke eingerichtet. Der

2. Teil des Buches enthält die Elemente der Planimetrie vollständig (ohne Trigonometrie). Aus der Stereometrie sind die wichtigsten Körperformen nebst Inhaltsberechnung behandelt. Der Anhang betrifft die Landesvermessung mittelst Kette und Stäben. H.

Leitfaden der elementaren Mathematik von Adolf Sickenberger, Professor am k. Luitpoldsgymnasium in München. Erster Teil. Algebra. Zweiter Teil. Planimetrie. Dritter Teil. Stereometrie. — Trigonometrie. 75 + 88 + 76 S.

Leitfaden der Arithmetik nebst Uebungsbeispielen von Adolf Sickenberger, Professor am k. Luitpoldsgymnasium in München. Vierte Auflage. 192 S.
München 1888. Theodor Ackermann.

Von letzterem Buche ist die erste und zweite Auflage besprochen im 228. und 247. litt. Berichte Seite 33 und 24. Die dritte war mit einer völligen Umarbeitung verbunden, der Lehrtext ist erheblich vereinfacht, der Uebungsstoff beträchtlich erweitert worden. Die 4. Auflage ist der dritten soviel als möglich gleich erhalten.

Das erstere Buch soll nicht zur Unterweisung dienen, sondern nach empfangenem Unterrichte das Erlernte in bester Ordnung vorführen. Zu diesem Zwecke ist die Darlegung so kurz gefasst als möglich. Sie spart also alle Erläuterung dessen, was bereits verstanden sein muss, und alle Ausführung, zu welcher die Fähigkeit vorausgesetzt werden kann, enthält dagegen vollständig alle Elemente des Lehrgangs, Definitionen, Sätze nebst Andeutung des Beweisverfahrens, Aufgaben nebst hinreichender Angabe des Weges der Lösung, sämtlich in höchst übersichtlicher Form. Die Aufstellungen sind derart, dass sie sich einem logisch correcten Unterrichte anschliessen können, mit Ausnahme einer Stelle in der Algebra nebst ihrer noch einmal auftretenden Consequenz, welche sich der Verbreitung von Irrtum schuldig macht. Zuerst ist es falsch (S. 12.), wenn man sagt, $\frac{a}{0}$ sei unendlich gross. Deutet jemand symbolisch durch $\frac{a}{0}$ einen Bruch an, dessen Nenner stetig verschwindet, so setzt er die Infinitesimalrechnung als bekannt und geläufig voraus. In diesem Buche aber, wo weder vom Begriffe des Unendlichen noch von symbolischen Ausdrücken etwas vorkommt, ist das Aufgestellte geradezu Unsinn. Dieser Unsinn wird noch ärger auf S. 21, wo aus der Gleichung $0x = a$ der Verfasser schliesst $x = \infty$. Offenbar ist die Gleichung gleichbedeutend mit $0 = a$, sagt also über x nichts

aus. Weiterhin wird richtig bemerkt, $0x = 0$ sei eine analytische Gleichung; aber $0x = a \gtrless 0$ ist auch eine solche, nur ist sie falsch. Die Algebra (d. i. Buchstabenrechnung) teilt sich zuerst in die 4 Species (erste und zweite Rechenstufe) und die Potenzenrechnung (dritte). Die erstere Abteilung umfasst auch die linearen Gleichungen und die Proportionen, die letztere die quadratischen Gleichungen, die Logarithmen, die Reihen und die Combinatorik. Bei den Logarithmen hätte die Formel nicht fehlen dürfen: $\log x$ (für Grundzahl a) $= \frac{\log x}{\log a}$ (für beliebige Grundzahl). Denn nur durch diese wird es verständlich, warum das brigg'sche System für jede Grundzahl ausreicht, was im Buche gar nicht erklärt ist und doch ein wesentliches Element der Lehre bildet. Im 2. Teil, Geometrie, wird nach einander behandelt: der Winkel, das Dreieck, das Vier- und Vieleck, der Kreis, Flächeninhalt, Proportionalität und Aehnlichkeit, Kreismessung — im dritten: offene Gebilde (Lage der Ebenen und Geraden im Raume), geschlossene Gebilde (Körper), Trigonometrie (ebene und sphärische). H.

Leitfaden für den Unterricht in der Arithmetik. Bearbeitet von Prof Dr. H. Suhle, Direktor des Herzogl. Friedrichs-Realgymnasiums zu Dessau. Erstes Heft. Zweites Heft. Zweite Auflage. Cöthen 1888. Paul Schettler. 100 + 147 S.

Das erste Heft erstreckt sich auf die 4 Species, an welche sich die Lehre von den Gleichungen 1. Grades und von den Proportionen anschliesst. Der zweite der 3 Anhänge behandelt, mit Ueberschreitung dieser Grenzen, die Ausziehung der Quadrat- und Kubikwurzeln. Dieses Heft ist in 1. Auflage bereits im 244. litterarischen Berichte, S. 44 besprochen. In 2. Auflage ist auf das Bemerkte keine Rücksicht genommen, und obgleich der Verfasser im Vorwort auf 2 empfangene Recensionen, insbesondere auf eine darin enthaltene Missbilligung, die wir sowenig wie er als gerechtfertigt anerkennen, antwortet, doch der oben citirte Bericht ganz verschwiegen, der darin gerügte elementare Schnitzer unverändert beibehalten worden. Eine einfache Hinweisung hat also nicht genügt, es muss noch einmal und schärfer gesagt werden. Jeder denkende Anfänger weiss, dass der Ausdruck $a+b$ nicht 2 Zahlen, a und b, sondern nur eine Zahl bezeichnet. 3 Stellen im Buche entsprechen entschieden der falschen Auffassung, alle übrigen lassen beide Auffassungen zu. 1) Auf Seite 4 steht: „Zusatz. Die Addition ungleichnamiger Zahlenausdrücke kann nur ausgeführt werden, indem man

dieselben durch das Additionszeichen verbindet". Die Ausführung einer Rechnung kann offenbar nur die Form, nicht Sinn und Wert eines Ausdrucks ändern. Hiernach würde also $a+b$ nichts anderes als a und b, wie es vor der Ausführung vorlag, bedeuten. Es musste heissen: „— kann nicht ausgeführt werden" — sofern die Grösse $a+b$ nicht anders ausgedrückt werden kann. 2) In grösserm Umfange spricht sich schon auf Seite 1 der Mangel an klarer Auffassung aus in dem Satze: „Aus gegebenen Zahlen neue Zahlen finden, welche zu den gegebenen in bestimmt vorgeschriebener Beziehung stehen, heisst Rechnen." Der Rechner findet nie eine neue Zahl, sondern eine Zahl ist ihm explicite oder implicite gegeben, immer aber voraus bestimmt, ehe seine Tätigkeit beginnt; an dieser Zahl darf er nichts ändern als die Ausdrucksform. Man gehe alle Fälle der Anwendung des Wortes Rechnen durch, nie wird die damit bezeichnete Tätigkeit in Bildung neuer Zahlen, also in Wertveränderung von Zahlen bestehen, vielmehr ist letztere stets ein willkürlicher durch äussere Umstände auferlegter Act, welcher dem Rechnen vorhergeht. Addire $25a$ zu $14a$ oder in mathematischen Zeichen $14a+25a$, sagt der Lehrer oder das Aufgabenbuch; letzteres nennt man den Ansatz der Aufgabe, die Ausübung des Rechnens besteht allein darin, die willkürlich gegebene Zahl $14a+25a$ ohne Wertänderung in der beabsichtigten Form $39a$ darzustellen. In der Rechenschule, wo die dekadische Form stets die beabsichtigte ist, können jene falschen Begriffe nicht wol aufkommen; in der Algebra hingegen, wo die Definitionen der „Rechnungsoperationen" dem Missverständniss nicht wehren können, sofern es sich darin um Forderung und Ausführung gar nicht handelt, ist es wesentlich im Bewusstsein zu erhalten, dass alles Rechnen ein zu einem Ziele führendes Transformiren ist und mit dem Willküracte der Bildung neuer Zahlen nicht verwechselt werden darf. 3) Auf Seite 2 steht — „Wenn das Resultat einer Rechnung (eine Summe, Differenz u. s. w.) selbst wieder als Zahl gelten soll etc." — Hiernach soll $a+b$ nur dann als eine Zahl gelten, wenn es in Klammern geschlossen ist. Auch die unrichtige Formel $\frac{a}{0}=\infty$ ist in der neuen Auflage beibehalten. Was zur Erklärung vorausgeht, ist zum Verständniss nicht hinreichend und würde, wenn man es vervollständigte, doch die falsche Formel nicht richtig machen. Wann und mit welchem Rechte man für die Variable ihren Grenzwert, für die Unendlichkleine die Null setzen kann, ist gar nicht erörtert, in dem hier vorliegenden Unstetigkeitspunkte ist es bekanntlich nicht gestattet.

Das 2. Heft behandelt zuerst die dritte Rechenstufe (Potenzen, Wurzeln, Logarithmen). Hieran schliessen sich dann die Gleichungen

dieser Beziehung in manchen Punkten mit gutem Beispiele voran. Dennoch ist der Parallelensatz mit einem Beweise aufgestellt, der sich auf einen ganz gemeinen Trugschluss stützt. Der Fall ist nur insofern nicht der gewöhnliche, als der Betrug nicht durch incorrecte Fassung der Winkel-Theorie vorbereitet ist. Ganz sachgemäss wird hier vielmehr erst der Winkel, und zwar durch die Winkelfigur erklärt, dann der Richtungsunterschied zweier Geraden durch den Winkel zwischen ihnen bestimmt. Hiermit ist es ausgesprochen, dass das Wort Unterschied nicht das Resultat einer Subtraction bedeutet, sowenig als der Unterschied zwischen Vogel und Fisch, sondern erst durch den Winkel gemessen zur Grösse wird. Die Behandlung des Parallelensatzes aber löscht das angezündete Licht wieder aus, kehrt das Sachverhältniss um und schliesst von der Gleichheit der Richtungen auf die Gleichheit der Winkel. Obgleich indes jene principiellen Sätze von den Winkeln tadellos aufgestellt sind, so sind sie doch noch unvollständig; denn der Winkel ist nicht als Grösse definirt: es fehlt die Bedingung der Gleichheit und Ungleichheit, welche die Messung eines Winkels durch einen andern ermöglicht. Dieser Mangel steht in naher Beziehung zu der Unklarheit, welche der erste Satz des Buches einführt mit den Worten: „Die Geometrie hat die Betrachtung der Raumgrössen zum Gegenstande.“ Sind Punkt, Lage, Richtung, Stellung, Grössen? oder kein Gegenstand der Geometrie? oder endlich, fängt die eigentliche Geometrie erst da an, wo jene qualitativen Elemente auf Grössen zurückgeführt sind? Im letzten Falle würde die ganze elementare Geometrie blosse Vorbereitung zur analytischen sein. Der gerügte Trugschluss zeigt, dass es nicht überflüssig ist das Unterscheidende der Grösse zum Bewusstsein zu bringen. Hoppe.

Vorschule der Geometrie. Von Prof. H. Köstler, Oberlehrer am Domgymnasium zu Naumburg a. S. Fünfte und sechste, verbesserte Auflage. Mit 47 in den Text gedruckten Holzschnitten. Halle a. S. 1887. Louis Nebert. 21 S.

Leitfaden der der ebenen Geometrie für höhere Lehranstalten. Von Prof. H. Köstler. Mit vielen in den Text gedruckten Holzschnitten. 2. Heft. Lehre vom Flächeninhalt. Konstructionslehre. Zweite, teilweise umgearbeitete Auflage. Halle a. S. 1888. Louis Nebert. 42 S.

Die Vorschule ist in 3. und 4. Auflage im 8. litt. Bericht S. 41, das 1. Heft des Leitfadens im 2. litt. Bericht S. 14, das 3. Heft im 241. litt. Bericht S. 29 besprochen. Das vorliegende 2. Heft besteht aus 3 Teilen, welche nach einander behandeln die Flächengleichheit,

Flächenmessung und Constructionslehre. Auf die Sätze folgt eine Reihe von Zu- und Uebungssätzen, dann von Aufgaben, und zwar erst in unmittelbar geometrischer Gestalt, dann Beispiele aus der Praxis. Die Aufgaben, namentlich im 3. Teile sind vermöge des kurzen Ausdrucks und der Systematik auf kleinem Raume reichhaltig und vielseitig. Auf Seite 28 sind aus Versehen die Wörter „überbestimmt" und „unbestimmt" mit einander verwechselt. Ferner ist doch gemäss auf Seite 20 der Ausdruck nicht sachgemäss: „Das Messen der Flächen durch das umständliche Abtragen des Flächenmasses" (Einheit in Quadratform) „ist nicht nötig —". Da es nur in besondern Fällen möglich ist, so kann von umständlich nicht die Rede sein. Offenbar kann der Begriff von Flächenmessung nicht der analoge von Streckenmessung sein. Wir verstehen unter Flächenmessung stets Flächenberechnung auf Grund der Linearmessung, das durfte bei der Erklärung nicht verschwiegen werden. Allerdings gibt es auch einen rein geometrischen Weg zur Ermittelung des Inhalts: man kann das Quadrat in solche Teile zerlegen, dass sie sich auf das gegebene Flächenstück auftragen lassen. Diese Aufgabe ist wieder als specielle in der allgemeinen enthalten: 2 gegebene gleiche Vielecke in congruente Stücke zu zerlegen. Letztere Aufgabe lässt sich mittelst der vorausgehenden elementaren Theorie lösen, sie ist instructiv und ihre Lösbarkeit jedenfalls wissenswert. Anlass ist also da, sie in den Cursus aufzunehmen, wiewol es sich empfiehlt, sie dem Studium vorzubehalten. Für die Definition von Flächenmessung aber kann die constructive Darstellung schon darum nicht in Betracht kommen, weil sie bei krummer Begrenzung versagt.

H.

Constructive Geometrie der Kegelschnitte auf Grund der Focaleigenschaften. Einheitlich entwickelt von Adalbert Breuer, k. k. Reallehrer in Trautenau, Böhmen. Ein Lehrbuch für höhere Lehranstalten und für den Selbstunterricht. Mit 80 in den Text gedruckten Original-Figuren. Eisenach 1888. J. Bacmeister. 110 S.

Die Kegelschnitte werden durch eine Focaleigenschaft als Orte von Punkten definirt, dann die übrigen Focal- und andern Eigenschaften, die Beziehungen der damit verbundenen und sie charakterisirenden Gebilde und die Lösungen der wichtigsten Aufgaben daraus constructiv hergeleitet. Die Behandlung ist zuerst eine gemeinsame für die 3 Curvenformen, weiterhin werden Ellipse, Parabel, Hyperbel einzeln betrachtet. Warum ist aber, da doch die Einheitlichkeit der Methode betont ward, der Krümmungskreis der Ellipse nur in den Scheiteln, der von Parabel und Hyperbel allge-

mein untersucht? Der Vortrag ist so einfach und leichtfasslich, als er nur sein kann; auch das trägt zur leichten Auffassung bei, dass von gewöhnlichen und nahe liegenden Kürzungen nirgends Gebrauch gemacht wird. Die Anwendungen vom Uebergang zur Grenze werden dem Anfänger keine Schwierigkeit verursachen. Das Buch ist denjenigen, welche ohne Mühe mit den Elementen der Kegelschnittslehre bekannt werden wollen, sehr zu empfehlen. H.

Lehrbuch der Geometrie für Gymnasien und höhere Lehranstalten. Von Professor Dr. F. W. Fischer, Oberlehrer am Gymnasium zu Kempen. Drei Teile in einem Band: Planimetrie. — Stereometrie. — Ebene und sphärische Trigonometrie. Zweite Ausgabe. Mit vielen in den Text gedruckten Holzschnitten. Freiburg i. Br. 1887. Herder. 203 + 105 + 172 S.

Das Lehrbuch charakterisirt sich durch Ausführlichkeit und Reichhaltigkeit. Ueber die Grenzen des für die Theorie notwendigen Inhalts gehen die hinzugefügten Abschnitte über Transversalen, Maxima und Minima, harmonische Teilung, Pol und Polare, Potenz und Potenzlinie und ein Anhang zur Goniometrie über einige analytische Themata hinaus. Ausserdem ist das Buch reich an Aufgaben. Die Abfassung ist grossenteils correct, die logischen Erfordernisse mit Umsicht berücksichtigend. Als Ausnahme ist zu nennen die Behandlung des Parallelensatzes und des Winkel-Begriffs. Ersterem ist ein angeblicher Beweis hinzugefügt, der nichts ist als Wiederholung der Behauptung mit andern Worten. Der Winkel soll die Grösse der Drehung sein; wodurch aber die Drehung zu einer messbaren Grösse wird, ist nicht gesagt, und lässt sich doch so leicht sagen. H.

Lehrbuch der Stereometrie. Auf Grund von Dr. Ferd. Kommerell's Lehrbuch neu bearbeitet und erweitert von Dr. Guido Hauck, Geh. Regierungsrat und Professor an der Königl. Technischen Hochschule zu Berlin. Sechste Auflage. (Fünfte der Neubearbeitung.) Mit 67 in den Text eingedruckten Holzschnitten. Tübingen 1888. H. Laupp. 226 S.

Die 4. Auflage ist im 251. litt. Bericht, S. 31 besprochen. In dieser war bereits die Neubearbeitung vollzogen. In der gegenwärtigen sind noch viele Aenderungen im einzelnen hinzugekommen: einige Bezeichnungen, veränderte Fassung von Lehrsätzen, Vermehrung von Anhängen und Aufgaben u. a. m. H.

Leitfaden der Experimental-Physik für Gymnasien. Mit einem Anhang: Mathematische Geographie und Grundlehren der Chemie. Von Prof. Dr. Georg Krebs, Oberlehrer an der Musterschule (Realgymnasium) zu Frankfurt a. M. Zweite, verbesserte Auflage. Mit 412 Figuren, 2 lithogr. Tafeln, 1 Farbentafel und Logarithmentafel. Wiesbaden 1887. J. F. Bergmann. 476 S.

Die Bezeichnung der Physik als experimentale auf dem Titel lässt sich nicht als unterscheidend verstehen. Der Vortrag besteht zum grössten Teil aus Beschreibung und elementar theoretischer Erklärung der Naturerscheinungen ergänzt durch Experimente, wo sie erforderlich sind. Die Erklärungen, sofern sie die physikalischen Begriffe zu entwickeln haben, auf die daher das grösste Gewicht zu legen ist, sind mit Fleiss und Umsicht bearbeitet. Was ihnen an Exactheit fehlt, beruht zum Teil auf dem approximativen Fortschritt aller inductiven Wissenschaften, welcher von geringern Einflüssen anfänglich absehen muss, aber auch zum andern Teil auf Connivenz gegen die populäre Anschauung. Die Schwere der Anziehung geradezu gleichzusetzen ist ein Absehen von einer kleinen Differenz; dagegen Ruhe und Bewegung direct als absolute zu betrachten, wie es hier geschieht, dient nur der vulgären Unklarheit. Die Hauptabschnitte des Buches sind: Eigenschaften der Körper, Mechanik, Wellenlehre und Akustik, Licht, Magnetismus, Elektricität, Wärme, mathematische Geographie und Astronomie, Grundlehren der Chemie.

H.

Leitfaden für den wissenschaftlichen Unterricht in der Chemie. Für Realgymnasien, Gymnasien, Realschulen und zum Selbstunterrichte. Von Dr. W. Casselmann, weil. Professor und Lehrer der Chemie und Technologie am Realgymnasium zu Wiesbaden. Erster Kursus. Zweiter Kursus. Fünfte, umgearbeitete Auflage, bearbeitet von Prof. Dr. Georg Krebs, Oberlehrer an der Musterschule (Realgymnasium) zu Frankfurt a. M. Mit in den Text eingedruckten Holzschnitten. Wiesbaden 1887. J. F. Bergmann. 139 + 137 S.

Der Lehrgegenstand ist die anorganische Chemie. Der erste Cursus ist für Secunda, der zweite für Prima bestimmt. In beiden folgt der Lehrgang der Reihe der Grundstoffe, Metalloide in 5 Gruppen, Metalle in 5 Gruppen, und knüpft an experimentelle Untersuchung von Natur- oder Kunstproducten an. Die Versuche im 2. Cursus sind jedoch andere und unterscheiden sich dadurch von denen im 1. Cursus, dass sie auf Entwickelung der Theorie ausgehen. Veränderungen in der theoretischen Auffassung haben die Umarbeitung mancher Teile in der gegenwärtigen Auflage notwendig gemacht.

H.

Leitfaden der Physik. Von Dr. W. von Beetz, weil. ordentl. Professor der Physik an der technischen Hochschule zu München, ord. Mitglied der k. b. Akademie der Wissenschaften. Mit 339 in den Text gedruckten Holzschnitten. Neunte Auflage. Nach dem Tode des Verfassers bearbeitet und herausgegeben von J. Henrici, Professor am Gymnasium in Heidelberg. Leipzig 1888. Th. Grieben (Fernau). 354 S.

Die 6. Auflage ist im 260. litt. Bericht S. 40 besprochen. Das Buch hat in den successiven Auflagen sehr an Umfang zugenommen. Die 8. Auflage erhielt entsprechend der Einführung absoluter elektrischer Masse und der Anwendung des Potentials zur Erklärung elektrischer Erscheinungen eine Reihe von Zusätzen, welche in der gegenwärtigen mit dem Ganzen enger verknüpft worden sind.

H.

Vermischte Schriften.

Rendiconto dell' Accademia delle scienze fisiche e matematiche (sezione della Società Reale di Napoli). Serie 2ª. Vol. I. (Anno XXVI). Napoli 1887.

Die Zeitschrift erscheint in monatlichen Heften. Jedes Heft gibt zuerst die Verhandlungen, dann einzelne Arbeiten, denen meistens ein Bericht von Seiten eines Mitgliedes der Akademie unmittelbar vorausgeht. Der 1. Band enthält folgende mathematische Arbeiten.

E. Pascal: Ueber die Construction des regelmässigen 257ecks. — Ueber ein neues Symbol in der Theorie der binären Formen zu 2 Reihen von Variabeln. — Ueber eine Methode, eine beliebige invariantive Form einer binären kubischen Function mittelst der des vollständigen Systems auszudrücken.

P. del Pezzo: Ueber eine fundamentale Eigenschaft der Flächen und der in einem Raume von mehr Dimensionen enthaltenen Mannichfaltigkeiten.

G. Emery: Ueber die Lage der Centralaxe der Momente der Bewegungsgrössen in einem in sphärischer Bewegung begriffenen starren materiellen Systeme.

A. Capelli: Beobachtungen über die Relationen, welche zwischen den invariantiven Operationen identisch stattfinden können. — Be-

stimmung der invariantiven Operationen zwischen 2 Reihen von Variabeln, welche sich mit jeder andern Operation derselben Art vertauschen lassen.

M. Pannelli: Ueber die involutorischen vielfachen Transformationen zweier Räume.

A. del Re: Correlationen, welche die doppelt gekrümmte Curve 4. Grades in die Abwickelbare ihrer doppelt berührenden Ebenen verwandelt.

F. Amodeo: Ueber einen speciellen Connex (2, 2).

H.

Mathematische und physikalische Bibliographie.

XXI.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Encke, J. F., gesammelte mathematische u. astronomische Abhandlungen. 2. Bd. Methode der kleinsten Quadrate. Fehlertheoretische Untersuchungen. Berlin, Dümmler's Verl. 8 Mk.

Fortschritte, die, der Astronomie. Nr. 13. 1887. Leipzig, E. H. Mayer. 2 Mk.

Fortschritte der Elektrotechnik. Vierteljährliche Berichte. Hrsg. v. K. Strecker. 1. Jahrg. 1887. 4. Hft. Berlin, Springer. 6 Mk. 20 Pf.; kplt. 20 Mk.

Fortschritte, die, der Physik im Jahre 1882. Dargestellt v. d. physikal. Gesellschaft zu Berlin. 38. Jahrg. 2. u. 3. Abth. Berlin, G. Reimer. 31 Mk.

Jahrbuch üb. die Fortschritte der Mathematik, begründet v. C. Ohrtmann. Hrsg. v. M. Henoch u. E. Lampe. 17. Bd. Jahrg. 1885. 3. Hft. Ebd. 10 Mk.

Unger, F., die Methodik der praktischen Arithmetik in historischer Entwickelung vom Anfange des Mittelalters bis auf die Gegenwart. Leipzig, Teubner. 6 Mk.

Wahle, R., üb. die geometrische Methode d. Spinoza. Leipzig, Freytag. 50 Pf.

Methode und Principien.

Lindemann, F., über Molekularphysik. Versuch e. einheitl. dynam. Behandlg. der physikal. u. chem. Kräfte. Königsberg, Koch. 1 Mk. 60 Pf.

Schellwien, R., optische Häresien, erste Folge, u. das Gesetz der Polarität. Halle, Pfeffer. 2 Mk. 50 Pf.

Zimmermann, W. F. A., Naturkräfte u. Naturgesetze. 4. Afl. 16.—18. Lfg. Berlin, Dümmler's Verl. à 50 Pf.

Litterarischer Bericht
XXVI.

Sammlungen.

Stereometrische Aufgaben. Herausgegeben von Prof. Dr. H. Lieber, Oberlehrer am Friedrich-Wilhelm-Realgymnasium in Stettin. Berlin 1888. Leonhard Simion. 141 S.

Diese Aufgaben beziehen sich ausschliesslich auf Körperberechnung. Construction wird durch ihre Stellung nirgends gefordert. Gleichwol wird durch ihre Bearbeitung die stereometrische Anschauung gründlich geübt, indem zu ihrer Lösung eine Vorstellung der Körper, sei sie nun frei oder unterstützt durch Skizze, notwendig ist. Zu präcisen Constructionen würde die Kenntniss der beschreibenden Geometrie erfordert werden, welche auf der Schule, für die das Buch bestimmt ist, überhaupt nicht, für andre wol schwerlich vor der Stereometrie getrieben wird. Die untersuchten Figuren sind Polyeder, Cylinder, Kegel, Kugel und deren Zusammensetzungen. Die Aufgaben sind erst nach den Figuren, dann gruppenweise nach der Behandlung geordnet. Das Resultat steht unter jeder Aufgabe.

H.

Geometrische Konstruktions-Aufgaben. Herausgegeben von Prof. Dr. H. Lieber, Oberlehrer am Friedrich-Wilhelm-Realgymnasium in Stettin, und F. von Lühmann, Oberlehrer am Gymnasium in Königsberg i. d. Neumark. Achte Auflage. Mit einer Figurentafel. Berlin 1887. Leonhard Simion. 206 S.

Die 4. Auflage ist im 247. litt. Bericht, S. 30 besprochen. Seitdem ist ein vierter Anhang hinzugekommen, welcher in den einzelnen Paragraphen teils neue Aufgaben, teils einfachere Lösungen nachträgt.

H.

Planimetrische Aufgaben für den Gebrauch im Schul-, Privat- und Selbst-Unterricht bearbeitet von Prof. Dr. F. Reidt, Oberlehrer am Gymnasium zu Hamm. Zweiter Teil. Aufgaben, geordnet nach Auflösungs-Methoden und mit Anleitung zur Behandlung versehen. Zweite, umgearbeitete Auflage. Breslau 1888. Eduard Trewendt. 127 S.

Das Charakteristische an diesem Aufgabenbuche liegt darin, dass es von den Postulaten als den unmittelbar durch die Instrumente dargebotenen Lösungen aus in allmählichen Variationen der Aufgaben und successiven Hinzufügungen, die kein erdenkliches Glied überspringen, zu immer mehr Mittel erfordernden Aufgaben fortschreitet. Die zu erlernenden Lösungsmittel sind unter folgende Titel geordnet: Methode der Hülfsfiguren, der geometrischen Oerter, der ähnlichen Figuren, der algebraischen Analysis. Diese Methoden sind nicht definirt, sondern durch Beispiele erläutert. Die ganze reichhaltige Reihe von Aufgaben bildet daher eine Anleitung zur Lösung solcher, die jedoch fern von Einübung schematischen, die Erfindung ersparenden Verfahrens ist, (welches immer nur für einen gewissen Bezirk ausreicht, über die Schule hinaus keinen Gewinn bringt), die vielmehr darauf abzielt die Fähigkeit zur Erfindung zu wecken, zu entwickeln und zum Bewusstsein zu bringen — gewiss die beste Hülfe für Schüler, denen das Suchen nach Lösungen zu schwer fällt.

H.

Planimetrische Konstruktionsaufgaben nebst Anleitung zu deren Lösung für höhere Schulen. Methodisch bearbeitet von E. R. Müller. Zweite Auflage. Oldenburg 1888. Gerhard Stalling. 68 S.

Die Reihe der Aufgaben ist zunächst geteilt in Aufgaben ohne und mit Verhältnissen. Die Aufgaben schliessen sich mit wenigen Ausnahmen an das Dreieck an und schreiten, von den fundamentalen beginnend, zu immer mehr impliciten Bestimmungen fort. Auf jede Gruppe folgen die ausgeführten oder angedeuteten Lösungen einiger Aufgaben und am Schlusse jedes der beiden Abschnitte die Erklärung der Methoden.

H.

Textgleichungen geometrischen Inhalts. Für den Gebrauch beim Unterricht entworfen von Dr. Th. Harmuth, ord. Lehrer am Königl. Wilhelms-Gymnasium in Berlin. Berlin 1888. Julius Springer. 66 S.

Das Vorliegende ist eine Sammlung von 450 Aufgaben zur Uebung in der elementaren Geometrie und Gleichungslehre. Von

einer Figur sind einige Bestimmungsgrössen in unbenannten Zahlen, die Winkel in Graden gegeben, nach andern wird gefragt. Mit Anwendung seiner Kenntniss von messender und abzählender Geometrie hat dann der Schüler die Relation zwischen bekannten und gesuchten Grössen anzusetzen, dann die Gleichung aufzulösen. Die Aufgaben sind nach den Figuren, zuerst ebenen, dann räumlichen, geordnet. Die Resultate aller Aufgaben stehen am Ende des Buches.

H.

Aufgaben aus der Elektricitätslehre. Methodisch geordnet und mit Berücksichtigung aller Theile der Elektricität sowie unter Zugrundelegung der absoluten Maasse bearbeitet von Dr. Robert Weber, Professor an der Akademie in Neuchâtel. Mit in den Text gedruckten Figuren. Berlin 1888. Julius Springer. 176 S.

Die experimentelle und rechnende Elektricitätslehre wird als bekannt vorausgesetzt, durch die vorliegenden Aufgaben soll die Rechnung eingeübt und Vertrautheit mit der untersuchenden und technischen Praxis erzielt werden. Die Reihenfolge schliesst sich dem Lehrgange an und geht mehr und mehr zu den einzelnen technischen Verwendungen über. Auf jede Aufgabe folgt die Lösung. Erklärung wird nicht gegeben, sondern nur auf den letzten 12 Seiten tabellarische Zusammenstellungen, aus denen die quantitativen Relationen ersichtlich sind. Nicht zu billigen sind häufig wiederkehrende nachlässige Kürzungen. Der Verfasser scheint sich in seiner Praxis daran gewöhnt zu haben, notwendige Grössenangaben nach Gutdünken wegzulassen, wenn Einheiten gemeint sind. Er spricht vom Gewicht einer Quecksilbersäule von 760 mm, von einer Kraft, die 1 cm Beschleunigung in einer Grammmasse erwirkt, u. a. m. Letztere Vernachlässigung ist so durchgehend, dass sie zu dem Misverständniss verleitet, der Verfasser habe einen eigentümlichen Begriff von Kraft (sowie deren Einheit *Dyn*); erst Tafel CI. zeigt durch die Angabe MLT^{-2}, dass dies nicht der Fall ist. H.

Tabellen.

Nouvelles tables de logarithmes la circonférence étant prise pour unité (texte en français). Par J. de Mendizabal Tamborrel, Ingénieur géographe, Professeur d'astronomie et de géodésie à l'école militaire, Membre de la sociedad cientifica „Antonio Alzate“. Ancien élève de l'école d'ingenieurs. (Mexico.)

Diese Logarithmentafel ist berechnet von dem genannten Professor de Mendizabal Tamborrel und wird auf Subscription herausgegeben von der genannten Gesellschaft Antonio Alzate in Mexico. Die Zeit des Erscheinens ist nicht angekündigt. Der erste Teil enthält auf 125 Seiten die siebenstelligen Logarithmen der Zahlen bis 125000, der zweite Teil auf 274 Seiten die siebenstelligen Logarithmen der Kreisfunctionen, letztere durch die Millionstel der ganzen Periode von 4 Rechten. In Betreff der Frage, ob die ganze oder die Viertel Periode decimal zu teilen sei, führt der Verfasser als Autoritäten Yvon-Villarceau, Wolf und Hoüel an. Die zwei Erstgenannten sind der ersten Meinung. Hoüel dagegen nennt den Quadranten die natürliche Einheit. Als rationales Motiv den erstern beizutreten wird nur geltend gemacht, dass bei Teilung des Tages bereits vom ganzen ausgegangen werde. Dieser Grund ist offenbar hinfällig; denn wenn factisch eine Decimalteilung des ganzen Tages angeordnet worden ist, so ist dies ohne Berücksichtigung oder mit Hintansetzung des Charakters der Periodicität, bloss den Tag als Zeitmass im Auge, geschehen. Jede periodische Function, wofern keine besondern Eigentümlichkeiten eine Abweichung verursachen, durchläuft, vermöge ihrer doppelten Symmetrie, ihre sämtlichen absoluten Werte im Umfange eines Quadranten, und diese sind es, welche eine Tafel dem Rechner liefern muss. Die angekündigte Tafel wird daher für den Rechner stets die Bedeutung einer solchen haben, die den Rechten in 250000 Teile teilt, und die damit verbundene Unbequemlichkeit wird dadurch nicht verringert, dass sie auch an der Zeitrechnung haftet. Das gegenwärtige Unternehmen hat für uns nur das Schätzenswerte, dass dadurch die Herausgabe einer siebenstelligen Tafel der Logarithmen der Kreisfunctionen mit Decimalteilung der Winkel, welche längst Bedürfniss ist, aufs neue in Anregung kommt. H.

Vierstellige logarithmisch-trigonometrische Tafel zum Schul- und Handgebrauch zusammengestellt von Adolf Sickenberger, Professor der Mathematik und Physik am K. Luitpoldsgymnasium in München. München 1888. Theodor Ackermann. 8 S.

Diese Tafeln stellen auf kleinst möglichem Raume die am häufigsten gebrauchten Zahlenangaben zusammen: vierstellig die Logarithmen der Zahlen 100 bis 1000 nebst Differenzen, die der sin, cos, tg, cot durch alle halben Grade, dreistellig die genannten Functionen selbst, vierstellig die Quadrate und Quadratwurzeln, π, $\frac{1}{\pi}$ und $\log \pi$, dreistellig die Zinsen für 1 bis 10 proc. vor- und rückgängig auf

48 Zeiten, Kuben und Kubikwurzeln von 1 bis 10, fernere Potenzen von 2, 3, 4, 5, Binomialcoefficienten und Facultäten, 38 specifische Gewichte, 13 Geschwindigkeiten, Länge, Rectascension, Declination und Zeitgleichung der Sonne für 37 Jahrestage, Grössenangaben für die Erde, für Mond und Planeten, Breite und Länge von 11 Städten, 21 Sternorte, Präcession und Refraction. H.

Physik.

Lehrbuch der Elektricität und des Magnetismus. Von E. Mascart, Professor am Collège de France, Director des Bureau central météorologique, und J. Joubert, Professor am Collège Rollin. Autorisirte deutsche Uebersetzung von Dr. Leopold Levy. Zweiter Band. Mit 137 in den Text gedruckten Abbildungen. Berlin 1888. Julius Springer. 716 S.

Der 1. Band ist im 5. litt. B. S. 8 besprochen. Der 2. Band handelt vom Messen, und zwar sind die successiven Gegenstände: die Messungsmethoden überhaupt, einzeln Messung von Winkeln, von Schwingungen, von Kräfteparen, Eigenschaften der Kreisströme, Inductionscoefficienten; dann elektrische Messungen, und zwar Elektrometrie, Messung von Strömen, Vergleichung von Widerständen, Messung von elektromotorischen Kräften, von Capacitäten, Dielektrica, Constanten der Rollen, Messung von Widerständen in absolutem Masse, Verhältniss der Einheiten zu einander; dann magnetische Messungen, und zwar magnetisches Feld, Magnetisirungsconstanten dann industrielle Anwendungen und numerische Constanten.

H.

Handbuch der statischen Elektricität. Von E. Mascart, Professor am Collège de France, Director der meteorologischen Centralanstalt in Paris. Deutsche Bearbeitung von Dr. Jgnaz G. Wallentin, k. k. Professor am Staatsgymnasium im IX. Bezirke Wiens. Mit in den Text eingedruckten Holzschnitten. Zweiter Band. Wien 1887. A. Pichler's Witwe u. Sohn. 690 S.

Der 1. Band ist im 278. und 17. litt. Bericht, resp. S. 19 und 9 besprochen. Im 2. Bande kommen folgende Gegenstände hinzu: conductive Entladungen, Geschwindigkeit der Fortpflanzung der Elektricität, disruptive Entladungen, Dauer, Schlagweite des Funkens, Formen der Entladungen, elektrische Versuche und Eigenschaften

des Funkens, Lichtwirkungen der Entladung, elektrische Bewegungen, physiologische, chemische Wirkungen, Magnetisirung und Induction durch die Entladung; Maschinen, Reibungsmaschinen, Maschinen, welche auf die Influenzwirkung und die Uebertragung gegründet sind, Inductionsapparate, Vergleichung der Elektrisirmaschinen, Elektricitätsquellen, Contactelektricität, Spannungsreihen, elektrostatische Erscheinungen in den Säulen, thermoelektrische Erscheinungen, Gesetze der Fortpflanzung der Elektricität, Pyroelektricität, mechanische und physikalische Wirkungen, Verdampfung, chemische Erscheinungen, physiologische Elektricität, elektrocapillare Erscheinungen, atmosphärische Elektricität. H.

Elementare Vorlesungen über Elektrizität und Magnetismus von Silvanus P. Thompson, Professor der Physik am technical college zu London. Autorisirte deutsche Uebersetzung auf Grund der neuesten (28.) Auflage des Originals von Dr. A. Himstedt. Tübingen 1887. H. Laupp. 487 S.

Das Buch ist für Anfänger bestimmt und beschränkt sich rücksichtlich der Anwendung von Mathematik auf das Elementarste. Es soll, laut der Vorrede, denselben „eine klare und genaue Kenntniss verschaffen von den Experimenten, auf welchen die Lehre von der Elektricität und vom Magnetismus basirt ist, sowie von den Gesetzen, welche dabei entdeckt worden sind.“ Von dem Ziele klarer und exacter Kenntniss bleibt indes, wie wir nicht anders sagen können, die gegenwärtige Darstellung weit entfernt. Manche, auch vom Verfasser erkannte Schwierigkeit liegt in der Natur des Gegenstandes selbst, welche eine schrittweise Entwickelung der Lehre nicht zulässt. Die so äusserst verschiedenartigen Erscheinungen stehen ohne Theorie in keinem sichtlichen Zusammenhange, sind daher nicht belehrend, die Theorie aber beruht auf Erscheinungen in ziemlich grossem Umfange. Da sich also beides nicht trennen lässt, so ist die Anordnung getroffen, dass in einem ersten Teile nur die wichtigsten experimentellen Facta, einzeln von der Reibungselektricität, vom Magnetismus und von den elektrischen Strömen beschrieben werden, dann im zweiten Teile die Theorie nebst technischer Anwendung in 9 Abschnitten, nämlich Elektrostatik, Elektromagnetismus, Messung der Ströme, Wärme, Licht und Arbeit der elektrischen Ströme, Thermoelektricität, Elektrooptik, Inductionsströme, Elektrochemie, Telegraphen und Telephone — folgt. Am Schlusse sind zu jedem Capitel eine Reihe von Uebungsaufgaben aufgestellt, einige mit Angabe des Resultats. H.

Physikalische Einheiten und Constanten. Von J. D. Everett M. A., Mitglied der Royal Societies in London und Edinburgh, Professor der Physik in Belfast. Nach der dritten englischen Ausgabe unter Zustimmung des Verfassers den deutschen Verhältnissen angepasst durch Dr. P. Chappuis, Savant attaché au Bureau international des poids et mesures, und Dr. G. Kreichgauer, Assistent. Leipzig 1888. Johann Ambrosius Barth. 126 S.

Der Hauptinhalt des Buches ist eine geordnete Zusammenstellung der wichtigsten und am meisten feststehenden physikalischen Grössenangaben in den Grundeinheiten, Centimeter, Gramm, Secunde, nebst ihren Relationen. Voraus geht die Theorie der Einheiten; dann folgen die Constanten und Relationen der Mechanik, Hydrostatik, Elasticität, Astronomie, Akustik, Optik, Wärme, Magnetismus, Elektriciät. Alle eingeführten Elemente sind nach Wesen und Bedeutung ausreichend, exact und leicht verständlich erklärt. Wiewol der Verfasser alle jene physikalischen Zahlen nur als Beispiele für den Gebrauch der Einheiten gelten lassen will, so kann deren Zusammenstellung sehr wol auch den weitern Anspruch machen, einem unzählig oft eintretenden Bedürfniss beim Rechnen als Hifsmittel zu dienen. Die Uebersetzer haben zugunsten der Verbreitung in Deutschland, ohne wesentliche Aenderung des Originals, den exclusiv englischen Charakter, welcher sich namentlich in Bevorzugung englischer Untersuchungen zeigte, zu mindern gesucht. H.

Handbuch der physikalischen Massbestimmungen. Von Dr. B. Weinstein, Privat-Docent an der Universität zu Berlin und Hilfsarbeiter bei der Kaiserl. Normal-Aichungs-Commission. Zweiter Band. Einheiten und Dimensionen, Messungen für Längen, Massen, Volumina und Dichtigkeiten. Berlin 1888. Julius Springer. 552 S.

Der 1. Band, welcher die Ausgleichung der Messungsfehler lehrt, ist im 17. litt. Bericht S. 10 besprochen. Der Inhalt des zweiten ist: Theorie der Einheiten und Dimensionen, und zwar Einheiten und Dimensionen, Rechnen mit Einheiten, die praktischen Einheitsbeträge; dann mechanische Messungen, und zwar das Principielle der Vorrichtungen und Methoden bei Längenmessungen, Ausführung einfacherer Längenmessungen, Abbildung vermittelst optischer Instrumente, Längenmessungen auf Apparaten mit optischen Einrichtungen, die geometrisch mechanische Einrichtung von Längenmessungen, Einfluss von elastischen Deformationen auf die Länge von Strecken, die optische Einrichtung, Bestimmung der Teilungsfehler von Massstäben und Scalen, Bestimmung von Schraubenfehlern, Pointirungs- und Schätzungsfehler, Bedeutung der Wägungen als Massenbestim-

mungen, Gewichtssätze und deren Untersuchung, Einrichtung und Theorie der Waage, Massenbestimmung durch Wägungen, Theorie und Einrichtung, Wägungen in der Luft zu Massenbestimmungen, Volumen- und Dichtigkeitsbestimmungen. Es ist überall erst das Wesen der betreffenden Massbestimmung dargelegt, dann sind die zugehörigen Instrumente und Apparate beschrieben, hierauf ist die nötige theoretische Entwickelung für die Rechnung vorgenommen, meist mit einer Untersuchung der Fehlerquellen unter Angabe der zur Vermeidung der Beobachtungsunsicherheiten nötigen Vorsichtsmassregeln. Die Litteraturangaben machen nur da Anspruch auf Vollständigkeit, wo die betreffenden Arbeiten benutzt worden sind. H.

Die Elektricität des Himmels und der Erde. Von Dr. Alfred Ritter von Urbanitzky. Mit 400 Illustrationen. Wien, Pest, Leipzig (1888). A. Hartleben.

Der Titel des Werkes hat nicht den Sinn, den Gegenstand desselben auf die natürlichen Erscheinungen der Elektricität zu begrenzen. Es behandelt vielmehr die gesamte Elektricitätslehre und scheint, nach der 1. Lieferung zu urteilen, zur Vorbereitung der Kenntniss im Volke bestimmt zu sein. Das Ganze soll in 18 bis 20 Lieferungen erscheinen, deren erste 3 Bogen gibt. H.

Praktische Physik, Zeitschrift für Elementarphysiker, Studirende der Physik, Mechaniker, Optiker u. s. w. und Organ für den physikalischen Unterricht. Unter Mitwirkung hervorragender Autoritäten und bewährter Fachmänner herausgegeben von Dr. Martin Krieg. I. Jahrgang 1888. A. u. R. Faber in Magdeburg.

Diese neue Zeitschrift erscheint in monatlichen Heften von 16 bis 24 Seiten. Sie hat sich zur Aufgabe gemacht „die Interessen aller derer zu fördern, die direct eder indirect mit der Praxis der Physik in Verbindung stehen.“ Die darin enthaltenen Aufsätze sind vorwiegend dem physikalischen Unterrichte, namentlich den Demonstrationsexperimenten, gewidmet, doch finden auch Mitteilungen über Versuche, Apparate und deren Verbesserungen ohne diese Beziehung Platz. Ausser den Aufsätzen enthält jedes Heft Litteraturanzeigen, Inhaltsverzeichnisse und Besprechung von Büchern, Vereinsnachrichten, Fragen und Correspondenzen. H.

Vermischte Schriften.

The Journal of the College of Science, Imperial University, Japan. Vol. I. part. IV. Vol. II. part. I. II. III. Tokyo 1887. 1888. Published by the university.

Die ersten 2 Hefte geben Fortsetzungen der im 21. litt. Bericht S. 13. aufgeführten Untersuchungen des Prof. Seikei Sekiya über Erdbeben. Die Arbeiten sind betitelt:

Ein Modell, welches die Bewegung eines Erdteilchens während eines Erdbebens zeigt.

Erdbebenmessungen der letzten Jahre besonders bezüglich auf verticale Bewegung.

Der erstern ist das vom Seismographen-Apparat gezeichnete dreifache Diagramm der verticalen, westöstlichen und südnördlichen Bewegung beigefügt.

Ausserdem enthält das letztgenannte Heft die deutsche Arbeit:

R. Fuisawa: Ueber die Darstellbarkeit willkürlicher Functionen durch Reihen, die nach den Wurzeln einer transcendenten Gleichung fortschreiten.

C. G. Knott und A. Tunakadate: Eine magnetische Untersuchung von ganz Japan.

Die übrigen Artikel handeln von Japans Landesproducten.

H.

Proceedings of the Canadian Institute. Toronto. Being a continuation of the „Canadian Journal" of Science, Litterature and History. Third series. Vol. V. Toronto 1888. The Copp. Clark. Compagny Limited.

Der 5. Band enthält in 2 Heften folgende mathematische und physikalische Arbeiten.

C. Fessenden: Ein neuer Planimeter.

Rosebrugh: Doppelte Telephonie.

J. Ives: Geologie in den öffentlichen Schulen H.

Annual report of the Board of Regents of the Smithsonian Institution, showing the operations, expenditures and conditions of the Institution for the year 1884. 1885. Washington.

Jeder von beiden Jahrgängen enthält einen Bericht von George F. Barker über die Fortschritte der Physik nach europäischen Zeitschriften. H.

Bulletin of the Philosophical Society of Washington. Vol. X. 1887. Containing the minutes of the Society and of the Mathematical Section for the year 1887; together with the proceedings of the Baird Memorial Meeting and an index to the first ten volumes. Published by the co-operation of the Smithsonian Institution. Washington 1888.

Es wird über 12 Sitzungen der mathematischen Section berichtet. Die daraus hervorgegangenen Arbeiten sind andern Zeitschriften zur Publication übergeben und im gegenwärtigen Bericht nur kurze Mitteilungen darüber gemacht. Sie betrafen statistische und Wahrscheinlichkeitsfragen, die Methoden der Winkeldreiteilung, die Integration von Differentialgleichungen, welche periodische Integrale zulassen, Euler's (Lambert's) Theorem in Anwendung auf Berechnung von Kometenbahnen, die Constante P in Beobachtungen des Erdmagnetismus, die Abkühlung einer homogenen Kugel, die Bahn des Hyperion, die Wirkung zweier Elemente eines elektrischen Stromes und die Methoden Zahlen zu finden, deren $n$te Potenzen eine Summe haben, die wieder $n$te Potenz ist, nebst Beispielen bis $n = 5$. H.

Nieuw Archief voor Wiskunde. Deel XIV. Amsterdam 1887. Sikken u. Co.

Der Inhalt des 14. Bandes ist:

P. H. Schoute: Untersuchung der Bewegung eines Punktes, auf den von einem Centrum aus 2 Kräfte ar^{-m} und br^{-n} (m, n ganze Zahlen) wirken, und der eine gegebene Anfangsgeschwindigkeit normal zum Radiusvector hat. (Preisfrage) (Fortsetzung des Artikels im 13. Bande.)

F. J. van den Berg: Ueber eine Frage der sphärischen Trigonometrie. — Ueber solche Systeme zweier Kreise in der Ebene oder auf der Kugel oder auch zweier coaxialen Ellipsen in der Ebene, dass sich ein Vieleck in die eine und um die andre Curve beschreiben lässt.

J. de Vries: Ueber ebene Curven 4. Ordnung mit 2 Doppelpunkten.

C. Stolp: Eine Formel aus der analytischen Geometrie. Bibliographie. H.

Acta Mathematica. Zeitschrift herausgegeben von G. Mittag-Leffler. 11. Stockholm 1888. F. u. G. Beijer. Berlin, Mayer u. Müller. Paris, A. Hermann.

Der Inhalt des 11. Bandes ist:

E. Picard: Beweis eines allgemeinen Satzes über die einförmigen Functionen, welche durch eine algebraische Relation verbunden sind.

E. Strauss: Eine Verallgemeinerung der dekadischen Schreibweise nebst functionentheoretischer Anwendung.

M. Lerch: Note über die Function $\mathfrak{R}(w, x, s)$.

Bruns: Ueber die Integrale des Vielkörper-Problems.

K. Heun: Zur Theorie der mehrwertigen mehrfach linear verknüpften Functionen.

K. Schwering: Eine Eigenschaft der Primzahl 107. — Untersuchungen über die Normen complexer Zahlen.

Sir W. Thomson: Ueber die Teilung des Raumes mit kleinster Teilungsfläche.

E. Goursat: Ueber eine Transformationsweise der Minimalflächen. 2. Aufsätze.

A. Hurwitz: Ueber die Entwickelung complexer Grössen in Kettenbrüche.

L. Sylow: Ueber die transitiven Gruppen, deren Grad das Quadrat einer Primzahl ist.

J. F. Söderberg: Beweis des Fundamentaltheorems von Galois in der Theorie der algebraischen Lösung der Gleichungen.

O. Staude: Ueber die Bewegung eines schweren Punktes auf einer Rotationsfläche.

H. Weber: Zur Theorie der elliptischen Functionen (zweite Abhandlung).

R. v. Lilienthal: Bemerkung über diejenigen Flächen, bei denen die Differenz der Hauptkrümmungsradien constant ist.

J. Ptaszycki: Ueber die algebraische Integration der algebraischen Differentiale.

Nachricht über die eingegangenen Arbeiten für den Preis Oscar II. H.

Naturwissenschaftliche Wochenschrift. Redaktion: Dr. H. Potonié. II. Band. Berlin 1888. H. Riemann.

Jede auf 1 Bogen in 4^0 Format wöchentlich erscheinende Numer enthält Aufsätze, dann kleinere Mitteilungen, dann bisweilen Fragen und Antworten u. a. Die Gegenstände sind sehr mannichfaltig, begrenzen sich auch nicht auf Naturwissenschaft, wenn gleich diese den Mittelpunkt bildet. Das eine aber ist den Aufsätzen gemeinsan, dass sie neuerdings aufgetauchte Tagesfragen in populärer Behandlung von Seiten competenter Gelehrten bringen, daher auf Interesse in weitem Kreise wol rechnen können. H.

American Journal of Mathematics. Simon Newcomb, Editor Thomas Craig, Associate Editor. Published under the Auspices of the Johns Hopkins University. Volume X. Baltimore 1888. Publication Agency of the Johns Hopkins University.

Der Inhalt des 10. Bandes ist:

J. Sylvester: Vorlesungen über die Theorie der Reciprocanten.

Eliakim H. Moore: Algebraische Flächen, deren ebene Schnitte nach Auffassung der n dimensionalen Geometrie unicursal sind. — Ein in der Geometrie der Netze und Curven sich darbietendes Problem angewandt auf die Theorie der 6 Punkte mit vielfach perspectiven Beziehungen.

M. Jenkins: Ueber Cayley's Erweiterung von Arbogast's Derivationsmethode.

P. A. MacMahon: Eigenschaften einer vollständigen Tafel der symmetrischen Functionen. — Der Ausdruck der Syzygien unter Perpetuanten mittelst Partitionen.

O. Bolza: Ueber binäre Functionen 6. Grades mit linearen Transformationen in sich selbst.

Cayley: Ueber Transformationen elliptischer Functionen (Fortsetzung).

W. Woolsey: Symbolische Behandlung exacter linearer Differentialgleichungen.

G Paxton Young: Lösbare Gleichungen 5. Grades mit commensurabeln Coefficienten.

D. Barcroft; Formen nicht singularer Curven 5. Grades.

Frank Morley: Ueber kritische Centra. – Ueber geometrische Folgerungen aus algebraischer Symmetrie.

Faà de Bruno: Directer Beweis der Jacobi'schen Formel der kubischen Transformation.

P. Appell: Flächen derart, dass der Anfangspunkt sich auf jede Normale (mittelst der) in den Hauptkrümmungsmittelpunkten projicirt.

E. Goursat: Flächen derart, dass die Summe der Hauptkrümmungsradien der Entfernung eines festen Punktes von der Berührungsebene proportional ist.

K. Heun: Bemerkungen über die logarithmischen Integrale regulärer linearer Differentialgleichungen.

C. H. Chapman: Ueber einige Anwendungen der Einheiten eines n fachen Raumes.

G. Humbert: Ueber die Orientirung in den Systemen von Geraden.

R. Liouville: Ueber die geodätischen Linien der Flächen constanter Krümmung.

J. M. Page: Ueber die primitiven Transformationsgruppen im Raume von 4 Dimensionen.

W. C. L. Gorton: Linien-Congruenzen.

F. Franklin: Einige Sätze den Schwerpunkt betreffend.

H.

Revue der Fortschritte der Naturwissenschaften. Herausgegeben unter Mitwirkung hervorragender Fachgelehrten von der Redaction der „Gaea" Dr. Hermann J. Klein. (Fünfzehnter Band.) Neue Folge. Siebenter Band. Nr. 3. Physik. Leipzig 1887. Eduard Heinrich Mayer.

Nr. 1. und 2. sind im 20. litt. Bericht Seite 48 besprochen. Die gegenwärtige Lieferung enthält eine Reihe neuer Beobachtungen und Entdeckungen unter den Titeln: Mechanik, Akustik, Optik, Wärme, Elektricität und Magnetismus. An Stelle der Mechanik findet man vielmehr Zustandsveränderungen von Stoffen. H.

Verlag von B. F. Voigt in Weimar.

Lehrbuch der

Optik.

Dritte Auflage

von Dr. F. W. Barfuss' „Populäres Lehrbuch der Optik, Katoptrik und Dioptrik",

vollständig neu bearbeitet von

Ferdinand Meisel,

Direktor der gewerblichen Zeichenschule in Halle a. S.

Mit Atlas von 17 Foliotafeln.

1889. gr. 8. Geh. 12 Mark.

Vorrätig in allen Buchhandlungen.

In unserem Verlage erschien:

Inhaltsverzeichniss

zu

Teil LV—LXX

des

Archiv der Mathematik und Physik.

I. Abt., nach den Autoren geordnet.
II. „ nach der Materie geordnet.

Geh. Preis 1 Mk. 80 Pf.

Leipzig. **C. A. Koch's** Verlagsbuchhandlung.
(*J. Sengbusch.*)

„Naturwissenschaftliche Wochenschrift".

Redaktion: Dr. H. Potonié. — Verlag: Hermann Riemann, Berlin.

Die **„Naturwissenschaftliche Wochenschrift"** bringt allgemeininteressante Aufsätze und orientirt über die Fortschritte aus dem Gesamtgebiet der Naturwissenschaft und ihrer praktischen Anwendung. Auch dem sich für Naturwissenschaft interessirenden Laien ist die **„Naturwissenschaftliche Wochenschrift"** durch allgemeinverständliche Sprache ein wertvolles Organ.

Preis vierteljährlich 3 Mk. — Man abonnirt bei allen Postämtern und allen Buchhandlungen.

Mitarbeiter unter vielen anderen: Prof. *Albrecht*, Universitäts-Prof. *Ascherson*, Real-Gymnasialdir. *Bach*, Kgl. Landesgeol., Prof. *Behrendt*, Vereid. Chemiker d. Kgl. Gerichte u. d. Polizei-Präsidiums zu Berlin Dr. *Bischoff*, Oberbergrath Prof. Dr. *Credner*, Dr. *Dreher*, Geh. Regierungsrath Prof. Dr. *Galle*, Prof. *Frank*, DDr. *Arthur* u. *Aurel Krause*, Dr. *Löw*, Prof. *Nehring*, Kreisphys. Dr. *Schmitz*, Prof. *Taschenberg* u. s. w.

Litterarischer Bericht
XXVII.

Methode und Principien.

Das Problem der Continuität in Mathematik und Mechanik. Historische und systematische Beiträge von Dr. Ferdinand August Müller, Privatdocent der Philosophie an der Universität Giessen. Marburg 1886. N. G. Elwert. 123 S.

Sofern das Vorliegende der Geschichte der Mathematik, einschl. der Mechanik, gilt, erstreckt sich dieee auf die Autoren Descartes, Leibniz, Huyghens, Cavalleri, Kant und Robert Mayer. Wissenschaftliche Objecte der Schrift sind factisch drei: die Stetigkeit und das Unveränderliche in der Substanz und in der Kraft. Angeblich ist nur die Stetigkeit zum Gegenstande genommen: die Zuziehung der zwei andern Objecte motivirt sich zunächst durch den Gedankengang von Descartes und Leibniz, in welchen eine unklare Begriffsmischung einspielt. Aber der Verfasser erklärt sie sogar sachlich für unumgänglich, und dies vermag am allerwenigstens der fernere Gang der Schrift selbst darzutun, der als reiner Abschweif erscheint. In der Tat betrachten wir fast nie eine Veränderung ohne eine Snbstanz, die sich verändert, und wenn keine solche bekannt ist, so legt die Sprache eine passende unter. Die Unveränderlichkeit der Substanz mag also zur Auffassung der Veränderung notwendig oder doch eine Hülfe sein. Was hat aber die Existenz eines Constanten mit der Stetigkeitsfrage zu tun? Wenn wir uns an die Schrift halten, so wird nur erwähnt, dass Leibniz eine zeitlang das Wesen der Stetigkeit im Fortbestehen der Substanz gesucht hat; sonst kommt keine Beziehung beider Begriffe vor, und auch jenem Versuche schreibt der Verfasser keine Fruchtbarkeit zu. Ueberlassen wir es indes dem Verfasser, ob er von einem oder von drei Dingen sprechen will.

Charakteristisch für das Ganze ist: auf dem Titel steht „Problem der Continuität", und nirgends ist ein Problem kenntlich gemacht. Was ist gegeben? was gesucht? ist es noch Problem, oder eine Lösung bekannt? glaubt der Verfasser eine Lösung gefunden zu haben, und wo steht diese? Von allem dem ist kein Wort zu lesen. Versucht man aus dem Zusammenhange zu erraten, was der Verfasser mit dem Problem gemeint hat, so spricht alles nur dafür, dass er sich selbst darüber keine Rechenschäft gegeben hat. Als Erscheinung gegeben ist offenbar die Stetigkeit der Bewegung. In der Tat legt auch die Schrift die Stetigkeit dem Raume und der Zeit bei, aber ohne sich zu erklären, ob sie damit ein Gegebenes oder ein Resultat bezeichnen will. Gesucht kann sein der exacte Begriff und der brauchbaure, wissenschaftlich erfolgreiche analytische Ausdruck. Diese sind Problem gewesen, und manche verfehlte Lösungsversuche damit aufgestellt worden; heutzutage sind sie es nicht mehr. Der Verfasser lehnt es ab auf die Theorie einzugehen, was ihm offenbar gestattet ist; wäre nur in seiner Darstellung des historischen Entwickelungsganges eine Annäherung an das erreichte Ziel zu erkennen. Der erste Teil der Geschichte ist wol das Beste im Buche: hierin ist wirkliche Arbeit zu erkennen; namentlich ist die Auslese aus den Schriften von Leibniz, ihre Zusammenstellung mit Stellen aus den übrigen genannten Autoren, ihre Auffassung von Seiten des Verfassers gemäss seinem Themata instructiv und zeugt von Fleiss. Dass er in der Geschichte nicht weiter zurück gegangen ist, wird ihm wol niemand zum Vorwurf machen und brauchte er nicht in der Vorrede zu motiviren. Dass er aber, nachdem er erklärt hat, Leibniz habe das Problem nicht zu lösen vermocht, von dessen Zeitgenossen Newton ganz schweigt. dessen Fluxionstheorie doch gewiss dem Ziele näher kommt, als die Monadenlehre des erstern, ist auffällig genug. Der Verfasser schliesst vielmehr den ersten Teil der Geschichte hier auf dem Punkte des Miserfolgs ab und eröffnet den zweiten Teil mit der neuen Aera, in welcher Kant die Frage von höherem Gesichtspunkte angegriffen habe. Auch diesem zweiten Teile müssen wir eine Leistung zuerkennen, nur ist es die umgekehrte. Wenn er die formale Logik und Metaphysik in ihrer Dürftigkeit, Schalheit und Hohlheit, dazu in ihrem Hochmut, der sie als Quelle aller wissenschaftlichen Entdeckungen weit über die speciellere Untersuchung stellt, vor Augen führen wollte, so ist die Abfassung gelungen zu nennen. Die Satyre wird durch die begleitende Lobpreisung der Metaphysik, durch Hervorhebung der Bescheidenheit Kant's, der auch der speciellen Arbeit, mit der er sich nicht befassen wolle, Verdienst zuerkennt (!), noch verschönert. Ihre Wirkung hätte nur noch erhöht werden können, wenn er die Caricatur etwas gemildert und auf plausibele Weise aus dem Schema: „Quantität: Allgemeine,

Besondere, Einzelne — Qualität: Bejahende, Verneinende, Unendliche — Urteile" Sätze über Stetigkeit und Infinitesimalrechnung hervorgeleitet hätte. Er zieht nur daraus das Schema: 1, a, ∞, und damit ist Stetigkeit und Unendlichkeit abgetan. Dagegen sticht doch die Behauptung, es sei durch Metaphysik ein höherer Standpunkt erreicht, in zu schroffer Weise ab. Grösser kann selbst durch die angefügte Betrachtung über Mayer's Entdeckung der Aequivalenz von Wärme und Arbeit, die er seiner Neigung zur Metaphysik verdanken soll, die Caricatur nicht werden. Ob nun der Verfasser mit oder ohne Absicht eine Satyre geschrieben hat, mag immer noch zweifelhaft bleiben; es gibt Leute genug, welche die Ironie für Wahrheit nehmen, und andere, welche der formalen Logik und Metaphysik alle Ehre erweisen, bloss um damit verschont zu werden, somit ist die Möglichkeit nicht ausgeschlossen, dass er auf beiderlei Leser gerechnet hat. Hoppe.

Was sind und was sollen die Zahlen? Von Richard Dedekind, Professor an der technischen Hochschule zu Braunschweig. *Ἀεὶ ὁ ἄνθρωπος ἀριθμητίζει.* Braunschweig 1888. Friedrich Vieweg u. Sohn. 58 S.

Auf diese Frage gibt der Verfasser im Vorwort die Antwort: „Die Zahlen sind freie Schöpfungen des menschlichen Geistes, sie dienen als ein Mittel, um die Verschiedenheit der Dinge leichter und schärfer aufzufassen." Dieser Satz ist ziemlich unbestimmt und charakterisirt nicht sichtlich das Folgende; er sei daher ohne Einwand übergangen. In näherer Beziehung zur Schrift steht die Aussage: „Diese Schrift kann Jeder verstehen, welcher das besitzt, was man gesunden Menschenverstand nennt." In der Tat zeichnet sich die Abfassung, bis auf wenige, aber sehr bedeutungsvolle Ausnahmen, durch bewundernswerte Umsicht und Schärfe aus; mit äusserstem Fleisse ist für den Leser gesorgt, dass er nichts zur Auffassung nötige vermissen soll; andrerseits ist auch Kunst und Umsicht dazu verwandt, die Namen der noch zu erklärenden Begriffe zu meiden; während doch der Leser jenen Begriffen beständig begegnet und sie zur Auffassung nicht entbehren kann. Hiermit mag soviel erreicht sein, dass jeder Leser auf den ersten 10 Seiten dem Vortrage leicht folgt und die Meinung gewinnt alles verstanden zu haben. Weiterhin wird es ihm nicht so leicht gemacht; er befindet sich in der Lage eines Wanderers, dem der Führer lange auf ebener Strasse mit der Laterne vorgeleuchtet hat, nun aber, wo der zerklüftete Weg kommt, bei Annäherung an die gefährlichen Stellen die Laterne auslöscht. Die Abhängigkeit einmal definirter und fremdartig be-

nannter relativer Begriffe wird nicht mehr ausgesprochen, man muss beständig, um einen Sinn zu finden, die Citate vergleichen, und schliesslich bleibt nach vielem Hinundhersehen allerhand zweifelhaft. Was der Verfasser im Vorwort an Widerwärtigem einräumt, ist dagegen unerheblich und trifft nicht einmal zu. Er sagt, mancher Leser würde in den vorgeführten schattenhaften Gestalten kaum seine Zahlen wieder erkennen, Im Gegenteil würde man die gegebenen leeren Rahmen, um doch etwas dabei zu denken, kaum anders auszufüllen wissen als durch die bekannten Zahlen. Ferner sagt er, mancher Leser würde durch die lange Reihe von Schlüssen und durch die Zergliederung dessen, was er in der Kürze vollständig und sicher zu verstehen glaubt, abgeschreckt und ungeduldig werden. Hierzu ist die Abfassung nicht angetan. Die geschickte und sichere Handhabung, der durchschauliche Fortschritt bei beständiger Offenherzigkeit üben einen dauernden Reiz, der Ungeduld nicht aufkommen lässt, und erweckt Hoffnung neue Seiten des bekannten Gegenstands kennen zu lernen. Erst nach Durchlesung und Durchstudiren des Ganzen wird man leider gewahr, dass man in dem schönen Aufbau kein neues Licht über die Zahlen gewonnen hat, sondern nur durch eine geistige Gymnastik unterhalten worden ist, die mitunter auch zu Falle bringen kann.

Nach dieser Schilderung des Eindrucks der Schrift wenden wir uns zur Prüfung des Einzelnen. Um der Natur der hier gebrauchten Methode willen ist Folgendes im voraus zu bemerken. Es leuchtet ein und hat wol noch niemand zu bestreiten versucht, dass Bedingungen einen Begriff nur dann zu bestimmen vermögen, wenn der positive Inhalt als bekannt vorausgesetzt werden kann. Sie begrenzen stets nur Bekanntes gegen Bekanntes. Die Kreisfläche würde durch den Kreis nicht bestimmt werden, wenn der Begriff der Ebene unbekannt wäre. Auch Beispiele zum Beleg der Existenz des positiven Inhalts können den Mangel nicht ersetzen. Dies berücksichtigt der Verfasser im Anfang, indem er zur Erläuterung des Begriffes eines Systems vorher an die „Dinge“ erinnert, die zum Systeme zusammengefasst werden. Es fragt sich aber: Ist hiermit der ganze Inhalt kund getan? Zunächst wird man an vorliegende Dinge von fester Anzahl denken, und an andre wird auch nicht erinnert. Doch ist auch der Sinn von Systemen $a_1, a_2, \ldots a_n$ für allgemeines n bekannt und mit keinem Worte ausgeschlossen. Lässt man aber einmal zu, dass nicht die Dinge, sondern nur das Gesetz ihrer Bildung gegeben sind, so kann man auch die Gesamtheit aller Punkte auf einer Linie, Fläche u. s. w, die keine Anzahl haben, ein System nennen, und nichts gibt Gewähr, dass der Verfasser den Begriff nicht auf Ungedachtes und Undenkbares anwendet. Hieraus ist er-

sichtlich, dass der Begriff „System", wofern er nicht ausdrücklich auf auszählbare Dinge beschränkt wird, diejenige Bestimmtheit entbehrt, welche der Basis einer streng logischen Theorie zukommen muss, dass der Zahlbegriff schon zugrunde liegt, wenn der Systembegriff zur Klarheit gelangt, dass es also eine didaktische Verkehrtheit ist, jenen aus diesem ableiten zu wollen. Bis §. 3. und vielleicht noch weiter steht nichts entgegen die genannte Beschränkung festzuhalten. Es folgt eine Reihe von Erklärungen, Sätzen und Beweisen. „Abbildung" hat die gewöhnliche Bedeutung. „Echter Teil eines Systems" heisst ein solcher, der dem ganzen nicht gleich ist, während „Teil" selbst das genannt wird, was man als echten Teil nicht zu denken weiss. „Aehnlich" heisst hier eine eindeutig umkehrbare Abbildung, was sich aus keiner bekannten Bedeutung des Wortes entnehmen lässt. „Abbildung" in sich selbst" ist gleichbedeutend mit Permutation. Soweit und nicht weiter wird eine gewöhnliche Fassungsgabe beansprucht. Jetzt wird die Erklärung gegeben: „K heisst eine Kette, wenn K' Teil von K ist" — mit der Bemerkung, dass durch vorher bestimmte Abbildung (bezeichnet durch Function φ) K in K' übergegangen zu denken ist. Diese Bemerkung zeigt die erste Relativität des Begriffs an, die jedoch bei dessen Anwendung nie ausgesprochen wird. Ihr zufolge stellt sich nun die Frage ein: Wie können dann irgend 2 Systeme K und K_1 Ketten sein? In der Analysis ist durch $\varphi(x)$ auch $\varphi(y)$ definirt. Im Vorliegenden hingegen, wo nur an tabellarisch gegebene Abbildungen gedacht wird, hat dasselbe φ für verschiedene x keinen Sinn. Wäre also die Eigenschaft der Kette nur von φ abhängig, so müsste K_1 Teil von K sein. Aus dem Zusammenhange ist zu ersehen, dass K Teil eines Systems S sein soll; dann sind alle Ketten als Teile von S zweitens von S abhängig, und wenn etwa, was gestattet ist, S die ganze Welt bedeutet, so muss eine Tabelle der Abbildungen φ so lang, dass kein Buch sie fasst, bekannt sein, um nur bezüglich auf ein specielles φ eine beliebige Kette zu denken. Diese zweite Relativität ist gar nicht ausgesprochen. Hierzu kommt nun eine dritte durch eine Einführung. Kette von A, einem Teile von S, heisst „die Gemeinheit aller derjenigen Ketten, von welchen A Teil ist." Eine solche Lehre, meint also der Verfasser, könne Jeder verstehen, der gesunden Menschenverstand besitzt. Eher wäre es begreiflich, dass jemand, der mit so complicirten Begriffen von dreifacher Relativität operirt, sich vor jeder Controle sicher glauben könnte. Der bald folgende zu rügende Fehler indes verbirgt sich nicht hinter diese Schwierigkeit, sondern stellt sich ganz offen dar. In Nr. 64. wird erklärt: „Ein System S heisst unendlich, wenn es einem echten Teile seiner selbst ähnlich ist." Bedingung dafür ist, dass in irgend einer Abbildung S' jedem verschiedenen Elemente von S ein verschie-

denes Element von S' entspricht, dass ferner jedes Element von S' in S, aber nicht jedes Element von S in S' enthalten ist. Dies ist ein offenbarer Widerspruch, wofern wir an der oben genannten Beschränkung des Systembegriffs, unter der allein er durch Aufweisung seines Inhalts klar ist, festhalten. Dem entgegen wird nun in Nr. 66. die Behauptung aufgestellt: „Es gibt unendliche Systeme." Der angebliche Beweis verlässt gleich von Anfang den objectiven Boden, der für Evidenz, für einen zwingenden Beweis, stets gefordert wird. S soll „meine" Gedankenwelt, die Abbildung S' „mein" Denken derselben Gedanken sein. Nun ist aber die Gedankenwelt eines Menschen nur zumteil objectiv, d. h. lässt sich von allen Menschen in identischem Sinne auffassen. Nur soweit dies der Fall ist, kann von exacter Uebertragung der Gedanken vom Verfasser auf den Leser die Rede sein. Der übrige Teil ist zur Zeit ein auf das Subject beschränktes psychisches Phänomen, das für den Leser keine intellectuelle Geltung hat. Mehr als irgendwo tritt dies in der entscheidenden Frage hervor: Enthält S ein Element, das in S' nicht enthalten ist? Als Beispiel — und wir müssen betonen, als einziges Beispiel im ganzen Buche, mit dem alles steht und fällt — führt der Verfasser an: das Ich. Dieses als Original aller Gedanken des Ich steckt freilich nicht in S', aber auch nicht identisch im S des Lesers, beides aus gleichem Grunde, weil es kein Gegenstand sein kann. Ein Beispiel, das für alle Menschen in gleichem Sinne gälte, ist nicht aufgewiesen, demnach bleibt die Behauptung (66.) unbegründet. Jetzt kann es sich noch um die Anwendung des Satzes 66. handeln, da diese noch immer richtig und anderweit begründet sein könnte. Es wird erklärt: „Ein System N heisst einfach unendlich, wenn es eine solche ähnliche Abbildung φ von N in sich selbst gibt, dass N als Kette eines Elements erscheint, welches nicht in $\varphi(N)$ enthalten ist." Dieses Element wird mit dem Symbol 1 bezeichnet; die vorstehende Erklärung soll also den Begriff der Einheit definiren. Es folgt der Satz: „In jedem unendlichen Systeme S ist ein einfach unendliches System N als Teil enthalten." Der Beweis stützt sich auf Nr. 64. zum Nachweis der Existenz des Elements 1, sofern die Eigenschaft von S zur Voraussetzung gemacht ist. Ist aber die Eigenschaft widersinnig, so ist es auch die Behauptung, und zwischen Unsinn und Unsinn einen strengen Zusammenhang zu statuiren ist ein logischer Fehler. Es war deshalb doch nötig sich auch auf Satz 66. zu berufen, der noch unbewiesen ist. Auch mit dieser Widerlegung wollen wir uns nicht begnügen; die Erklärung gibt an die Hand zu versuchen, ob die Einheit, also ein objectives Element, im Beweise des Satzes 66. als Beispiel gebraucht werden könnte. Die unendliche Zahlenreihe 1, 2, 3, .., sei das System S, jedes Element werde durch Addition

von 1 abgebildet, es sei also S' das System 2, 3, 4 ... Ersteres enthält alle Zahlen, mithin das ganze System S'; letzterem fehlt das Element 1, und damit ist die Bedingung erfüllt. Der Trugschluss ist ein sehr bekannter und oft gerügter. Der Begriff des Systems ist nur für fertig vorliegende Objecte erklärt, die unendliche Zahlenreihe aber liegt nicht fertig vor, im erklärten Sinne gibt es also kein solches System. Wollen wir den Begriff nach Bedarf erweitern, so müssen wir, um die Gesamtheit der Elemente einzuschliessen, statt ihrer die Fähigkeit sie zu bilden setzen. Bilden wir die Elemente und zugleich ihre Abbildung, so entspricht jedem n ein $n+1$ in S', welches in S nicht enthalten ist, und zwar ohne Aufhören, folglich allgemein, d. h. allgemein, S' ist nicht Teil von S.

Auf den übrigen Teil der Schrift, welcher von einigen arithmetischen Operationen handelt, einzugehen, möchte wol, nachdem die Basis als fehlerhaft nachgewiesen ist, zwecklos sein. Was der Verfasser mit dem Ganzen hat erreichen wollen, bleibt durchaus dunkel. Hoppe.

Die Eigenschaften der Materie. Von P. G. Tait, M. A. Professor der Physik an der Universität in Edinburgh. Autorisirte Uebersetzung von G. Siebert. Wien 1888. A. Pichler's Witwe u. Sohn. 322 S.

Das Buch gibt eine populäre Erläuterung von Fragen, welche die Materie und ihre Eigenschaften betreffen, sucht Vorurteile, die in minder gebildeten Kreisen herrschen, zu berichtigen und nach gegenwatig erreichtem Standpunkt die grösst mögliche Klarheit zu verbreiten. Die vielteiligen hier behandelten Themata sind unter folgende Titel zusammengefasst: Hypothesen über die letzte Structur der Materie, durch den Sprachgebrauch der Materie beigelegte Eigenschaften, Zeit und Raum, Undurchdringlichkeit, Porosität und Teilbarkeit, Trägheit, Beweglichkeit und Centrifugalkraft, Gravitation, Deformabilität und Elasticität, Zusammendrückbarkeit der Gase, Flüssigkeiten, fester Körper und deren Starrheit, Cohäsion und Capillarität, Diffusion, Osmose, Transpiration, Zähigkeit u. s. w., Aggregation der Massenteilchen. In den meisten hieran geknüpften Fragen ist der heutige Standpunkt der Wissenschaft noch weit von seinem Ziele entfernt. Ist es nun überhaupt geboten, Lehren der Wissenschaft einem Laienpublicum erst dann mitzuteilen, wenn sie gesichert und unbestritten sind, so begegnet auch der Versuch einer Darstellung unfertiger Lehren grossen Schwierigkeiten, sobald etwas ganzes und instructives geliefert werden soll. Im Vorliegenden ist Deduction ganz ausgeschlossen, Kritik nur in sehr geringem Masse

vorhanden; daher konnten bei Verschiedenheit der Ansichten nur Meinungen unbegründet gegenübergestellt werden. (Mehr Begründung findet man, namentlich in den 4 Anhängen, wo der Verfasser andere Autoren reden lässt.) Bei dieser Sachlage, wo der grösste Teil des Vorgetragenen noch Gegenstand wissenschaftlicher Untersuchung ist, können wir uns indes nicht darauf beschränken die Schrift als einfache Belehrung für Laien anzusehen; das Hauptinteresse fällt vielmehr der Charakterisirung des Standpunktes jener Untersuchungen zu. Die Schrift macht den Eindruck ungemeiner Klarheit, reifer Ueberlegung und Freiheit von Vorurteilen. Um so mehr fallen zwei Punkte des Gegenteils auf. Beide weisen auf eine gemeinsame Quelle in einem populären Vorurteil und Mangel an Ueberlegung hin. In der Tat findet man nirgends die Frage erörtert, was naturwissenschaftliche Erklärung heisst, und was ihr Ziel ist. Dass der Verfasser sie auch sich selbst nie vorgelegt hat, darauf deuten seine Aeusserungen wenigstens hin. Als ob ihm die Antwort unbekannt wäre: Erklärung beobachteter Vorgänge heisst die Aufweisung unabänderlicher Gesetze, aus denen sie notwendig folgen; ihr Ziel ist grösstmögliche Einfachheit und geringst mögliche Anzahl der Gesetze; für Unveränderliches hat Erklärung keinen Sinn – adoptirt er naiverweise die roheste Auffassung, der man wol unter Unkundigen oft begegnet, welche in der Erklärung nur Zurückführung auf bekannte Begriffe und Vorstellungen suchen. Zuerst ist auffällig, dass or im Gegensatz zur Energie, welche vollkommen objectiv sei, im Begriffe der Kraft eine gewisse Subjectivität findet, sofern ihm nichts wirkliches zugrunde liege als die animalische Kraft. Es verhält sich vielmehr umgekehrt: im Begriffe der kinetischen Energie ist eine absolute Geschwindigkeit enthalten, die weder in der Beobachtung noch in der Idee existirt, und wenn man sie durch relative Geschwindigkeit ersetzen will, so sind nicht einmal die Differenzen der den verschiedenen Auffassungen entsprechenden Werte der Energie constant Demnach ist die Objectivität des Energiebegriffs eine sehr mangelhafte. Dagegen ist im mechanischen Begriffe der Kraft nichts unbestimmbares enthalten: die nicht definirbare Constante der Translation ist eliminirt, die Rotation gerade durch Kraftwirkung bestimmbar. Jene Aeusserung zeigt, dass der Verfasser den Begriff der Kraft nur dadurch und nur soweit für erklärt hält, als sich etwas analoges im Bewusstsein des Unkundigen vorfindet. Ob sich jemand den abstracten Gedanken der mechanischen Kraft unter dem Bilde der analogen animalischen Kraft vergegenwärtigen und sich denken will, der Dampf im Kessel fühle sich durch die Menge beengt und drücke im Streben nach Erweiterung auf die Wände, trägt zur Klarheit des Begriffs nichts bei, denn das Substituirte ist nicht einfacher als die Erscheinung. Was

auf den wissenschaftlichen Begriff übergegangen ist, ist bloss der der Name. Jene kurz vorübergehende Aeusserung steht indes nicht allein. Sehr ausführlich wird die Wirkung in die Ferne besprochen. In der Einleitung wird behauptet, dass heutzutage nur Wenige eine räumlich und zeitlich unvermittelte Fernwirkung annehmen. Hier hat wahrscheinlich der Verfasser alle diejenigen nicht mitgezählt, welche die Frage als längst erledigt mit keinem Worte mehr berühren. Das Newton'sche Attractionsgesetz besteht im Einklang mit allen Erscheinungen unveränderlich, und niemand denkt daran es zu vereinfachen; daher hat Erklärung der Fernwirkung keinen Sinn, sondern nur Erklärung durch Fernwirkung als letzte Ursache. Dagegen hat die Fernwirkung kein Analogon im gemeinen Leben: wer auf einen Gegenstand einwirken will, muss ihn mit Arm, Stange, Draht oder durch Wurf (Lichtstrahl u. s. w.) erreichen. Auf dieses vulgäre Bedürfniss eines Analogons reducirt sich also das Desideratum so zahlreicher Grübler, welche die Fernwirkung durch Stösse vermitteln wollen und diese Einfügung des Complicirtesten und selbst Erklärungsbedürftigsten statt der einfachen Attraction für Erklärung ausgeben. Der Verfasser constatirt selbst, dass bis jetzt kein Erfolg davon gewonnen ist. Sein eigenes Urteil findet sich nicht ausgesprochen, doch begünstigt er durchweg jene Grübeleien. Er führt an, dass Newton auf Anfrage die unvermittelte Fernwirkung eine Absurdität genannt hat, verschweigt aber, wie Newton zu dieser unüberlegten Antwort gedrängt worden ist, ferner dass er später die Erklärung der Gravitation als secundäre Frage bezeichnet, noch später es definitiv ausgesprochen hat, dass die Attraction als causa simplicissima keine Frage übrig lässt. — Die im Vorstehenden berichtigten Vorurteile haben ausschliesslich Beziehung zu den Ausführungen, zu denen sie den Anlass gegeben haben. Obgleich sie als Fragen fundamentaler Natur auftreten, ist doch in der ganzen übrigen Schrift nichts darauf gebaut, und würde keine Lücke entstehen, wenn die betreffenden Stellen wegfielen — ein Zeichen dass jene Fragen überflüssig sind. Demzufolge bleibt aber auch der Wert des so reichlich dargebotenen instructiven Stoffes unvermindert durch die ausserhalb stehenden Vorurteile bestehen. Hoppe.

Die Structurformeln. Geschichte, Wesen und Beurtheilung des Werthes derselben. Bearbeitet von R. Bonn. Frankfurt a. O. 1887. Trowitzsch u. Sohn. 56 S.

Es wird zuerst die Gestaltung der Theorie der organischen Chemie geschichtlich entwickelt, dann an Beispielen der Wert der

gewonnenen Structurformeln gezeigt, der darin besteht, dass sie einen Einblick in die chemische Natur der Körper gestatten, und dass durch sie die Isomerien eine befriedigende Erklärung erlangen.

H.

Grundzüge einer neuen Moleculartheorie unter Voraussetzung Einer Materie und Eines Kraftprincipes. Von O. Simony, stud. phil. in Wien.

Die Arbeit ist veröffentlicht in Schlömilch's Zeitschr. für Math. u. Phys. XVIII. 463 — 510. XIX. 299 — 323 und XX. 1 — 35. Daran schliesst sich noch ein Aufsatz betitelt:

Ueber die Beziehung der mittleren Bewegungsintensität der Atome eines beliebigen festen Complexes zu dessen absoluter Temperatur.

Die hier entwickelten Grundzüge einer neuen Molecularlheorie erstrecken sich nach Aufstellung einer einheitlichen Hypothese auf Berechnung von deren nächsten Consequenzen, durch welche vorläufig ein noch nicht zu übersehender Raum für Erklärung physikalischer Erscheinungen und Gesetze geschaffen wird, ohne diese Erklärung selbst in Angriff zu nehmen. Es wird angenommen, dass alle Stoffe aus unveränderlichen Atomen bestehen. (Es ist unwesentlich, dass hier die Atome als homogene Kugeln gedacht werden, deren Volum allein die Masse bestimmt; man kann dafür auch Punkte mit denselben Massen setzen.) Die Atome verschiedener einfacher Stoffe haben verschiedene Grösse oder Masse. Die Anziehung je zweier Atome ist ausgedrückt durch

$$\frac{m_1 m_2}{r^2} \cos \frac{\alpha}{r}$$

wo m_1, m_2 ihre Massen, r ihren Abstand, α eine Function von m_1, m_2 bezeichnet. Für sehr grosse r ist, wie man sieht, die Abweichung vom Newton'schen Gesetze unmerklich. Für hinreichend kleine, dann immer kleiner werdende r wird die Anziehung, successive wiederholt, negativ. Es ergibt sich also eine Reihe stabiler Gleichgewichtslagen, derart dass der Uebergang aus einer in die folgende immer schwieriger wird. Damit ist die Verbindung mehrerer Atome zu Molecülen erklärt, die nur mit Widerstand getrennt werden kann. Der erste Artikel untersucht die aus der Störung des Gleichgewichts zwischen 2 verbundenen Atomen folgende Bewegung, der zweite ebenso die des dreiatomigen Molecüls mit Vernachlässigung höherer Potenzen der Verschiebung, der dritte dieselbe mit deren Berücksichtigung.

H.

Elektricität und Magnetismus als kosmotellurische Kräfte. Von Dr. Theodor Hoh, Professor der Physik am königl. Lyceum in Bamberg. Wien. Pest. Leipzig (1888). A. Hartleben. 264 S. Elektrotechnische Bibliothek. Band XXXVII.

Da die Himmelskörper mechanisch, optisch und thermisch bekanntermassen auf einander wirken, so liegt die Vermutung nahe, dass auch eine magnetische und elektrische Fernwirkung statt hat. Die vorliegende Schrift führt nun so erschöpfend als möglich die Tatsachen vor, auf welche sich die Erforschung der Beziehung zwischen Sonne, Mond und Erde in dieser Hinsicht stützen kann. Es werden die hierher gehörigen Beobachtungen betreffend Magnetnadel, Erdmagnetismus, Nordlicht, elektrische Erdströme, Elektricität der Luft, Elektricität der Wolken, Ozon, Helenenfeuer, Blitz und Donner: Verbreitung der Gewitter aus älterer und neuerer Zeit durchgegangen, dann am Schlusse die Gedanken über die Beeinflussung dieser Erscheinungen durch Sonne und Mond in allgemeinen Umrissen ausgesprochen. H.

Beweis, dass es eine Quadratur des Kreises giebt, und dass die bisher zur Berechnung des Kreises benutzte Ludolph'sche Zahl etwas zu klein ist. Von G. Kerschbaum, Steuerrath in Coburg. 2. vermehrte und verbesserte Auflage. Coburg 1888. E. Riemann jr. 18 S.

Von der 2ten, obwol ganz veränderten Auflage gilt dasselbe, was schon bei Besprechung der ersten (20. litt. Ber. S. 44) gesagt ist: Der Verfasser hat soviel Geschick und Verständniss an den Tag gelegt, dass er wol fähig sein wird seinen Fehler selbst aufzufinden. Die neue Arbeit nimmt auf die vorige keinen Bezug, sie ist länger und beansprucht noch grössere Geduld des Lesers. Hoppe.

Die Quadratur des Zirkels. Sichere Lösung einer bislang als Problem betrachteten wissenschaftlichen Frage. Dargestellt in 3 Zeichnungen und erläutert von F. W. Lolling, Redacteur. Hamburg 1887. G. Kramer. 15 S.

Diese Schrift, obwol sie sich mit demselben Unsinn wie die vorige (von Kerschbaum) beschäftigt, ist doch das Gegenteil von ihr hinsichtlich der darin kund gegebenen Befähigung des Verfassers. Gleich im Anfang, um nur den ersten Fehler zu nennen, wird verlangt, eine Tangente an einen Kreis so zu legen, dass sie durch 2 vorher bestimmte Punkte *d* und *e* gehe. In der Tat würde die Gerade *de* den Kreis wirklich berühren, wenn die Abstände der Punkte

von den Axen $\sqrt{2}-1$ statt $\frac{2}{5}$ des Radius wären. Hiernach scheint der Verfasser seine Relationen durch Messung der Figur gefunden zu haben, wobei ihm die kleine Differenz 0,014 entgangen ist. Der Fehler des Resultats ist c. 35 mal so gross als bei der Archimedischen Zahl. Hoppe.

Die Quadratur der Hyperbel nach einer neuen Methode berechnet von F. Samuda. Graz 1888. Styria. 16 S.

Das Vorliegende ist ein Gemisch von Richtigem, Unbestimmtem und Falschem. Die neue Methode" besteht in der Anwendung von „Analogieschlüssen." Durch Analogie, wenn sie auf richtiger Auffassung beruht, kann man Sätze auffinden, aber nicht beweisen. Hier hingegen ist die Auffassnng, der Schluss und das Ergebniss jedesmal unrichtig. Richtig ist allein die Proportionalität der beliebigen und gleichseitigen Hyperbelfläche, welche nicht erst gefunden ward, sondern schon im anfänglichen Ansatz ausgedrückt lag.

Hoppe.

Litterarischer Bericht
XXVIII.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Gerbert. Beiträge zur Kenntnis der Mathematik des Mittelalters. Von Professor Dr. H. Weissenborn. Mit 6 Figuren-Tafeln. Berlin 1888. Mayer u. Müller. 251 S.

Ueber das Betreiben der Mathematik im Mittelalter besitzen wir, wol infolge seiner geringen Fruchtbarkeit, noch so äusserst fragmentarische Kenntniss, dass Beiträge sehr willkommen sein können, namentlich wenn sie auf Herstellung eines annehmbaren Zusammenhangs gerichtet sind. Letzteres Augenmerk fehlt grossenteils den gegenwärtigen Beiträgen; sie sind noch in höherem Masse fragmentarisch. Der erste Teil der Schrift sucht Entscheidung über die zwei Fragen: ob die Werke Gerbert's, nach Manuscripten 1867 herausgegeben von Olleris, von Gerbert selbst verfasst sind, und ob derselbe seine Lehre von den Arabern oder Römern empfangen habe. Näher liegende Fragen werden mit Stillschweigen übergangen. Nur aus den citirten Angaben von Olleris: „Gerbert, pape sous le nom de Sylvestre II." — ersieht der Leser, sofern Sylvester II. im Jahr 1003 Papst war, dass vom 10. Jahrhundert als Zeit seiner Lehrtätigkeit die Rede ist. Nachdem, in Betreff der erstern Frage, die Gründe dargelegt sind, welche Cantor für die Echtheit von Gerbert's Geometrie anführt, begegnet der Verfasser denselben mit der Kritik einer grossen Anzahl von Stellen, welche ihn zu dem Schlusse führt, dass wol der erste Teil des Werkes und Einiges aus dem zweiten von Gerbert herrühren mag, der ganze dritte Teil aber höchst wahrscheinlich ihm fälschlich zugeschrieben worden ist. Sehr eingehend wird nun das Capitel über Messmethoden und Messinstrumente behandelt, bezüglich auf Höhen- und Distanz-Messung und Darstellung des Himmelsglobus auf der Ebene, nach Gerbert's Schrift. Man findet darin ein rationales theoretisch-praktisches Zuwerkegehen,

welches einen eigenen Standpunkt der Entwickelung gegenüber den griechischen Methoden charakterisirt. Die goniometrischen Functionen kommen bei diesem Verfahren gar nicht in Frage: denn statt des Kreisquadranten wird zur Winkelmessung ein Quadrat gesetzt, und die Seite in 12 gleiche Teile geteilt, also statt des Winkels direct dessen Function tang gemessen. Zur Darstellung der Kugelfläche auf der Ebene dient die stereographische Projection. Die vom Verfasser erläuterten und interpretirten Sätze der Schrift geben einen guten Einblick in die damalige Doctrin und den Lehrgang. Stark contrastirt nun von dieser auf achtbarer Höhe der Entwickelung stehenden Geometrie die Rechenkunst, die gegen den natürlichen Verstand der Wilden sogar im Nachteil sich befindet. Um das Rechenverfahren zu erklären, sagt der Verfasser, man solle sich jemanden denken, dem es zu schwer sei das Einmaleins bis 10.10 zu erlernen, und der es etwa bis 5.5 wüsste. Dann würde er, um grössere Zahlen 6 bis 9 zu multipliciren, sich dadurch helfen, dass er die Factoren zu 10 ergänzte, und müsste so auf das Verfahren kommen, welches hier, nach Gerbert, complementare Multiplication heisst. Der Verfasser ist also wol der Meinung, die Schule habe diese complementare Multiplication zugunsten wenig begabter Schüler eingeführt. Es kann wol kein Zweifel sein, dass ein Kind ohne Kenntniss von Zahlzeichen leichter das Einmaleins bis 20.20 auswendig lernt als die complicirte Regel auch nur vorschriftsmässig ausübt, wie es hier gefordert wird. Verständniss derselben verlangt auch Gerbert nicht; der Schüler soll sich auf „die Regel" berufen. Muss man nun annehmen, dass für die Multiplication mit Zahlen > 10, von welcher der Verfasser kein Wort sagt, ähnliche Regeln aufgestellt wurden, so eröffnet sich ein Prospect so zurückschreckend wie er nur sein kann. Nicht für schwach begabte Anfänger war der Unterricht berechnet, sondern einander überbietende Rechenkünstler sollten angeleitet werden. Die Erklärung dieser sonderbaren Didaktik bietet sich aber leicht genug dar in dem Gebrauche der römischen Zahlzeichen und der Einrichtung des Rechenbretes für die Zahlclassen I, V, X, L, C, D, M. Wir sehen darin ein Beispiel der Herrschaft des schulmeisterlichen Zopfes: die auf die Rechenkunst verwandte Mühe war jedem Gelehrten einmal nötig und spornte jede neue Generation an, die gleiche Leistung an den Tag zu legen, bis es 600 Jahre später dem unermüdlichen Eifer Adam Riese's gelang den Strom zu hemmen und die Einführung des längst bekannten Zifferrechnens in die Schule durchzusetzen. Das Folgende knüpft nun nicht an die Ausführung der Multiplication, sondern an die durch die Regel gegebene Formel an, findet darin allgemeine arithmetische Sätze und führt deren Beziehung zu griechischen und arabischen Autoren aus. Ist diese vergleichende und interpretirende Unter-

suchung dem Fortgange des Gerbert'schen Textes entsprechend, so scheint derselbe kein geordneter Lehrgang, sondern die Ueberlieferung eines zusammengetragenen Fonds an arithmetischen Kenntnissen der Vorgänger zu sein. Nun wird noch ein drittes Thema behandelt: Rechenbret und Rechnen bei Gerbert. Den Anfang macht eine Stelle in Richerus über dessen mathematischen Unterricht in Rheims, welche über den Abacus viele Angaben macht, ohne dass daraus irgend eine Vorstellung von dessen Einrichtung und Gebrauche zu entnehmen wäre. Der Verfasser erklärt sie weder, noch erwähnt er irgend eine Frage nach ihrer Erklärung; er geht darüber hinweg zu angeknüpften Bemerkungen, zu deren Beurteilung wir nun einmal immer erst fragen müssten: Wie ist auf dem Abacus gerechnet worden? Aufstellungen darüber von Seiten andrer Autoren stimmen weder unter sich überein, noch lassen sie sich mit den Angaben von Richerus vereinigen. Als bekannt lässt sich also die Einrichtung nicht betrachten. Zuerst bemerkt der Verfasser, dass der Abacus auch geometrische Anwendung gehabt hat: er ist mit Sand bestreut, und Figuren darauf gezeichnet worden; diese werden mit den figurirten Zahlen in Verbindung gebracht. Dass aber deren Zeichnung mit dem Rechnen auf dem Abacus in irgend einer Beziehung gestanden habe, ist schwerlich zu ersehen. Am Schlusse des Ganzen verspricht der Verfasser, „ein Bild der Mathematik des Mittelalters, wenn auch nur in allgemeinen Umrissen und in groben Zügen, zu entwerfen". Statt der allgemeinen Umrisse findet man jedoch wieder nur Einzelheiten. Als Vorarbeit mögen die vorliegenden Beiträge viel Nützliches enthalten; zu definitivem Resultate würde jedenfalls erst eine neue Arbeit erforderlich sein. Hoppe.

Joachim Jungius. Festrede zur Feier seines dreihundertsten Geburtstages am 22. Oktober 1887 im Auftrage der Hamburger Oberschulbehörde gehalten von Dr. Emil Wohlwill. Mit Beiträgen zu Jungius' Biographie und zur Kenntnis seines handschriftlichen Nachlasses. Hamburg und Leipzig 1888. Leopold Voss. 85 S.

Die Rede charakterisirt in lebensvoller Weise die das Wiederaufleben der Wissenschaften anbahnende Lehrtätigkeit des Jungius, anbahnend durch Bekämpfung der unumschränkten Autorität des Aristoteles in Betreff der Naturerkenntniss. An biographischen Angaben kommen in der Rede folgende vor. Joach. Jungius, geboren in Lübeck den 22. Oct. 1587, ward 1609 Professor der Mathematik und Logik in Giessen, gab später diese Stellung auf, erwarb in Padua den medicinischen Doctorgrad, kehrte in die Heimat zurück, gründete 1622 die erste naturwissenschaftliche Vereinigung, genannt die ercunetische Gesellschaft, ward 1624 Professor der Mathematik in Rostock,

1625 Professor der Medicin in Helmstädt, erhielt 1626 erstere Stellung zum zweitenmale, und ward den 19. März 1629 Rector der classischen Schule und zugleich des Gymnasiums in Hamburg; von 1640 an bis zu seinem Tode 1657 blieb er Rector des Gymnasiums allein. Sein Vorgänger in Hamburg war Petrus Lauremberg, der noch ganz der alten aprioristischen Naturlehre anhieng, welcher Jungius entgegentreten musste. Seine schriftstellerische Tätigkeit und seine eingehenden äusserst vielseitigen naturwissenschaftlichen Forschungen beginnen mit 1622. Seine Werke, obwol im ganzen von sehr grossem Umfange, sind in kleinen Heften als Manuscript in Hamburg aufbewahrt. Es wird nicht erwähnt, dass irgend welche dieser Arbeiten im Druck erschienen seien. Daher konnte es kommen, dass ein grosser Teil derselben in der Feuersbrunst zugrunde gieng Auch sind sie infolge davon, sowie auch der Kriegszeiten, dem Publicum ziemlich unbekannt geblieben, während die grössten Gelehrten jener Zeit sie mit Ehren hervorhoben. Der Rede sind einige ergänzende Notizen am Schluss beigefügt Eine Biographie besitzen wir seit 1850 von G. E. Guhrauer unter dem Titel „Joachim Jungius und sein Zeitalter". So wertvoll diese auch ist, wird doch eine neue Bearbeitung für notwendig erachtet, weil der Verfasser dem naturwissenschaftlichen Fache nicht angehört. Hierzu liefert ein Anhang der gegenwärtigen Schrift Vorarbeiten. H.

Bouwstoffen voor de geschiedenis der wis- en natuurkundige wetenschappen in de Nederlanden. Door D. Bierens de Haan. Tweede verzameling. Overgedrukt uit de Verslagen en Mededeelingen der Kon. Akademie van Wetenschappen. Af d. Natuurk. 2e Reeks, Deel XIV, XVI, XVIII, XIX en XX, 3e Reeks, Deel I en III. 1887. (Niet in den handel.) 465 S.

Nach der im 249. litt. Bericht besprochenen ersten ist dies die zweite Sammlung von Berichten über Form und Inhalt alter mathematischer und physikalischer Werke, welche zu jenen 17 Numern noch 13 neue hinzufügt. Die Gegenstände dieser Schriften sind sehr verschieden und mögen hier genannt werden. M. C. Crezfeldt: Rechnen im 16. Jahrhundert. — N. S. Cruquius, M. Bolstra: Erster Gebrauch der Isohypsen bei niederländischen Ingenieuren. — W. J. Blaeu: Seekarten. — C. S. van Leeuwen: Landmessung, Placate. — J. H. J. van der Ley: Seefahrt, Erdmessung. — C. H. Gietermaker: Geometrische Fragen. — B. Spinoza: Regenbogen, Wahrscheinlichkeit u. a. — S. Stevin: Arithmetik, Singkunst, Mühlen. — D. J. B. van Burmania: Wetterkunde. — R. des Cartes: Wissenschaftliches Inventar. — J. J. Stampioen de Jonge: Wurzelausziehung. Ueber das Leben dieser Gelehrten und die Beziehung zu ihren Zeit-

genossen finden sich viele Mitteilungen. Zum Schlusse folgen Ergänzungen, Lebensberichte und ein Bücherverzeichniss. H.

Bulletino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche pubblicato da B. Boncompagni. Tomo XX. Roma 1887. Tipografia delle scienze matematiche e fisiche.

Der 20. Band enthält folgende Abhandlungen.

M. Steinschneider: Studien über Zarkali. 2. Artikel (Forts.) — F. Jacoli: Ungedruckter Briefwechsel zwischen Tycho de Brahe, Johann Kepler und anderen berühmten Astronomen und Mathematikern des 16. und 17. Jahrhunderts und zwischen Giovanni Antonio Magini, entnommen aus dem Archivio Malvezzi de' Medici in Bologna, publicirt und erläutert von A. Favaro.

A. Favaro: Documente zur Geschichte der Accademia dei Lincei enthalten in Galileianischen Manuscripten der Biblioteca Nazionale von Florenz. — Von Giovanni Tarde und einem Besuche desselben bei Galileo vom 12. bis 15. November 1614. — Allgemeine Bibliographie der Astronomie, gedruckte Werke und Manuscript, vom Anfang der Buchdruckerei bis 1880 von J. C. Houzeau und A. Lancaster, 2 Teile. — Die römische Wissenschaft in der Zeit des Augustus, historische Untersuchung nach Viteuve von A. Terquem.

E. Narducci: Leben des Pythagoras geschrieben von Bernardino Baldi.

Ch. Henry: Brief an den Fürsten D. B. Boncompagni über verschiedene Punkte der Geschichte der Mathematik.

A. Marre: Theorie des Quadrats der Hypotenuse.

R. Schram (in französischer Uebersetzung von E. Pasquier): Notiz über die Arbeiten von Theodor von Oppolzer nebst dem vollständigen Verzeichniss seiner Publicationen.

T. Bertelli Barnabita: Von einigen alten und neuen elektroseismischen Theorien und Untersuchungen.

P. Riccardi: Ferneres über Giovanni Battista della Porta's Abhandlung De quadratura circuli.

G. Govi: Von der Erfindung des Mikrometers für die astronomischen Instrumente. H.

Die Quadratur des Zirkels in berufenen und unberufenen Köpfen. Eine kulturgeschichtliche Studie von Dr. Hermann Schubert, Professor an der Gelehrtenschule des Johanneums in Hamburg. Hamburg 1889. Verlagsanstalt und Druckerei. 40 S.

Diese vortrefflich abgefasste kleine Schrift gibt Unkundigen der Mathematik Aufschluss über die Bedeutung des Problems der Qua-

dratur des Kreises, erklärt zunächst das Interesse, welches sich seit Jahrtausenden daran geknüpft hat und führt eingehend die Geschichte der intellectuellen Fortschritte, der praktischen Aushülfe durch Näherungswerte und der auftretenden Irrtümer bei den Aegyptern, Babyloniern, Indiern, Arabern, Chinesen und Griechen im Altertume, dann in Europa bis zur Gegenwart durch. Hieraus ist, weil wol weniger bekannt, hervorzuheben, dass schon Archimedes die Möglichkeit unbegrenzter Annäherung erkannt und gelehrt hat. Der Sinn des Problems knüpft sich überall an die Construction nach geometrischen Postulaten. Am Schlusse wird der Gang des Lindemann'schen Beweises der Unmöglichkeit der Lösung mitgeteilt, welcher diese Grenze weit überschreitet. H.

Lehrbücher.

Eléments des Mathématiques. Par M. Sibiriakoff. St. Petersburg 1888. Aug. Deubner. 8 S.

Die russisch und französisch erschienene Broschüre besteht aus 3 Capiteln, von denen das erste die Bedeutung der Null und der negativen Grössen, das zweite die der imaginären Wurzeln der Gleichungen erklärt, das dritte die algebraischen Gleichungen für x in solche für $x-1$ transformirt. Hiernach könnte man etwa vermuten, dass die Broschüre, sofern ihr Inhalt nur Anfängern unbekannt sein kann, zur Ergänzung irgend eines Lehrbuchs der Algebra dienen sollte. Doch bezeichnet der Verfasser die Schrift im Eingang als seine Untersuchungen und insbesondere das Gesetz der Coefficienten der transformirten Gleichung als seine Entdeckung. Dann freilich muss man das Ganze als Specimen seiner Studien ansehen. (Auf besonderen Wunsch des Verlegers hier besprochen.) Hoppe.

Lehrbuch der ebenen Trigonometrie für den Schulgebrauch. Von Dr. Karl Nies, Lehrer an dem Grossherz. Realgymn. und der Realschule in Darmstadt. Darmstadt 1888. A. Bergsträsser. 78 S.

Der erste Abschnitt des Buches behandelt die Geometrie. Die wichtigste Frage ist hier, in welcher Weise dem Schüler der Begriff der Kreisfunctionen vorgeführt wird. Der Verfasser definirt dieselben zunächst als Verhältnisszahlen der Seiten des rechtwinkligen Dreiecks, später durch Linien am Kreise vom Radius 1 und schliesslich mit Hilfe der Parallelcoordinaten eines Punktes. Jede der drei Definitionen wird zur Ableitung einer Reihe von Eigenschaften der Functionen

benutzt. — Will man aus pädagogischen Gründen nicht mit der allgemeinsten Definition beginnen, so erscheint es mir erwünscht, die speciellen doch nur als Vorübungen vorauszuschicken. Jedenfalls sollte nach Einführung der allgemeinen Definition gezeigt werden, dass die früheren in ihr enthalten sind, und sollten alle Eigenschaften der Functionen aus ihr mit wissenschaftlicher Strenge abgeleitet werden, so dass der Schüler bei Repetitionen das der allgemeinen Definition Vorausgehende fortlassen kann. Die zweite und dritte der oben angeführten Definitionen sollten nicht von einander getrennt werden. — Die für den Schulgebrauch notwendigen Formeln sind vollständig abgeleitet, die Beweise sehr ausführlich, so dass auch schwache Schüler sie leicht verstehen werden. Für die Functionen der Summe zweier Winkel werden die beiden üblichen planimetrischen Ableitungen gegeben. Im zweiten Abschnitt, der Trigonometrie, werden zunächst das rechtwinklige und das gleichschenklige Dreieck ausführlich behandelt, dann die für die Auflösung des allgemeinen Dreiecks notwendigen Sätze abgeleitet, die Einführung des Hilfswinkels besprochen und die verschiedenen Lösungen der vier Fundamentalaufgaben gegeben, wobei vielleicht die einfachsten Lösungen hätten mehr hervorgehoben werden können. Für sämtliche Aufgaben werden Zahlenbeispiele durchgeführt. Am Schluss folgt ein Paragraph, in dem die bei den verschiedensten trigonometrischen Aufgaben vorkommenden Stücke durch r und die Winkel ausgedrückt werden. In einem Anhang bietet der Verfasser eine grosse Zahl von Uebungsbeispielen mit den Resultaten. — Ist somit das Buch im ganzen für den Unterricht brauchbar, so hat es doch im einzelnen einige Mängel, deren Beseitigung bei einer neuen Auflage erwünscht erscheint. So heisst es in § 21: „Der Sinus stellt sich am Kreis als die Senkrechte vom Endpunkte des gedrehten Schenkels auf den ruhenden Schenkel ... dar". Wenigstens sollte doch gesagt sein: „am Kreis vom Radius 1." — „Der positive Sinn der Drehung ist derjenigen des Uhrzeigers entgegengesetzt." Nein! Wir nehmen die eine Drehungsrichtung, ganz gleichgiltig welche, als positiv an, dann ist die entgegengesetzte negativ. — „In einem rechtwinkligen Dreieck, welches die Hälfte eines gleichseitigen Dreiecks ist, beträgt der eine Winkel 30°; in diesem Falle ist $c = 1$, $a = \frac{1}{2}$." (!) — § 33. „... man versteht nun für Winkel über 90° unter 1., Sinus eines beliebigen Winkels die Ordinate des Endpunktes des gedrehten Schenkels $= y$, 2., Cosinus ..., immer unter der Voraussetzung, dass der Radius des Coordinatenkreises $r = 1$ ist." Das ist die letzte und allgemeinste Definition, die der Verfasser giebt! Die scheint also nur für beliebige Winkel über 90° zu gelten. Statt Ordinate sollte es Masszahl der Ordinate heissen, damit sich dem Schüler fest einpräge, dass der Sinus eine Zahl und keine Linie ist. Gleich darauf

definirt der Verfasser ja auch die Tangente eines Winkels als „Quotienten der Masszahlen seiner Ordinate und Abscisse". Hier ist nun allerdings wieder vergessen, von der Ordinate eines Winkels zu sprechen. Es giebt nur Ordinaten von Punkten. Aehnliche Ungenauigkeiten finden sich an verschiedenen andern Stellen. — § 55. Die Moivre'sche Formel wird für die 2. Potenz bewiesen und ihre Giltigkeit für die *n*. Potenz und sogar für gebrochene Exponenten als selbstverständlich hingestellt! — In § 63 beziehen sich dieselben Buchstaben teils auf Figur 3, teils auf Figur 19. Das verwirrt den Schüler. — In § 68 werden „Formel" und „Wert" als gleichbedeutende Wörter gebraucht. — § 83, 3: „Die Formel I ist ungenau". Der Verfasser meint natürlich das nach ihr berechnete Resultat. — Es wird nicht nötig sein, noch weitere Beispiele anzuführen, um den oben ausgesprochenen Wunsch, dass der Verfasser das Buch vor einer neuen Auflage einer genauen Durchsicht unterwerfen möge, berechtigt erscheinen zu lassen.

Dr. Edmund Schulze.

Lehrbuch der ebenen Geometrie nebst einer Sammlung von 800 Uebungsaufgaben zum Gebrauche an höheren Lehranstalten und beim Selbststudium. Von Dr. Carl Spitz. Neunte, verbesserte und vermehrte Auflage. Mit 251 in den Text gedruckten Holzschnitten. Leipzig 1888. C. F. Winter. 290 S.

Anhang zu dem Lehrbuche der ebenen Geometrie. Von Dr. Carl Spitz. Die Resultate und Andeutungen zur Auflösung der in dem Lehrbuche befindlichen Aufgaben enthaltend. Neunte, verbesserte und vermehrte Auflage. Mit 112 in den Text gedruckten Figuren. Leipzig 1888. C. F. Winter. 113 S.

Das Lehrbuch nebst Anhang ist in 8. Auflage im 264. litt. Berichte S. 41 besprochen. Aenderungen in der neuen Auflage sind im Vorwort nicht angezeigt. Das gerügte trügerische Zuwerkegehen beim Parallelensatze ist beibehalten worden. H.

Lehrbuch der ebenen Trigonometrie nebst einer Sammlung von 630 Beispielen und Uebungsaufgaben zum Gebrauche an höheren Lehranstalten und beim Selbststudium. Von Dr. Carl Spitz. Sechste, verbesserte und vermehrte Auflage Mit 47 in den Text gedruckten Figuren. Leipzig 1888. C. F. Winter. 140 S.

Anhang zu dem Lehrbuche der ebenen Trigonometrie von Dr. Carl Spitz. Die Resultate und Andeutungen zur Auflösung der in dem Lehrbuche befindlichen Aufgaben enthaltend. Sechste, verbesserte und vermehrte Auflage. Mit 23 in den Text gedruckten Figuren. Leipzig 1888. C. F. Winter. 73 S.

Ueber die Lehrmethode ist zunächst zu bemerken, dass die goniometrischen Functionen von Anfang an (als Zahlen, nicht Linien) für beliebig grosse Winkel eingeführt werden. Verbessert wird die Methode durch die anfängliche Allgemeinheit weder vom ideellen noch vom praktischen Gesichtspunkte. Die Goniometrie des 1. Quadranten (Trigonometrie des rechtwinkligen Dreiecks) ist kein blosser specieller Teil der gesamten Theorie, sondern umfasst vollständig die notwendige Voraussetzung transcendenter Abhängigkeit; der übrige Teil ist algebraische Anwendung. Auch für Auffassung und Orientirung ist es ungünstig, mit einem überflüssig weiten Felde der Betrachtung zu beginnen. Für die fernere Entwickelung der Lehre wird nichts gewonnen; denn die Allgemeingültigkeit der Formeln muss jedenfalls an diesen selbst bewiesen werden, wie es auch hier geschieht. Die Darstellung zeichnet sich nicht durch Concinnität und Uebersichtlichkeit aus; sie lässt das Lehrpensum als ein grösseres erscheinen als es in Wirklichkeit ist. Dagegen versäumt sie auf den für Anfänger wichtigen Punkt, die Vieldeutigkeit der inversen Functionen, aufmerksam zu machen. Zu Anfang ist es zwar an 2 Stellen ausgesprochen, dass der Winkel durch die Function nicht vollständig bestimmt wird; doch weiterhin und besonders in den Uebungsbeispielen wird darauf keine Rücksicht mehr genommen. Ebenso bleibt das doppelte Vorzeichen der Quadratwurzel unbeachtet, und die Formel $\operatorname{tg} \frac{1}{2} a = \frac{1 - \cos a}{\sin a}$, welche sich doch leicht rational herleiten lässt, wird durch Quadratwurzel gefunden ohne nur zu erwähnen, dass dann nach dem Vorzeichen gefragt werden müsste. Die Trigonometrie behandelt erst das rechtwinklige, dann das schiefwinklige Dreieck, und zwar an ersterm 4 Aufgaben, über letzteres erst 5 Lehrsätze, dann 4 fundamentale und viele Uebungsaufgaben. H.

Lehrbuch der Planimetrie. Für den Schul- und Selbstunterricht. Von H. Weidemann, Oberlehrer der Mathematik am Landesgymnasium zu Pellin. Berlin 1888. A. Deubner. 210 S.

Ueber den Zweck der Herausgabe eines neuen Lehrbuchs wird im Vorwort reichlich Rechenschaft gegeben. Es werden darin keine neuen Grundsätze aufgestellt, noch nach irgend einer Seite hin eine Vollkommenheit in Aussicht genommen; vielmehr ist es Ziel der Bearbeitung, im einzelnen, ohne Bevorzugung des Alten oder Neuen, zu bessern, wo sich das Bedürfniss zeigt. Dass dies mit Fleiss und Umsicht geschehen, ist anzuerkennen. Kürze und Beschränkung auf das Notwendige hat sich der Verfasser nicht auferlegt: es werden keine Worte gespart um alles, was dem Verständniss und dem Auffinden der Lösungen der Aufgaben dienlich ist, beizubringen; namen-

F. Gomes Teixeira: Ueber die Entwickelung der Functionen imaginärer Variabeln in Reihen. — Ueber die Derivation der zusammengesetzten Functionen. — Ueber die Reduction der hyperelliptischen Integrale.

R. Guimarães: Ueber die Rectification der Ellipsenbogen.

A. Gützmer: Ueber eine von M. Lerch betrachtete Reihe. — Bemerkungen über die Theorie der Reihen. — Ueber gewisse arithmetische Mittel der Functionen einer complexen Variabeln.

H. le Pont: 2 Noten aus der Integralrechnung. — Ueber die asymptotischen und Krümmungslinien.

A. Schiappa Monteiro: Ueber das gleichschenklige Dreieck.

J. M. Rodrigues: Ueber die Lagrange'sche Reihe.

M. E. Weyr: 2 Bemerkungen zu den Reihen.

M. d'Ocagne: Ueber ein arithmetisches Problem. — Ueber die Kegelschnitte. — Algebraisches Problem.

Bibliographie. Auszüge aus neuen Arbeiten. H.

Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, pour les sciences mathématiques et les sciences physiques, publiées par un comité de rédaction composé des professeurs de mathématiques, de physique et de chimie de la faculté. Sous les auspices du Ministère de l'instruction publique et de la Municipalité de Toulouse. Avec le concours des Conseils Généraux de la Haute-Garonne et des Hautes-Pyrénées. Tome II. Année 1888. Paris 1888. Gauthier-Villars et fils.

Der Inhalt des 2. Bandes ist folgender.

Ch. Bioche: Ueber die asymptotischen Linien gewisser windschiefer Regelflächen.

P. Painlevé: Ueber die singularen Linien der analytischen Functionen.

Hermite: Bemerkungen über die Zerlegung der doppelt periodischen Functionen in einfache Elemente. — Ueber die Transformation des elliptischen Integrals 2. Gattung.

F. Tisserand: Ueber eine Differentialgleichung, welche eine wichtige Rolle in der Mechanik des Himmels spielt.

B. Baillaud, Ergänzende Untersuchungen über die Entwickelung der Störungsfunction.

G. Koenigs: Beiträge zur Theorie des Kreises im Raume.

A. Destrem: Verrückungen des Kupfers in einigen Lösungen von Kupfersalzen durch Zink und Cadmium.

F. J. Stieltjes: Ueber die lineare Transformation des elliptischen Differentials $\partial x : \sqrt{x}$.

P. Duhem: Historische Studie über die Theorie der Magnetisirung durch Induction. — Von der Magnetisirung durch Induction.

H.

Mathésis, recueil mathématique à l'usage des écoles spéciales et des établissements d'instruction moyenne. Publié par P. Mansion et J. Neuberg avec la collaboration de plusieurs professeurs belges et étrangers. Tome VIII. Gand 1888. Ad. Hoste.

Der 8. Band enthält folgende Abhandlungen.

G. de Longchamps: Ueber eine merkwürdige Trisectrix. — Ueber die Normalen der Kegelschnitte.

Verniory: Eine Zerlegung in Partialbrüche.

Barbarin: Inhalt einiger Dreiecke. — Aufgaben über die Profil-Gerade.

Cl. Servais: Anwendungen der linearen Quasi-Inversion auf die osculirenden Curven. — Ueber die Theorie der Transformationen.

E. Cesàro: Developpanten des Punktes. — Trägheitsmomente des Dreiecks und Tetraeders. — E. C. und E. Catalan: Ueber einen Satz von Oltramare.

J. J. Sylvester: Ueber die vollkommenen Zahlen.

M. d'Ocagne: Ueber die complementaren Punkte. — Zu einer früheren Note über das Dreieck (t. VII.)

Bergmans: Sätze von der Parabel.

Jerábek und Neuberg: Ueber die der Euler'schen Geraden inverse Hyperbel.

E. Catalan: Ueber die vollkommenen Zahlen.

Fuhrmann: Ueber die Hyperbel Γ'.

P. Mansion: Methode der Unendlichkleinen.

J. Neuberg: Ueber die involutiven quadratischen Transformationen.

E. Wasteels: Ueber das Viviani'sche Theorem.

E. Lemoine: Ueber das Mass der Einfachheit in den mathematischen Constructionen.

Ph. Gilbert: Bestimmung der Axen eines centralen Ellipsoidschnitts nach Grösse und Richtung.

Ausserdem Auszüge, viele Fragen und einige Lösungen.

H.

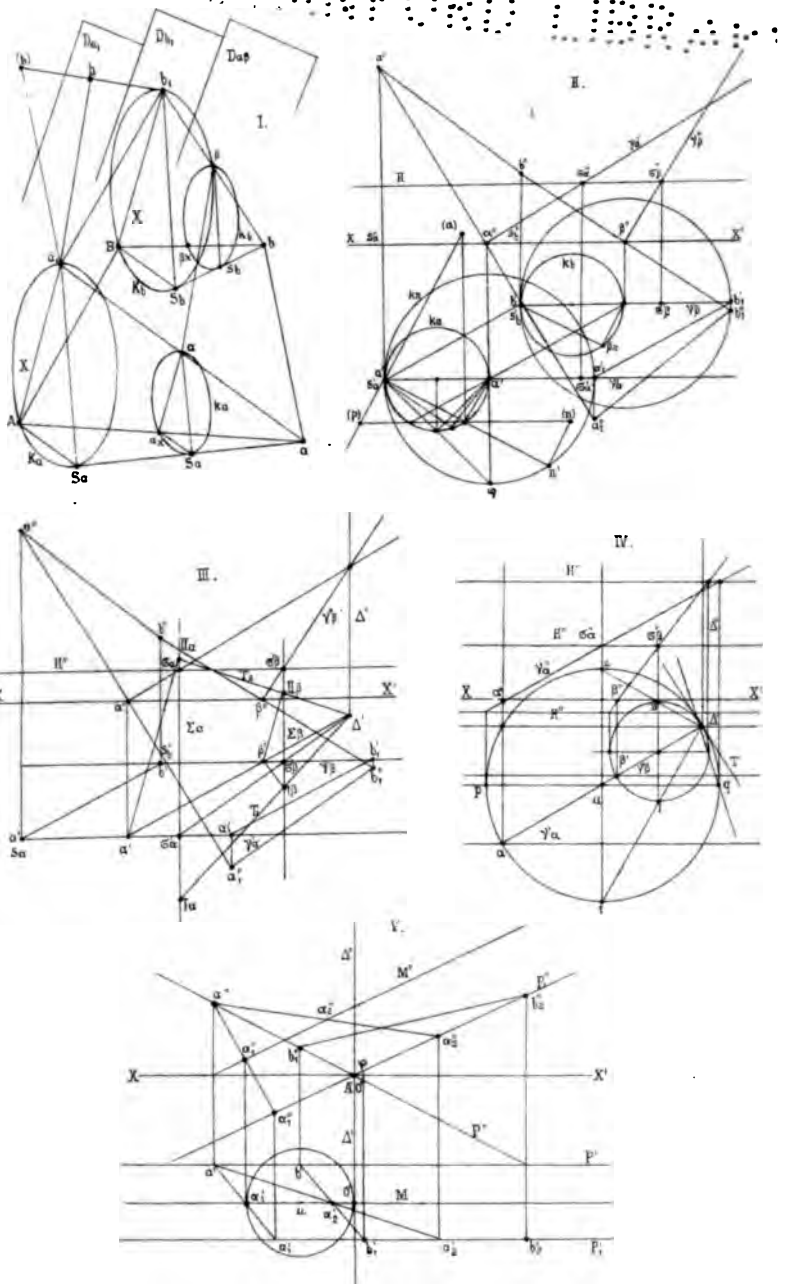
Annuaire pour l'an 1889, publié par le Bureau des Longitudes. Avec des notices scientifiques. Paris, Gauthier-Villars et fils.

Outre les renseignements pratiques qu'il contient chaque année, l'Annuaire du Bureau des Longitudes pour 1889 renferme des articles

dus aux savants les plus illustres sur les Monnaies, la Statistique, la Géographie, la Minéralogie, etc., enfin les Notices suivantes: Sur les quatre sessions de l'Association géodésique internationale à Paris, Berlin, Nice et Salzbourg; par H. Faye. — Sur la mesure des masses en Astronomie; par F. Tisserand. — Une expédition au massif du mont Blanc; par J. Janssen. — Une ascension au pic de Ténériffe; par Bouquet de la Grye. — Discours prononcé à l'inauguration de la statue d'Ampère à Lyon, par A. Cornu. — Revue des principaux travaux du Bureau des Longitudes en 1888; par le Secrétaire. In-18 de IX-830 pages, avec 2 Cartes magnétiques. (1 fr. 50 c.)

Gauthier-Villars et fils.

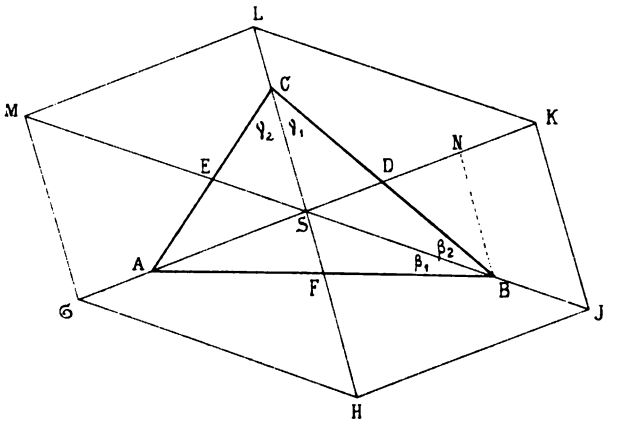
STANFORD LIBRARIES



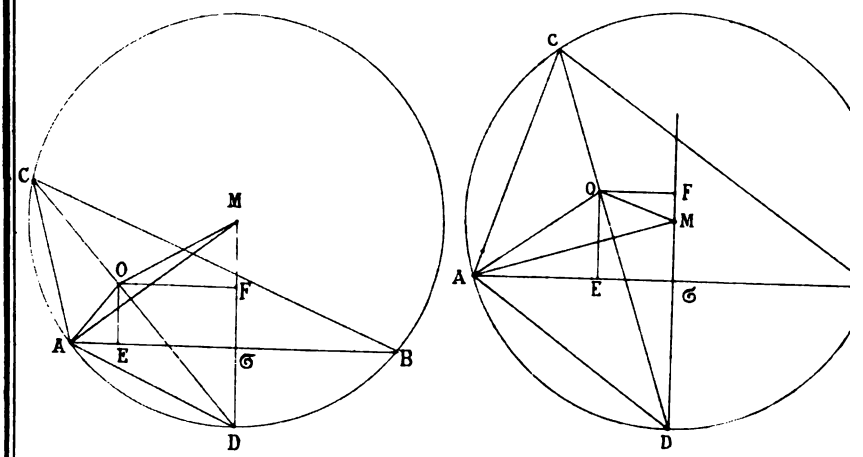
I. Pelisek: Ort der Axen von Schraubenbewegungen.

STANFORD LIBRARY

STANFORD LIBR

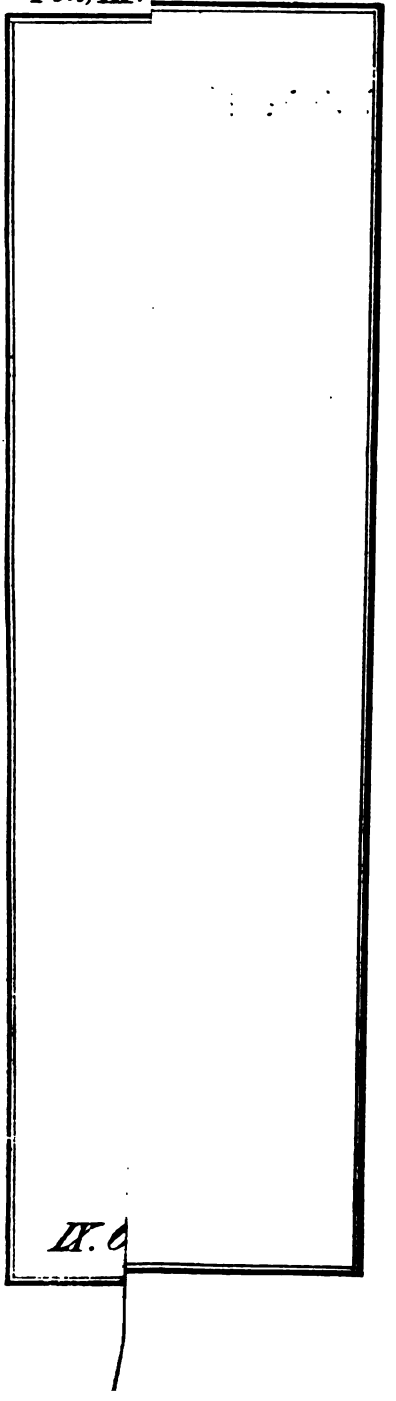


II. Pabst: Beziehungen zwischen Höhen und Transversalen.



VII. Caspar: Dreiecksfata.

STANFORD LIBRARY


IX. C

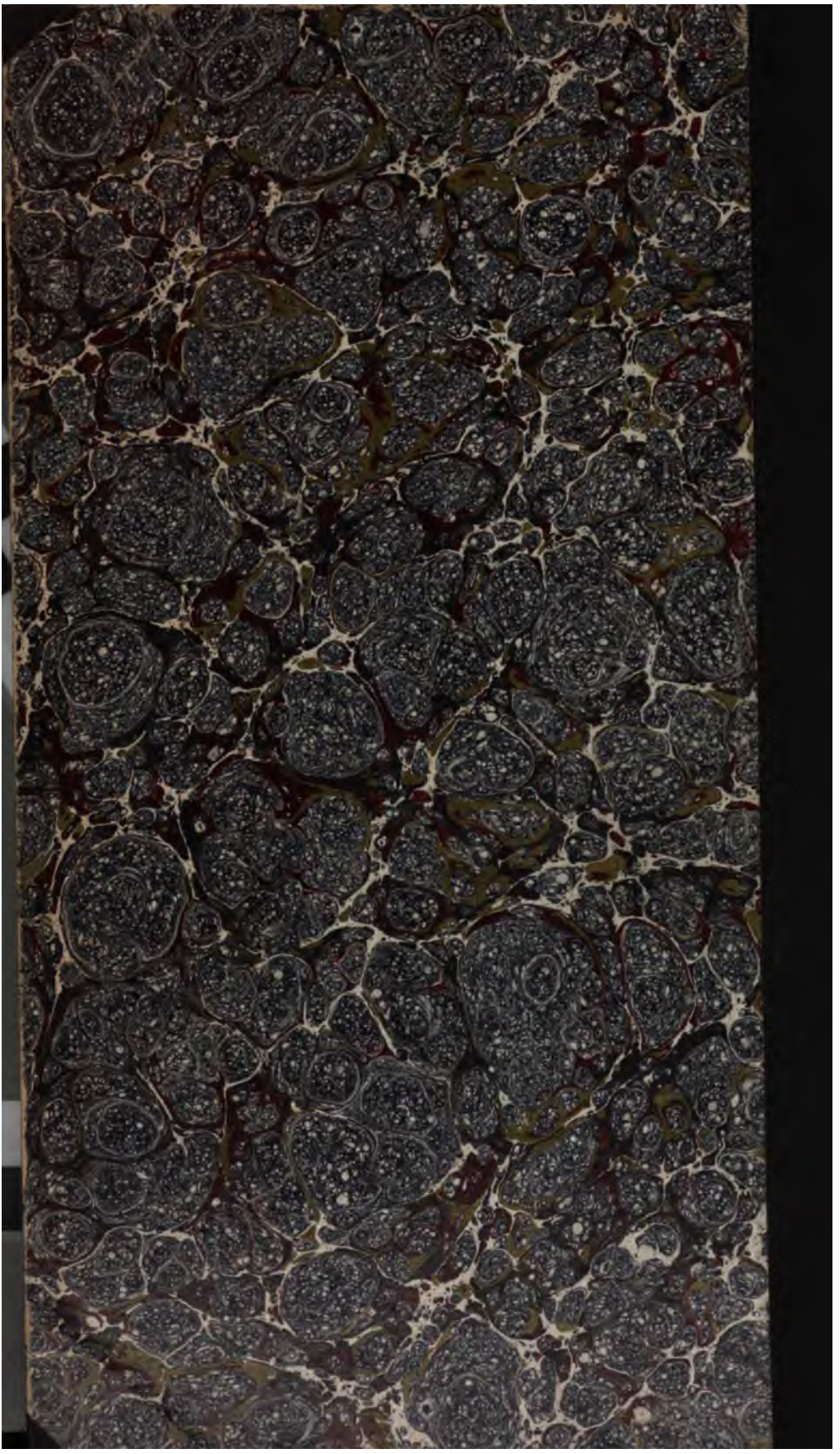
STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES
STANFORD AUXILIARY LIBRARY
STANFORD, CALIFORNIA 94305-6004
(415) 723-9201
All books may be recalled after 7 days

DATE DUE

28D NOV 28 1995

NOV 01 1995

28D DEC 17 1997

510.5
A673
v.7

STORAGE AREA